مفهوم میل کردن

فرض کنید a نقطه‌ی ثابتی روی محور x ها باشد اگر متغیر x روی محور x ها ضمن تغییراتش بتواند هر چقدر که بخواهیم به عدد a نزدیک شود بدون آن که به عدد a برسد می‌گوئیم متغیر x به عدد a میل میکند و می‌نویسیم : $x \to a$

اگر متغیر x با مقادیر بیشتر (یا کمتر) از a به a نزدیک شود می‌گوئیم متغیر x از سمت راست (یا چپ) به عدد a میل می‌کند و می‌نویسیم : $x \to a^+$ (یا $x \to a^-$)

همسایگی یک نقطه و میل کردن یک متغیر به آن نقطه

شرط آنکه در تابع f متغیر x ($x \in D_f$) بتواند با مقادیرش بیشتر (یا کمتر) از a به a میل کند، یعنی شرط آنکه $x \to a^+$ (یا $x \to a^-$) آن است که تابع f در همسایگی راست (یا چپ) نقطه‌ی a تعریف شده باشد.

توصیف حد

فرض کنید تابع f در یک همسایگی یا همسایگی محذوف نقطه‌ی a تعریف شده باشد، اگر زمانی که متغیر x با مقادیر بیشتر یا کمتر از a به عدد a نزدیک شود به عبارت دیگر اگر $x \to a$ ، آن‌گاه مقادیر $f(x)$ یعنی y تابع به عدد منحصر به فرد L نزدیک شوند، می‌گوئیم حد تابع f وقتی $x \to a$، برابر L است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

تست اگر $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\sqrt{cosx}-\sqrt{sinx})}{cos(x+\frac{\pi}{4})} = 2^a$ باشد آن‌گاه a کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۲)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\sqrt{cosx}-\sqrt{sinx})}{cos(x+\frac{\pi}{4})} \times \frac{\sqrt{cosx}+\sqrt{sinx}}{\sqrt{cosx}+\sqrt{sinx}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{cosx - sinx}{\frac{1}{\sqrt{2}}(cosx - sinx)(\sqrt{cosx}+\sqrt{sinx})} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}})}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}} = \frac{2^{1\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{-\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{4}$$

نکته: می‌دانیم:

$$1)\ \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = cosx - sinx$$

$$2)\ \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = sinx + cosx$$

$$3)\ \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = sinx - cosx$$

تست) حاصل $lim_{x\to\pi}\frac{sin(x+cosx)}{1-cos2x}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۲)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{sin(x+cosx)}{1-cos2x} = \frac{sin\ 0}{0} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

از قاعده‌ی هوپیتال استفاده می‌نمائیم:

$$\overset{Hop}{\Longrightarrow} \lim_{x\to\pi}\frac{-sinx(cos(1+cosx))}{2sin\ 2x} = \lim_{x\to\pi}\frac{-sinx(cos(1+cosx))}{2\times 2sinx\ cosx} = \frac{-1}{-2\times 2} = \frac{1}{4}$$

نکته: فرض کنید توابع f, g در یک همسایگی محذوف a مشتق‌پذیر باشند و g در هیچ نقطه‌ای از این همسایگی صفر نباشد در این صورت اگر $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ ، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

تست) حد عبارت $\left[\frac{sinx}{x}\right]+2\left[\frac{x}{sinx}\right]$ وقتی $x\to 0$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) وجود ندارد

پاسخ: همواره در همسایگی محذوف صفر داریم $\frac{sinx}{x}<1$ در نتیجه $\frac{x}{sinx}>1$ است.

$$\lim_{x\to 0}\left(\left[\frac{sinx}{x}\right]+2\left[\frac{x}{sinx}\right]\right)=[1^-]+2[1^+]=0+2=2$$

نکته: همواره در همسایگی محذوف صفر $\frac{sinx}{x}<1$ است

تست) اگر $\lim_{x\to(\frac{1}{6})^+}\frac{[4cos^2\pi x]-12x}{ax+b}=\frac{1}{2}$ باشد، آن‌گاه $a+b$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱) ۲۰- ۲) ۱۶- ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

پاسخ:

$$x\to(\frac{1}{6})^+ \implies \pi x\to(\frac{\pi}{6})^+ \implies cos^2\pi x\to(\frac{3}{4})^-$$

$$[4cos^2\pi x]=[3^-]=2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to(\frac{1}{6})^+} \frac{[4\cos^2\pi x]-12x}{ax+b} = \lim_{x\to(\frac{1}{6})^+} \frac{2-12x}{ax+b} = \frac{1}{2}$$

