با درود به شما دانش‌آموزان گرامی، در این نوشته مروری کلی ولی کوتاه بر کتاب هندسه‌ی تحلیلی و جبر خطی خواهیم داشت که امیدوارم آن را با دقت بخوانید و بپسندید.

زاویه‌ی بین دو بردار ناصفر: گیریم a و b دو بردار ناصفر باشند که θ زاویه‌ی بین آن‌هاست. کسینوس زاویه‌ی میان a و b از دستور $\cos\theta = \frac{\mathbf{a.b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$ به‌دست می‌آید که در آن و با فرض $\mathbf{a} = (\mathbf{a_۱},\mathbf{a_۲},\mathbf{a_۳})$ و $\mathbf{b} = (\mathbf{b_۱},\mathbf{b_۲},\mathbf{b_۳})$ داریم:

$$\mathbf{a.b} = a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + a_۳b_۳$$

توجه: اگر بردار $\mathbf{a} = (\mathbf{a_۱},\mathbf{a_۲},\mathbf{a_۳})$ با محورهای مختصات، به‌ترتیب زاویه‌های α، β و γ بسازد، آن گاه:

$$\cos\alpha = \frac{a_۱}{|\mathbf{a}|}\ ,\ \cos\beta = \frac{a_۲}{|\mathbf{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_۳}{|\mathbf{a}|}$$

تست ۱. اگر بردار $\mathbf{a} = (۱,-۱,m)$ با محور zها زاویه‌ی ۴۵ درجه بسازد، کسینوس زاویه‌ی این بردار با محور x ها کدام است؟

(خارج از کشور – ۸۵)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

پاسخ:

$$\cos\gamma = \frac{a_۳}{|\mathbf{a}|} \xrightarrow{\gamma=۴۵^\circ} \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{m}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲+m^۲}}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} \frac{۱}{۲} = \frac{m^۲}{m^۲+۲} \Rightarrow m^۲+۲ = ۲m^۲ \Rightarrow m^۲ = ۲, \cos\alpha = \frac{a_۱}{|\mathbf{a}|} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{۱}{\sqrt{m^۲+۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲+۲}} = \frac{۱}{۲}$$

مساحت مثلث ساخت شده روی بردار: مساحت مثلث ساخته شده روی بردارهای $\mathbf{a} = (\mathbf{a_۱},\mathbf{a_۲},\mathbf{a_۳})$ و $\mathbf{b} = (\mathbf{b_۱},\mathbf{b_۲},\mathbf{b_۳})$ برابر است با (S نماد مساحت):

$$S = \frac{۱}{۲}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$$

تست ۲. مساحت مثلث ABC، با سه رأس $A = (۱,-۲,۳)$ و $B = (۲,۰,۱)$ و $C = (-۳,۲,۱)$، کدام است؟

(سراسری ریاضی – ۸۹)

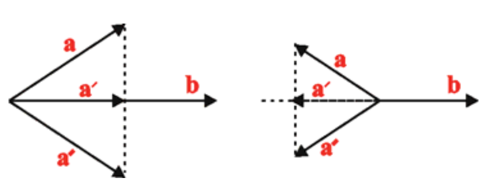
۱) $\sqrt{۳۵}$ ۲) $\sqrt{۴۲}$ ۳) $\sqrt{۵۴}$ ۴) $\sqrt{۶۵}$

پاسخ: در آغاز دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را و در ادامه مساحت را می‌یابیم:

$$\overrightarrow{AB} = (۱,۲,-۲)\ ,\ \overrightarrow{AC} = (-۴,۴,-۲)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} == (۴,۱۰,۱۲) \Rightarrow S = \frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{۱}{۲}|(۴,۱۰,۱۲)| = \frac{\sqrt{۴^۲+۱۰^۲+۱۲^۲}}{۲} = \sqrt{۶۵}$$

تصویر یک بردار نسبت به امتداد برداری ناصفر: تصویر قائم بردار a نسبت به امتداد بردار ناصفر b که آن را با $\mathbf{a'}$ نمایش می‌دهیم، برابر است با: $\mathbf{a'} = \frac{\mathbf{a.b}}{|\mathbf{b}^۲|}\mathbf{b}$ (نمودارهای زیر). اگر $\mathbf{a''}$ قرینه‌ی a نسبت به راستای b باشد، آن‌گاه $\mathbf{a''} = \frac{۲\mathbf{a.b}}{|\mathbf{b}^۲|}\mathbf{b} - \mathbf{a}$.