چون حد صورت وقتی $x \to (\frac{1}{6})^+$ صفر می‌شود و حاصل حد عددی غیری صفر است پس باید حد مخرج نیز صفر شود که حالت ابهام $\frac{0}{0}$ ایجاد شود یعنی $a\left(\frac{1}{6}\right)+b=0$ و داریم:

$$\lim_{x\to(\frac{1}{6})^+} \frac{2-12x}{ax+b} = \frac{1}{2} \overset{Hop}{\Longrightarrow} \lim_{x\to(\frac{1}{6})^+} \frac{-12}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a=-24$$

$$\frac{a}{6}+b=0 \Rightarrow \frac{-24}{6}+b=0 \Rightarrow b=4 \Rightarrow a+b=-20$$

تست) حاصل $\lim_{x\to0}([2x]+[-2x](\frac{1-\cos^2x}{1-\sqrt{1+x^2}})$ ، کدام است؟ (نماد [ ] جزء صحیح است)

(ریاضی ۹۴)

۱) ۳-　　۲) ۳　　۳) ۰　　۴) حد ندارد

پاسخ:

$$\lim_{x\to0}([2x]+[-2x](\frac{1-\cos^2x}{1-\sqrt{1+x^2}}) = \lim_{x\to0}(-1)\left(\frac{1-(1-\frac{3}{2}x^2)}{1-\sqrt{1+x^2}}\right)\times\frac{1-\cos^2x}{1-\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{-\frac{3x^2}{2}\times2}{-x^2} = 3$$

نکته: همواره داریم:

$$f(x)=[ax]+[-ax]=\begin{cases}0 & ax\in z\\ -1 & ax\notin z\end{cases}$$

نکته: همواره می‌توان نوشت:

$$\cos^m u \simeq 1-\frac{mu^2}{2}$$

نکته: اگر $x \to 0$ همواره داریم:

$$\sqrt[n]{1+x} \sim 1+\frac{x}{n} \quad \text{یا} \quad (1+x)^n \sim 1+nx$$

تست حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{tanx-sinx}{x^3}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۱)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) ۰

$$\lim_{x\to 0}\frac{tanx-sinx}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}$$

نکته: چند هم ارزی مهم مثلثاتی وقتی $x \to 0$:

1) $1-cosx \sim \frac{x^2}{2}$

2) $1-cos^m u \sim \frac{mu^2}{2}$

3) $x-sinx \sim \frac{x^3}{6}$

4) $tanx-x \sim \frac{x^3}{3}$

5) $tanx-sinx \sim \frac{x^3}{2}$

تست) حاصل $\lim_{x\to 4}\frac{1-\cos\pi x}{x-4\sqrt{x}+4}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۸۷)

۱) ۰ ۲) 4π ۳) $4\pi^2$ ۴) $8\pi^2$

پاسخ:

۱

$$\lim_{x\to 4}\frac{1-\cos\pi x}{x-4\sqrt{x}+4} = \lim_{x\to 4}\frac{2\sin^2\frac{\pi}{2}x}{(\sqrt{x}-2)^2} = 2\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{\sqrt{x}-2}\right)^2$$

$$2\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{\sqrt{x}-2}\right)^2 \overset{Hop}{\Longrightarrow} 2\lim_{x\to 4}\left(\frac{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right)^2 = 2\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{4}}\right)^2 = 8\pi^2$$

تست) حاصل عبارت $\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}$ کدام است؟ (خارج از کشور ۸۸)

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۲

پاسخ:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم} \quad \overset{Hop}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2-\sqrt{5-x}}} = -2$$

تست) اگر $f(x) = \begin{cases} ax-1 & x<1 \\ x^2+2a & x\geq 1\end{cases}$ و $\lim_{x\to 1^+} f(x) - \lim_{x\to 1^-} f(x)$ ، مقدار a کدام است؟ (ریاضی ۸۶)

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۱

پاسخ:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) - \lim_{x\to 1^-} f(x) = -1 \Rightarrow f(1^+) - f(1^-) = -1$$

$$\Rightarrow 1 + 2a - (a-1) = -1 \Rightarrow a = -3$$

تست) حاصل $lim_{x\to0}\frac{\sqrt{cosx}-\sqrt{cos3x}}{1-cosx}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۸)

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{cosx}-\sqrt{cos3x}}{1-cosx}=\lim_{x\to0}\frac{cos^{\frac{1}{2}}x-cos^{\frac{1}{2}}3x}{\frac{x^2}{2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{x^2}{2}\right)-\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{9x^2}{2}\right)}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{2x^2}{\frac{x^2}{2}}=4$$

از هم‌ارزی $\left(\underset{u\to.}{1-cos^m u\sim m\frac{u^2}{2}}\right)$ استفاده شده است.