تست ۳. قرینه‌ی بردار a نسبت به امتداد بردار $۲\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ برداری به تصاویر (۵ و ۲- و ۱) است. تصاویر بردار a کدام است؟

(خارج از کشور – ۸۹)

۱) $(-۱,۵,۲)$ ۲) $(۲,۵,-۱)$ ۳) $(۵,-۱,-۲)$ ۴) $(۵,-۲,۱)$

پاسخ: از روی شکل‌های بالا هم روشن است که جمع $\mathbf{a}$ و $\mathbf{a''}$ (قرینه‌ی $\mathbf{a}$ نسبت به امتداد $\mathbf{b}$) برداری است موازی با $\mathbf{b}$. اگر $\mathbf{a}=(\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{a_3})$، پس باید داشته باشیم: $(\mathbf{a}+\mathbf{a''})\parallel \mathbf{b} \Rightarrow (\mathbf{a_1}+1,\mathbf{a_2}-2,\mathbf{a_3}+5)\parallel(2,-1,1)$

و تنها مختصات بردار گزینه‌ی سوم در این توازی صدق می‌کند.

توجه: اگر $\mathbf{a}$ بردار مفروضی باشد، آن‌گاه $\mathbf{a}.\mathbf{a}=|\mathbf{a}|^2$. در نتیجه می‌توانیم بنویسیم:

$$|\mathbf{a}\pm\mathbf{b}|^2=(\mathbf{a}\pm\mathbf{b}).(\mathbf{a}\pm\mathbf{b})=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2\pm 2\mathbf{a}.\mathbf{b}$$

برابری بالا برای هر سه بردار $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و c هم همواره برقرار است.

تست ۴. سه بردار $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و c با اندازه‌های ۳، ۴ و ۷ واحد، در رابطه‌ی $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0$ صدق می‌کنند. مقدار $\mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{b}.\mathbf{c}+\mathbf{c}.\mathbf{a}$ کدام است؟ (خارج از کشور – ۸۷)

۱) -37 ۲) -19 ۳) 19 ۴) 37

پاسخ:

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2=|0|^2\Rightarrow|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2+2(\mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{b}.\mathbf{c}+\mathbf{c}.\mathbf{a})=0\Rightarrow 3^2+4^2+7^2+2(\mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{b}.\mathbf{c}+\mathbf{c}.\mathbf{a})=0\Rightarrow \mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{b}.\mathbf{c}+\mathbf{c}.\mathbf{a}=-37$$

فصل مشترک دو صفحه‌ی متقاطع: اگر دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، به‌ترتیب بردارهای عمود بر صفحات $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ باشند (بردارهای نرمال $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ باشند) آن‌گاه خط فصل مشترک این دو صفحه‌ی متقاطع، با بردار $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ موازی است.

فاصله‌ی نقطه از خط: اگر $\mathbf{P}$ نقطه‌ای بیرون از خط $\mathbf{L}$ باشد، آن‌گاه فاصله‌ی $\mathbf{P}$ از L به کمک فرمول زیر به‌دست می‌آید که در آن $\mathbf{P_0}$ نقطه‌ی دلخواهی روی $\mathbf{L}$ است و n بردار نرمال $\mathbf{Q}$ و $\mathbf{u}$ بردار هادی خط $\mathbf{L}$:

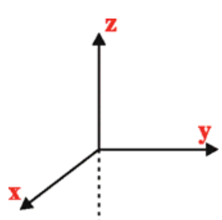
$$\mathbf{D}=\frac{|\overrightarrow{\mathbf{P_0P}}\times\mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|}$$

تست ۵. فاصله‌ی نقطه‌ای به مختصات (۲ و ۱ و ۱) از فصل مشترک دو صفحه به معادلات $\mathbf{x}+2\mathbf{y}=0$ و $2\mathbf{x}-\mathbf{y}=0$ کدام است؟ (سراسری ریاضی – ۸۰)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) 2 ۴) 3

پاسخ: بردارهای $\mathbf{a}=(1,2,0)$ و $\mathbf{b}=(2,-1,0)$ به‌ترتیب بردارهای نرمال صفحات نخست و دوم هستند، پس بردار هادی خط فصل مشترک (بردار $\mathbf{u}$) موازی $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ خواهد بود. داریم: $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(1,2,0)\times(2,-1,0)=(0,0,-5)\Rightarrow\mathbf{u}=(0,0,1)$

پس به ازای هر نقطه‌ی دلخواه $(\mathbf{x_0},\mathbf{y_0},\mathbf{z_0})$ معادله‌ی فصل مشترک برابر می‌شود با $\mathbf{z}=\mathbf{z_0}$، یعنی محور zها. از آن‌جا که فاصله‌ی هر نقطه مانند $(\mathbf{x_0},\mathbf{y_0},\mathbf{z_0})$ از محور zها برابر $\sqrt{\mathbf{x_0^2}+\mathbf{y_0^2}}$ است، بنابراین فاصله‌ی نقطه‌ی $(1,1,2)$ از فصل مشترک برابر $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ می‌شود.