تست) در بازه‌ی $(0,2)$ همواره $\frac{sinx}{1-x}\le f(x)\le 4tan^{-1}(x^2-2x+2)$ حاصل $lim_{x\to1}f(x)$ برابر کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۱)

۱) صفر   ۲) π ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) نامشخص

پاسخ:

$$\lim_{x\to1}\frac{sinx}{1-x}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\ \overset{Hop}{\Longrightarrow}\ \lim_{x\to1}\frac{\pi\ cos\pi x}{-1}=\pi$$

نکته: هرگاه در یک همسایگی (یا همساگی محذوف) از نقطه‌ی x داشته باشیم $g(x)\le f(x)\le h(x)$ و $lim_{x\to a}g(x)=lim_{x\to a}h(x)=L$ ، آن‌گاه $lim_{x\to a}f(x)=L$

البته باید توجه داشت این قضیه، که به قضیه‌ی ساندویچ یا فشردگی معروف است برای حدهای چپ و راست نیز برقرار است.

مثال: اگر برای هر x ، داشته باشیم $|2f(x)-3| \le (x-1)^2$ ، مطلوب است محاسبه‌ی :

$$\lim_{x\to 1}\frac{4f(x)}{2f(x)+3}$$

پاسخ:

$$|2f(x)-3| \le (x-1)^2 \ \Rightarrow\ -(x-1)^2 \le 2f(x)-3 \le (x-1)^2$$

$$\Rightarrow\ 3-(x-1)^2 \le 2f(x) \le (x-1)^2+3$$

$$\Rightarrow\ \frac{3-(x-1)^2}{2} \le f(x) \le \frac{(x-1)^2+3}{2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3-(x-1)^2}{2} = \lim_{x\to 1}\frac{3+(x-1)^2}{2} = \frac{3}{2} \ \Rightarrow\ \lim_{x\to 1} f(x) = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{4f(x)}{2f(x)+3} = \frac{4(\frac{3}{2})}{2\left(\frac{3}{2}\right)+3} = \frac{6}{6} = 1$$

مثال : حاصل $lim_{x\to 0}\, x\left[\frac{1}{x}\right]$ را محاسبه کنید.

پاسخ: می‌دانیم $x-1 < [x] \le x$ پس داریم:

$$\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x}\right] \le \frac{1}{x}$$

$$\begin{cases} \text{اگر } x>0 \Rightarrow x\left(\frac{1}{x}-1\right) < x\left[\frac{1}{x}\right] \le x\cdot\frac{1}{x} \ \Rightarrow 1-x \le x\left[\frac{1}{x}\right] \le 1 \ \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}(1-x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1 \\ \text{اگر } x<0 \Rightarrow x\left(\frac{1}{x}-1\right) > x\left[\frac{1}{x}\right] \ge x\cdot\frac{1}{x} \ \Rightarrow 1-x > x\left[\frac{1}{x}\right] > -1 \ \Rightarrow \lim_{x\to 0^-}(1-x) = \lim_{x\to 0^-} 1 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1 \\ \lim_{x\to 0^-} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{قضیه فشردگی}} \lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$$

تست در بازه‌ی $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ همواره $\frac{sin\pi x}{1-x} \le f(x) \le g(x)$ ، $lim_{x\to 1}\left(\frac{sin\pi x}{1-x}-g(x)\right)=0$ حاصل $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ برابر کدام است؟ (تجربی ۸۸)

۱) $-\pi$ ۲) ۰ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

پاسخ:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{sin\pi x}{1-x}-g(x)\right)=0 \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{sin\pi x}{1-x}-\lim_{x\to 1} g(x)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{sin\pi x}{1-x}=\lim_{x\to 1} g(x) \qquad \mathrm{I}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{sin\pi x}{1-x}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\ \overset{Hop}{\Longrightarrow}\ \lim_{x\to 1}\frac{\pi\, cos\pi x}{-1}=\pi$$

$$\mathrm{I} \Rightarrow \lim_{x\to 1} g(x)=\pi$$

بر اساس قضیه‌ی فشردگی داریم:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\pi$$