تست ۶. فاصله‌ی دو خط به معادلات $\mathbf{D}:\frac{\mathbf{x}-1}{1}=\frac{\mathbf{y}+1}{-1}=\frac{\mathbf{z}}{2}$ و $\mathbf{D'}:\frac{\mathbf{x}}{2}=\frac{\mathbf{y}}{-2}=\frac{\mathbf{z}-1}{4}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی – ۸۹)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) 2 ۴) 3

پاسخ: خط D موازی با بردار $u_D=(1,-1,2)$ و خط D' موازی با بردار $u_{D'}=(2,-2,4)$ است و چون $u_D \parallel u_{D'}$ پس $D \parallel D'$. نقطه‌ی $P(1,-1,0)$ روی D و نقطه‌ی $P_0(0,0,1)$ روی D' را در نظر می‌گیریم. با توجه به این‌که هر دو خط موازی u_D هستند و به کمک فرمول فاصله‌ی نقطه از خط خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{P_0P}=(1,-1,-1),\ \overrightarrow{P_0P}\times u_D=(1,-1,-1)\times(1,-1,2)=(-3,-3,0)$$

$$\text{فاصله‌ی } P \text{ از } D' = \frac{\left|\overrightarrow{P_0P}\times u_D\right|}{|u_D|}=\frac{|(-3,-3,0)|}{|(1,-1,2)|}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

اندازه‌ی مماس رسم شده از یک نقطه‌ی بیرون دایره: اگر $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادله‌ی یک دایره و $A(x_0,y_0)$ نقطه‌ای بیرون این دایره باشد، آن‌گاه اندازه‌ی مماس رسم شده بر دایره از نقطه‌ی A برابر است با $\sqrt{x_0^2+y_0^2+ax_0+by_0+c}$.

تست ۷. طول قطعه‌ی مماسی که از نقطه‌ی $A(4,1)$ بر دایره‌ای به معادله‌ی $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ رسم شود، برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی – ۸۴)

۱) ۳　　۲) ۴　　۳) ۵　　۴) $2\sqrt{3}$

پاسخ:

$$\text{اندازه‌ی مماس}=\sqrt{4^2+1^2-2(4)+4(1)+3}=\sqrt{17-8+4+3}=\sqrt{16}=4$$

توجه: هرگاه دایره‌ای بر یک خط مفروض مماس باشد، فاصله‌ی مرکز دایره تا آن خط، برابر با شعاع دایره است.

تست ۸. مرکز دایره‌ای بر روی نیم‌ساز ناحیه‌ی اول است. اگر این دایره از نقطه‌ی $A=(6,3)$ گذشته و بر خط به معادله‌ی $y=2x$ مماس شود، شعاع آن کدام است؟ (سراسری ریاضی – ۹۲)

۱) $\sqrt{5}$　　۲) $\sqrt{6}$　　۳) $2\sqrt{2}$　　۴) $\sqrt{10}$

پاسخ: چون مرکز دایره روی نیم‌ساز ناحیه‌ی اول است، پس به‌صورت $w(\alpha,\alpha)$ است که در آن $\alpha>0$. فاصله‌ی w تا خط مماس بر دایره برابر با شعاع است، پس به کمک فرمول فاصله‌ی نقطه‌ی (x_0,y_0) از خط $ax+by+c=0$، یعنی $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ خواهیم داشت (R شعاع دایره): $R=\frac{|2\alpha-\alpha|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$، اما چون دایره از $A(6,3)$ هم می‌گذرد پس فاصله‌ی A و w هم برابر با R است و در نتیجه:

$$R=\frac{|\alpha|}{\sqrt{5}}=\sqrt{(6-a)^2+(3-\alpha)^2}\xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}}\frac{\alpha^2}{5}=(6-\alpha)^2+(3-\alpha)^2$$

$$\Rightarrow 5(36+\alpha^2-12\alpha+9-6\alpha+\alpha^2)=\alpha^2\Rightarrow 9\alpha^2-90\alpha+225=0$$

$$\xrightarrow{\div 9}\alpha^2-10\alpha+25=0\Rightarrow(\alpha-5)^2\Rightarrow\alpha=5\Rightarrow R=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

نکته: در هر بیضی بزرگ‌ترین قطر با اندازه‌ی $2a$ و کوچک‌ترین قطر با اندازه‌ی $2b$ است که در آن a و b از روی معادله‌های بیضی قائم و افقی به‌دست می‌آیند: بیضی قائم: $\frac{(y-\beta)^2}{a^2}+\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1$ ، بیضی افقی: $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$

تست ۹. اگر $x^2+ay^2-2x+a-3=0$ معادله ی یک بیضی قائم (قطر بزرگ موازی محور yها) باشد، مجموعه‌ی مقادیر a به کدام صورت است؟ (خارج از کشور – ۸۵)

۱) $0<a<1$　　۲) $0<a<4$　　۳) $1<a<3$　　۴) $1<a<4$

پاسخ: برای این‌که در این معادله a را با aی مربوط به بیضی (اندازه‌ی نیم‌قطر) اشتباه نگیریم، ابتدا a را a' تبدیل می‌کنیم و سپس با دسته‌بندی مسئله را حل می‌نماییم: $x^2+a'y^2-2x+a'-3=0$

$$\Rightarrow(x-1)^2-1+a'y^2+a'-3=0\Rightarrow(x-1)^2+a'y^2=4-a'\Rightarrow\frac{(x-1)^2}{4-a'}+\frac{y^2}{\frac{4-a'}{a'}}=1$$

اکنون باید هر سه شرط $4-a'>0$، $\frac{4-a'}{a'}>0$ و $\frac{4-a'}{a'}>4-a'$ (شرط بیضی قائم) برقرار شوند. در نتیجه، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 4-a'>0 \\ \frac{4}{a'}-1>0 \\ \frac{4-a'}{a'}>4-a' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<a'<4 \\ a'^2-5a'+4>0 \xrightarrow{\text{مقادیر خارج از ریشه‌ها}} a'>4 \quad \text{یا} \quad a'<1 \end{cases}$$

با اشتراک‌گیری از این فاصله‌ها به دست می‌آید که $0<a'<1$ که در گزینه‌ی (۱) مشاهده می‌شود.

توجه: بنابر تعریف، مجموع فاصله‌های هر نقطه روی یک بیضی از دو کانون آن، برابر مقدار ثابت $2a$ است.

تست ۱۰. در بیضی به معادله‌ی $3x^2+4y^2+18x-16y=5$، مجموع فواصل هر نقطه‌ی بیضی از دو کانون آن، کدام است؟

(سراسری ریاضی - ۹۳)

۱) $4\sqrt{2}$ ۲) ۶ ۳) $4\sqrt{3}$ ۴) ۸

پاسخ:

$$3x^2+4y^2+18x-16y=5 \Rightarrow 3(x^2+6x)+4(y^2-4y)=5$$
$$\Rightarrow 3\left[(x+3)^2-9\right]+4\left[(y-2)^2-4\right]=5 \Rightarrow 3(x+3)^2+4(y-2)^2=48$$
$$\Rightarrow \frac{(x+3)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{12}=1 \Rightarrow a^2=16, a=4 \Rightarrow \text{مجموع فواصل هر نقطه از کانون‌ها} = 2a = 8$$

تعریف. سهمی مکان هندسی همه‌ی نقاطی از صفحه است که از یک خط ثابت Δ در آن صفحه و یک نقطه‌ی ثابت F در همان صفحه (بیرون از خط Δ) به یک فاصله باشند. نقطه‌ی F را کانون و خط Δ را **خط هادی** سهمی می‌نامیم.

نکته. در هر سهمی فاصله‌ی کانون تا خط هادی برابر $2|a|$ است که a پارامتر سهمی در معادله‌اش (به یکی از دو صورت زیر) می‌باشد:

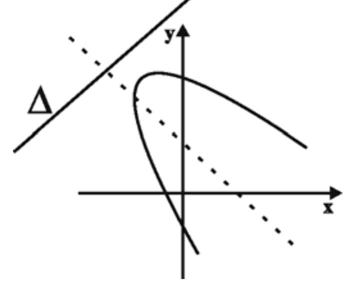
سهمی افقی: $4a(x-\alpha)=(y-\beta)^2$ ، معادله‌ی خط هادی: $x=\alpha-a$

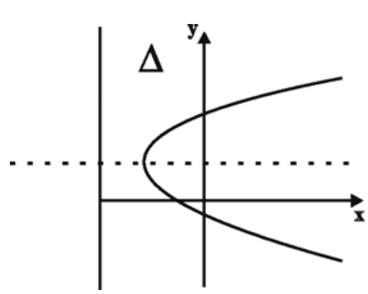
سهمی قائم: $4\alpha(y-\beta)=(x-\alpha)^2$ ، معادله‌ی خط هادی: $y=\beta-\alpha$

تست ۱۱. فاصله‌ی کانون تا خط هادی یک سهمی ۲ واحد است. این سهمی محور y ها را در دو نقطه به عرض‌های ۱ و -5 قطع می‌کند. طول رأس آن با علامت مثبت کدام است؟ (خارج از کشور - ۹۴)

۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{9}{4}$ ۴) $\frac{5}{2}$

پاسخ: چون سهمی موردنظر در دو نقطه محور y ها را قطع می‌کند، پس به یکی از دو شکل زیر است؛ از آن‌جا که در این سؤال نظر طراح سهمی مایل نبوده است (و باید این را قید می‌کرد!) پس سهمی را قائم درنظر می‌گیریم و چون دنبال طول رأس سهمی با علامت مثبت هستیم، در نتیجه سهمی ما باید افقی باشد و رو به چپ باز شود (یعنی $a<0$ باشد). داریم:





فاصله‌ی کانون تا خط هادی $= ۲|a| \xrightarrow{a<۰} -۲a = ۲ \Rightarrow a = -۱$

معادله‌ی محور سهمی $= \dfrac{\text{مجموع عرض‌های نقاط برخورد}}{۲} \Rightarrow$ معادله‌ی محور سهمی $y = \dfrac{۱-۵}{۲} = -۲ \Rightarrow$ رأس سهمی $= (\alpha, -۲)$

معادله‌ی سهمی افقی : $۴a(x-\alpha) = (y-\beta)^۲ \xrightarrow{\alpha=-۱,\ \beta=-۲} -۴(x-\alpha) = (y+۲)^۲$

$\xrightarrow{\text{نقطه‌ی (۱ و ۰) روی سهمی است}} -۴(۰-\alpha) = (۱+۲)^۲ \Rightarrow \alpha = \dfrac{۹}{۴}$

توجه. درباره‌ی هذلولی، بهتر است مطالب زیر را به خاطر داشته باشیم:

معادله‌ی هذلولی افقی : $\dfrac{(x-\alpha)^۲}{a^۲} - \dfrac{(y-\beta)^۲}{b^۲} = ۱$، معادله‌ی مجانب‌ها : $y - \beta = \pm\dfrac{b}{a}(x-\alpha)$

معادله‌ی هذلولی قائم : $\dfrac{(y-\beta)^۲}{a^۲} - \dfrac{(x-\alpha)^۲}{b^۲} = ۱$، معادله‌ی مجانب‌ها : $y - \beta = \pm\dfrac{a}{b}(x-\alpha)$

در هر دو حالت $c^۲ = a^۲ + b^۲$ است و در نتیجه $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{۱ + \dfrac{b^۲}{a^۲}}$؛ مرکز هذلولی نقطه‌ی برخورد مجانب‌هاست.

نکته. بنابر تعریف، قدر مطلق تفاضل فاصله‌های هر نقطه روی هذلولی، از دو کانون آن، برابر مقدار ثابت $۲a$ است.

تست ۱۲. در هذلولی به کانون‌های $F(۱+\sqrt{۵}, -۲)$ و $F'(۱-\sqrt{۵}, -۲)$، فاصله‌ی دو رأس آن برابر ۲ واحد است. معادله‌ی مجانب آن با شیب منفی، کدام است؟ (خارج از کشور - ۹۳)

۱) $۲y + x = ۰$ ۲) $y + ۲x = ۰$ ۳) $y + ۲x = ۱$ ۴) $۲y + x = -۳$

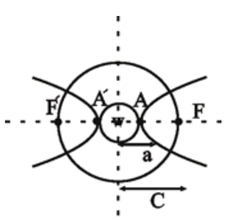
پاسخ: مرکز هذلولی نقطه‌ی وسط F و F' است، پس $\omega = (\dfrac{x_F + x_{F'}}{۲}, \dfrac{y_F + y_{F'}}{۲}) = (۱, -۲)$ ؛ از آن جا که F و F' عرض‌های یکسانی دارند، می‌گیریم هذلولی افقی است و شیب مجانب‌ها برابر است با $\pm\dfrac{b}{a}$. با توجه به این‌که فاصله‌ی دو رأس برابر $۲a$ است و در این‌جا $۲a = ۲$ خواهیم داشت: $۲c = |FF'| \Rightarrow ۲c = \left|۱+\sqrt{۵} - (۱-\sqrt{۵})\right| = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow c = \sqrt{۵}$

$b = \sqrt{c^۲ - a^۲} = \sqrt{۵-۱} = ۲ \Rightarrow$ معادله‌ی مجانب با شیب منفی : $y - (-۲) = -\dfrac{۲}{۱}(x-۱) \Rightarrow$ معادله‌ی مجانب مطلوب : $y + ۲x = ۰$

تست ۱۳. مساحت بین دو دایره یکی به قطر فاصله‌ی دو رأس و دیگری به قطر فاصله‌ی دو کانون هذلولی به معادله‌ی $۹x^۲ - ۴y^۲ - ۱۸x - ۸y = ۳۱$ کدام است؟ (خارج از کشور - ۹۱)

۱) ۴π ۲) ۵π ۳) ۶π ۴) ۹π

پاسخ: اگر دو دایره‌ی هم‌مرکز به شعاع $r_۱$ و $r_۲$ داشته باشیم، مساحت بین آن برابر با $\pi|r_۱^۲ - r_۲^۲|$ می‌شود. در این جا هم باید c و a را بیابیم و سپس مساحت را، داریم:



$۹x^۲ - ۴y^۲ - ۱۸x - ۸y = ۳۱ \Rightarrow ۹\left[(x-۱)^۲ - ۱\right] - ۴\left[(y+۱)^۲ - ۱\right] = ۳$

$\Rightarrow ۹(x-۱)^۲ - ۴(y+۱)^۲ = ۳۶ \Rightarrow \dfrac{(x-۱)^۲}{۴} - \dfrac{(y+۱)^۲}{۹} = ۱$

$\Rightarrow a^۲ = ۴, b^۲ = ۹, c^۲ = a^۲ + b^۲ = ۱۳$

مساحت میان دو دایره $= \pi(c^۲ - a^۲) = ۹\pi$

دوران محورهای مختصات. اگر محورهای مختصات را به اندازه‌ی θ درجه در جهت مثلثاتی دوران دهیم، آن‌گاه نقطه‌ی $A(x,y)$ در دستگاه جدید دارای مختصات $A'(x',y')$ می‌شود که با روابط زیر به هم مربوط هستند:

$$\begin{cases} x=(\cos\theta)x'-(\sin\theta)y' \\ y=(\sin\theta)x'+(\cos\theta)y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس دوران}} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

نکته. زاویه‌ی دوران مناسب برای این‌که مقطع مخروطی به معادله‌ی $ax^۲+bxy+cy^۲+dx+ey+f=۰$، به فرم استاندارد (بدون جمله‌ی xy) درآید، از رابطه‌ی $\tan ۲\theta=\frac{b}{a-c}$ $(۰\le\theta\le\frac{\pi}{۲})$ به دست می‌آید.

تست ۱۴. فاصله‌ی دو کانون مقطع مخروطی به معادله‌ی $xy+\sqrt{۲}x=۱$ کدام است؟ (سراسری ریاضی-۸۳)

۱) $\sqrt{۲}$　۲) ۲　۳) $۲\sqrt{۲}$　۴) ۴

پاسخ: در آغاز کار، معادله‌ی مقطع مخروطی را به صورت استاندارد درمی‌آوریم و سپس فاصله‌ی کانونی را می‌یابیم. داریم:

$$\tan ۲\theta=\frac{b}{a-c} \xrightarrow[b=\sqrt{۲}]{a=c=۰} \tan ۲\theta=\frac{\sqrt{۲}}{۰}=\infty=\tan\frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x=(\cos\frac{\pi}{۴})x'-(\sin\frac{\pi}{۴})y'=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x'-y') \\ y=(\sin\frac{\pi}{۴})x'+(\cos\frac{\pi}{۴})y'=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x'+y') \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در معادله‌ی داده شده}} \underbrace{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x'-y')\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x'+y')}_{xy}+\sqrt{۲}\,(\underbrace{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x'+y')}_{x})=۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}(x'^۲-y'^۲)+x'-y'=۱ \xrightarrow{\times ۲} x'^۲-y'^۲+۲x'-۲y'=۲$$

$$\Rightarrow (x'+۱)^۲-۱-\left[(y'+۱)^۲-۱\right]=۲ \Rightarrow \frac{(x'+۱)^۲}{۲}-\frac{(y'+۱)^۲}{۲}=۱$$

که معادله‌ی یک هذلولی با مشخصات $a^۲=b^۲=۲$ است. فاصله‌ی دو کانون برابر است با: $۲c=۲\sqrt{a^۲+b^۲}=۲\sqrt{۴}=۴$

چند نکته درباره‌ی محاسبه‌ی دترمینان‌ها که همواره باید به خاطر داشته باشیم:

۱) اگر A یک ماتریس ۳×۳ باشد و $\lambda\in\mathbb{R}$، آن‌گاه $|\lambda A|=\lambda^۳|A|$.

۲) اگر A یک ماتریس ۳×۳ باشد و جای دو سطر (ستون) را عوض کنیم، آن‌گاه دترمینان ماتریس جدید، قرینه‌ی دترمینان A است.

۳) اگر در ماتریس ۳×۳ مانند A، یک سطر (ستون) مضربی (از یک سطر (ستون) دیگر باشد آن‌گاه $|A|=۰$.

۴) اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد که سطر iام آن به صورت $b_{i۱}+c_{i۱}\quad b_{i۲}+c_{i۲}\quad b_{i۳}+c_{i۳}$ است، و اگر B و C ماتریس‌هایی ۳×۳ باشند که همه‌ی سطرهایشان، به‌جز احتمالا سطر iام، با سطرهای A برابرند آن‌گاه $|A|=|B|+|C|$ (قانون برای ستون‌ها هم برقرار است.) در این‌جا درایه‌های سطر iام B و C به ترتیب b_{ij} و c_{ij} اند.

۵) اگر مضربی از یک سطر (ستون) را به سطر (ستون) دیگری بیفزائیم، آن‌گاه مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند.