تست حد عبارت $\frac{2[x]}{2-x}+\frac{x+2}{x^2-2x}$ ، وقتی $x\to 2^-$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۲)

۱) $-\infty$ ۲) $\frac{-1}{2}$ ۳) ۱ ۴) $+\infty$

پاسخ:

$$\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{x+2}{x^2-2x}+\frac{2[x]}{2-x}\right)=\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{x+2}{x(x-2)}+\frac{2}{2-x}\right)=\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{x+2-2x}{x(x-2)}\right)=$$

$$\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{2-x}{x(x-2)}\right)=\lim_{x\to 2^-}\frac{2-x}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-1}{x}=-\frac{1}{2}$$

نکته: وقتی در عبارت گویا داشته باشیم که حاصل حد به ازای نقطه‌ی داده شده ∞ - ∞ شود برای رفع ابهام باید مخرج مشترک گرفت و عامل ابهام را که در صورت و مخرج ایجاد می‌شود ساده کرد.

تست) حاصل $lim_{x\to -4}(\frac{x+19}{x^2+3x-4}+\frac{3}{x+4})$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۸۷)

۱) $-\frac{4}{5}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ:

$$\lim_{x\to -4}\left(\frac{x+19}{x^2+3x-4}+\frac{3}{x+4}\right)=\frac{15}{0^{\pm}}+\frac{3}{0^{\pm}}=\infty-\infty$$

برای رفع ابهام مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\lim_{x\to -4}(\frac{x+19}{x^2+3x-4}+\frac{3}{x+4})$$
$$=\lim_{x\to -4}\frac{x+19+3(x-1)}{(x+4)(x-1)}=\lim_{x\to -4}\frac{4x+16}{(x+4)(x-1)}=$$
$$\lim_{x\to -4}\frac{4}{x-1}=-\frac{4}{5}$$

تست) حاصل $lim_{x\to 0}(\frac{1}{cosx-1}-\frac{1}{x})$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۸۸)

۱) $-\infty$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۰ ۴) $+\infty$

پاسخ:

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{cosx-1}-\frac{1}{x})=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{-\frac{x^2}{2}}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-2}{x^2}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-2-x}{x^2}\right)=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

تست در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ ، حاصل $lim_{x\to 0^-} f(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3})$ کدام است؟

(ریاضی خارج ۸۹)

۱) ۱- ‏ ‏ ‏ ۲) ۰ ‏ ‏ ‏ ۳) $-\infty$ ‏ ‏ ‏ ۴) موجود نیست

پاسخ:

$$\lim_{x\to 0^-} f\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0^-} f\left(\frac{x^2-1}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0^-} f\left(\frac{-1}{0^-}\right)=f(+\infty)$$

نکته: باید توجه داشته باشیم برای یافتن حد تابع در $x=0$ از جملات کم توان و برای یافتن حد تابع در بی نهایت از جملات پر توان استفاده می‌نمائیم.

تست در تابع $f(x)=\frac{2x-\sqrt{x^2+6x}}{ax-2}$ ، اگر $lim_{x\to -\infty} f(x)=3$ باشد، آنگاه $lim_{x\to 2} f(x)$ کدام است؟

(تجربی خارج ۸۹)

۱) ۰ ‏ ‏ ‏ ۲) $\frac{2}{3}$ ‏ ‏ ‏ ۳) $\frac{3}{4}$ ‏ ‏ ‏ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{2x-|x|}{ax}=3 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to -\infty}\frac{2x+x}{ax}=3 \quad\Longrightarrow\quad \frac{3}{a}=3$$

$$\Longrightarrow\quad a=1 \quad\Longrightarrow f(x)=\frac{2x-\sqrt{x^2+6x}}{ax-2}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2x-\sqrt{x^2+6x}}{x-2} \overset{Hop}{\Longrightarrow} \frac{2-\frac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x}}}{1}=\frac{3}{4}$$

تست در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{ax^n - 3x + 1}{3x^2 + x}$، اگر $lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{2}{3}$ باشد، آنگاه $f(-1)$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج ۹۱)

۱) ۲- ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{2}{3} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{ax^n - 3x + 1}{3x^2 + x} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{جملات پر توان}} \lim_{x\to\infty} \frac{ax^n}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow n = 2\ , a = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x} \Rightarrow f(-1) = \frac{2(-1)^2 - 3(-1) + 1}{3(-1)^2 + (-1)} = 3$$

نکته: چون حاصل حد در بی نهایت یک عدد حقیقی مخالف صفر است پس این عبارت گویا دارای درجه‌ی صورت و مخرج مساوی است یعنی $n = 2$ است.