۶) $|A^t|=|A|$.

تست ۱۵. در دترمینان $\begin{vmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ ۱ & a & -۳ \\ -۲ & ۲ & ۴ \end{vmatrix}$ اگر به عنصر واقع در سطر سوم و ستون سوم ۴ واحد اضافه شود و مقدار دترمینان تغییر نکند، آن‌گاه a برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۷۹)

۱) $-\frac{۲}{۳}$　۲) $-\frac{۳}{۲}$　۳) $\frac{۱}{۳}$　۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: طبق داده‌ی سؤال باید داشته باشیم (طبق ویژگی ۴ یا همان قانون تفکیک):

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ -۳ & a & ۱ \\ ۴ & ۲ & -۲ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ -۳ & a & ۱ \\ ۴ & ۲ & ۴-۲ \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ -۳ & a & ۱ \\ ۴ & ۲ & -۲ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ -۳ & a & ۱ \\ ۴ & ۲ & -۲ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ -۳ & a & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ -۳ & a & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{vmatrix} = ۰ \xrightarrow{\text{بسط نسبت به سطر سوم}} ۴\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ -۳ & a \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow ۴(۲a-(-۳)) = ۰ \Rightarrow ۲a+۳=۰ \Rightarrow a = -\frac{۳}{۲}$$

تست ۱۶. از تساوی $\begin{vmatrix} ab & bc & ca \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ c(a+b) & a(b+c) & b(a+c) \end{vmatrix}$ کدام نتیجه‌گیری درست است؟ (سراسری ریاضی - ۸۱)

۱) $abc = ۰$ ۲) c,b,a اعدادی دلخواه‌اند.

۳) $a+b+c=۰$ ۴) $ab+ac+bc=۰$

پاسخ: سطرهای نخست و سوم را با هم جمع می‌کنیم (سطر سوم را به سطر اول می‌افزائیم) داریم:

$$\begin{vmatrix} ab & bc & ca \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ c(a+b) & a(b+c) & b(a+c) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ab+ac+bc & ab+bc+ca & ca+ba+bc \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ c(a+b) & a(b+c) & b(a+c) \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{فاکتورگیری در سطر اول}}{=} (ab+ac+bc)\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ c(a+b) & a(b+c) & b(a+c) \end{vmatrix} \underset{\text{دو سطر برابر هستند}}{=} (ab+ac+bc)\times ۰ = ۰$$

پس c,b,a هرچه باشند حاصل دترمینان برابر صفر است (گزینه‌ی ۲)

نکته. هر ماتریس مربعی A را می‌توان به صورت زیر، به فرم مجموع یک ماتریس متقارن با یک ماتریس پاد متقارن نوشت:

$$A = \underbrace{\frac{۱}{۲}(A+A^t)}_{\text{متقارن}} + \underbrace{\frac{۱}{۲}(A-A^t)}_{\text{پاد متقارن}}$$

تست ۱۷. ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۲ & ۵ & ۴ \\ -۳ & ۶ & -۱ \end{bmatrix}$ به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پاد متقارن نوشته شده است. دترمینـان ماتریس متقارن کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۹۰)

۱) -۳۰ ۲) -۲۰ ۳) ۲۰ ۴) ۳۰

پاسخ: $A = \frac{۱}{۲}(A+A^t) + \frac{۱}{۲}(A-A^t)$

$$\text{ماتریس متقارن} = \frac{۱}{۲}(A+A^t) = \frac{۱}{۲}\left(\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۲ & ۵ & ۴ \\ -۳ & ۶ & -۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & -۳ \\ ۲ & ۵ & ۶ \\ ۳ & ۴ & -۱ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۵ \\ ۰ & ۵ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{بسط نسبت به سطر اول}} \left|\frac{۱}{۲}(A+A^t)\right| = \begin{vmatrix} ۵ & ۵ \\ ۵ & -۱ \end{vmatrix} = -۵-(۵\times۵) = -۳۰$$

نکته. ماتریس مربعی A وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر $|A| \neq ۰$

تست ۱۸. اگر $A = \begin{vmatrix} ۱ & a & ۰ \\ -۲ & ۳ & ۱ \end{vmatrix}$، به ازای کدام مقدار a ماتریس $A.A^t$ وارون‌پذیر است؟ (سراسری ریاضی - ۸۷)

۱) ۲ ۲) ۶- ۳) هر مقدار a ۴) هیچ مقدار a

پاسخ:

$$\mathbf{A.A^t}=\begin{bmatrix}۱ & \mathbf{a} & ۰\\ -۲ & ۳ & ۱\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ \mathbf{a} & ۳\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱+\mathbf{a}^۲ & ۳\mathbf{a}-۲\\ ۳\mathbf{a}-۲ & ۱۴\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{شرط وارون‌پذیری}}\left|\mathbf{A.A^t}\right|\neq ۰\Rightarrow ۱۴(۱+\mathbf{a}^۲)-(۳\mathbf{a}-۲)^۲=۵\mathbf{a}^۲+۱۲\mathbf{a}+۱۰\neq ۰$$