تست حاصل $lim_{x\to+\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 - 9x}}{3x + \sqrt{x}}$ کدام است؟ (تجربی خارج ۸۶)

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 - 9x}}{3x + \sqrt{x}} \xrightarrow{\text{جملات پر توان}} \lim_{x\to+\infty} \frac{x - |2x|}{3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{3x} = \frac{-1}{3}$$

تست حاصل $lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{8x^3 + 2x^2} - 2x)$ کدام است؟ (ریاضی ۸۴)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{6}$

پاسخ:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{8x^3+2x^2}-2x)=\lim_{x\to\infty}\left(\left(2\times\frac{2}{24}\right)-2x\right)=\frac{1}{6}$$

تست) اگر $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-2x+3}-ax-b)=0$ باشد $a+b$ کدام است؟

(سراسری ریاضی ۸۰)

۱) ±1 ۲) ±2 ۳) ±3 ۴) ۰

پاسخ:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\left|x-\frac{2}{2}\right|-ax-b\right)=\lim_{x\to-\infty}(-x+1-ax-b)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}((-a-1)x+1-b)=0\ \Rightarrow\begin{cases}-a-1=0\Rightarrow a=-1\\ 1-b=0\ \Rightarrow b=1\end{cases}\Rightarrow a+b=0$$

تست) اگر $f(x)=\frac{2x+5}{x^2-4x+3}\ ,\ g(x)=2^x$ ، آن‌گاه $\lim_{x\to1^+}g(f(x))$ کدام است؟

(ریاضی ۸۴)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $+\infty$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ:

$$\lim_{x\to1^+}g(f(x))=\lim_{x\to1^+}2^{\frac{2x+5}{x^2-4x+3}}=\lim_{x\to1^+}2^{\frac{2x+5}{(x-1)(x-3)}}=2^{\frac{7}{0^-}}=2^{-\infty}=0$$

x		1		3	
x^2-4x+3	+	0	-	0	+

نکته: دریافتن حدود تابع اگر عدد صفر در مخرج حاصل شد باید حتماً تعیین کنیم مخرج از سمت راست به صفر نزدیک می‌شود یا از سمت چپ، برای این کار می‌توان از جدول تعیین علامت بهره برد کافیست به علامت عبارت در آن همسایگی توجه کنیم، البته می‌توان با مقداردهی به x در مخرج نیز علامت را مشخص نمود.

نکته: در استفاده از هم‌ارزی‌ها باید دقت لازم را داشته باشیم می‌دانیم : $\underset{x\to 0}{sinx \sim x}$

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-sinx}{x^3}\xRightarrow[x\to 0]{sinx\ \sim x}\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0$$ روش نادرست است

این روش نادرست است اگر همین سوال را ازروش هوپیتال (لوپیتال) استفاده نمائیم داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{3x^3}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\ \overset{Hop}{\Longrightarrow}\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{6x}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\ \overset{Hop}{\Longrightarrow}\lim_{x\to 0}\frac{cosx}{6}=\frac{1}{6}$$

یا از هم‌ارزی $\frac{x^3}{6}\sim x-sinx$ که از بسط یک لورن به دست می‌آید می‌توان استفاده کرد:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-sinx}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6}}{x^3}=\frac{1}{6}$$

$$2)\ \lim_{x\to -\infty}x(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$$

اگر از هم‌ارزی استفاده نمائیم به ابهام $0\times\infty$ می‌رسیم، به همین علت از هم‌ارزی استفاده نمی‌کنیم:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\times\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{(x^2+1-x^2+1)}{|x|+|x|}=\lim_{x\to -\infty}\frac{2x}{-2x}=-1$$

چون در پرانتز $\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$ با استفاده از هم‌ارزی به جواب صفر می‌رسیم استفاده از هم‌ارزی جایز نیست.

در مثال یک نیز وقتی به جای $sinx$ ، هم‌ارز آن x را جایگزین می‌کنیم به جواب صفر می‌رسیم پس از این هم‌ارزی جایز نیست استفاده کنیم.

موفق و پیروز باشید

عباس اسدی امیرآبادی