از آن‌جا که مقدار Δی عبارت $۵\mathbf{a}^۲+۱۲\mathbf{a}+۱۰$ برابر با $\Delta=۱۴۴-۲۰۰<۰$ است و ضریب $\mathbf{a}^۲$ مثبت، پس عبارت موردنظر همواره مثبت است، و به ویژه ناصفر می‌باشد. یعنی برای هر $\mathbf{a}$، ماتریس $\mathbf{A.A^t}$ وارون‌پذیر است.

تست ۱۹. اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ ماتریس‌های وارون‌پذیر و λ یک عدد حقیقی باشد، کدام گزینه در مورد دترمینان آن‌ها نادرست است؟

(سراسری ریاضی - ۹۱)

۱) $\left|\mathbf{A}^{-۱}\right|=\left|\mathbf{A}\right|^{-۱}$ ۲) $\left|\mathbf{AB}\right|=\left|\mathbf{BA}\right|$ ۳) $\left|\lambda\mathbf{A}\right|=\lambda\left|\mathbf{A}\right|$ ۴) $\left|\mathbf{AB}^{-۱}\right|=\left|\mathbf{A}\right|\left|\mathbf{B}^{-۱}\right|$

پاسخ: به یاد داشته باشید که برابری‌های اول، دوم و چهارم همواره درست هستند ولی صورت درست برابری سوم (با فرض این‌که $\mathbf{A_{n\times n}}$ باشد) به فرم $\left|\lambda\mathbf{A}\right|=\lambda^{\mathbf{n}}\left|\mathbf{A}\right|$ می‌باشد که در نکته‌ی شماره‌ی (۱) مربوط به دترمینان آن را بیان کردیم.

توجه. در یک دستگاه معادله‌ی خطی ۳×۳، که عبارت است از معادله‌ی سه صفحه، نکات مهم زیر را داریم:

۱) اگر سه صفحه برهم منطبق باشند یا دو صفحه برهم منطبق باشند و صفحه‌ی سوم، آن‌ها را قطع کند، دستگاه دارای بی‌شمار جواب است (در این حالت دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه برابر صفر است)؛

۲) اگر سه صفحه، دو به دو متمایز باشند ولی همگی فصل مشترک یکسانی داشته باشند، آن‌گاه دستگاه دارای بی‌شمار جواب است (در این حالت دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه برابر صفر است).

۳) اگر دو صفحه موازی و متمایز باشند یا هر سه صفحه موازی و متمایز باشند، دستگاه جواب ندارد. (در این حالت هم دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه برابر صفر است).

۴) اگر سه صفحه، دو به دو متقاطع باشند ولی فصل مشترک‌ها برهم منطبق نباشند، دستگاه جواب ندارد. (در این حالت هم دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه برابر صفر است).

۵) اگر دترمینان ماتریس ضرایب، ناصفر باشد آن‌گاه دستگاه جواب یکتا دارد و هر ۳ صفحه گذرا بر یک نقطه‌اند.

تست ۲۰. سه صفحه با معادله‌های ماتریسی $\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۱\\ ۱ & -۱ & -۲\\ ۵ & -۲ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\\ \mathbf{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\ ۷\\ ۴\end{bmatrix}$ داده شده‌اند. فصل مشترک‌های دوبه‌دوی این صفحه‌ها چگونه‌اند؟

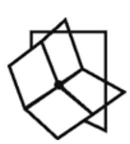
(سراسری ریاضی - ۸۲)

۱) فقط گذرا بر یک نقطه ۲) منطبق بر هم

۳) هر سه موازی هم ۴) فاقد نقطه‌ی مشترک

پاسخ: در آغاز، دترمینان ماتریس ضرایب را به دست می‌آوریم. داریم:

$$\begin{vmatrix}۲ & ۱ & ۱\\ ۱ & -۱ & -۲\\ ۵ & -۲ & ۰\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{اضافه می‌کنیم}]{\text{دو برابر سطر اول را به دوم}}\begin{vmatrix}۲ & ۱ & ۱\\ ۵ & ۱ & ۰\\ ۵ & -۲ & ۰\end{vmatrix}\underset{\text{بسط نسبت به ستون سوم}}{=}\begin{vmatrix}۲ & ۱\\ ۵ & ۱\end{vmatrix}=۲-۵\neq ۰$$



پس دستگاه دارای جواب یکتا است و صفحات همگی از یک نقطه می‌گذرند. (شکل روبه‌رو)

با آرزوی پیروزی برای شما فرزندان خوب ایران زمین-نوید مجیدی