روش حذفی گاوس ــ جردن:

در حل دستگاه معادلات به روش حذفی با استفاده از نماد ماتریس می‌توان دستگاه مورد نظر رابه صورت ماتریس افزوده نوشت:

به عنوان مثال دستگاه $\begin{cases} ۲x_۱+۴x_۲+۶x_۳=۱۸ \\ ۴x_۱+۵x_۲+۶x_۳=۲۴ \\ ۳x_۱+x_۲-۲x_۳=۴ \end{cases}$ را می‌توان به صورت $\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۶ & : & ۱۸ \\ ۴ & ۵ & ۶ & : & ۲۴ \\ ۳ & ۱ & -۲ & : & ۴ \end{bmatrix}$ نوشت.

اکنون به معرفی چند اصطلاح می‌پردازیم. می‌دانیم که ضرب(یا تقسیم) طرفین یک معادله در عددی ناصفر معادله جدید برقراری به ما می‌دهد به علاوه با افزودن مضربی از یک معادله به معادله‌ی دیگر دستگاه ، معادله برقرار دیگری خواهیم داشت. بالاخره، اگر دو معادله یک دستگاه معادلات را با هم عوض کنیم، دستگاه هم ارزی خواهیم داشت، این سه عمل وقتی بر سطرهای ماتریس افزوده یک دستگاه معادلات اعمال شوند، اعمال سطری مقدماتی نامیده می‌شوند.

به طور خلاصه، سه عمل سطری مقدماتی اعمال شده بر ماتریس افزوده یک دستگاه معادلات عبارت‌اند از:

۱. ضرب (یا تقسیم) یک سطر در یک عدد نا صفر
۲. جمع مضربی از یک سطر با سطر دیگر
۳. تعویض دو سطر با هم

هرگاه که یکی از این اعمال را بر دستگاه انجام می‌دهیم دستگاه جدیدی به‌دست می‌آید که دقیقاً همان جواب‌ها را دارد. چنان‌چه این اعمال را بارها و به نحوی اصولی انجام دهیم در نهایت به دستگاه معادلی می‌رسیم که می‌توان آن را با معاینه حل کرد. این روش را با چند مثال خاص توضیح می‌دهیم.

مثال: دستگاهی که همیشه جواب منحصر به فرد دارد.

$$\begin{cases} ۲x-۵y+۴z=-۳ \\ x-۲y+z=۵ \\ x-۴y+۶z=۱۰ \end{cases}$$

حل:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۲ & -۵ & ۴ & -۳ \\ ۱ & -۲ & ۱ & ۵ \\ ۱ & -۴ & ۶ & ۱۰ \end{array}\right] \to \begin{array}{r} R_۲ \to R_۱ \\ ۲R_۲ - R_۱ \to R_۲ \\ R_۲ - R_۳ \to R_۳ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & -۲ & ۱ & ۵ \\ ۰ & ۱ & -۲ & ۱۳ \\ ۰ & ۲ & -۵ & -۵ \end{array}\right] \to$$

$$\begin{array}{r} ۲R_۲ + R_۱ \to R_۱ \\ \\ ۲R_۲ - R_۳ \to R_۳ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & -۳ & ۳۱ \\ ۰ & ۱ & -۲ & ۱۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳۱ \end{array}\right] \to \begin{array}{r} ۳R_۳ + R_۱ \to R_۱ \\ ۲R_۳ + R_۱ \to R_۲ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & ۰ & ۱۲۴ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۷۵ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳۱ \end{array}\right]$$

بنابراین $z=۳۱, y=۷۵, x=۱۲۴$.

مثال: دستگاهی که بیش از یک جواب دارد.

$$\begin{cases} 2x-5y+4z=-3 \\ x-2y+z=5 \\ x-3y+3z=-8 \end{cases}$$

حل:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 3 & -8 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{r} R_2 \rightarrow R_1 \\ 2R_2-R_1 \rightarrow R_2 \\ R_2-R_3 \rightarrow R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & 13 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{r} 2R_2+R_1 \rightarrow R_1 \\ \\ R_2-R_3 \rightarrow R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 31 \\ 0 & 1 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

هنگامی که یک سطر ماتریس افزوده صفر شود، دستگاه دارای بیشمار جواب است. جواب‌های این دستگاه عبارتند از:

$$\begin{cases} x-3z=31 \\ y-2z=13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=3t+31 \\ y=2t+13 \\ z=t \end{cases} \quad \text{یا} \quad \frac{x-31}{3}=\frac{y-13}{2}=z$$

مثال: دستگاهی که جواب ندارد.

$$\begin{cases} 2x-5y+4z=-3 \\ x-2y+z=5 \\ x-4y+5z=10 \end{cases}$$

حل:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 5 & 10 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{r} R_2 \rightarrow R_1 \\ 2R_2-R_1 \rightarrow R_2 \\ R_2-R_3 \rightarrow R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 13 \\ 0 & 2 & -4 & -5 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{r} 2R_2+R_1 \rightarrow R_1 \\ \\ 2R_2-R_3 \rightarrow R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 31 \\ 0 & 1 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 31 \end{array}\right]$$

تناقض ایجاد شده در سطر سوم در آخرین ماتریس نشان می‌دهد که این دستگاه جواب ندارد.

در یک دستگاه سه معادله سه مجهولی هر یک از معادلات یک صفحه را نشان می‌دهد و وجود جواب برای دستگاه معادل است با وجود نقطه‌ای مشترک روی صفحاتی که توسط سه معادله دستگاه مشخص می‌شود.

۱) اگر سه صفحه در یک نقطه متقاطع باشند دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.

در این حالت در روش گوس جردن آخرین ماتریس افزوده به فرم $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & z_0 \end{array}\right]$ است.

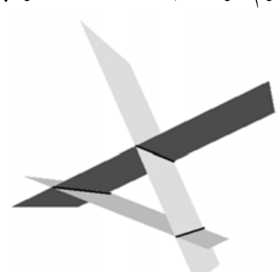
۲) اگر فصل مشترک سه صفحه یک خط باشد دستگاه بی شمار جواب دارد.

در این حالت در روش گوس جردن آخرین ماتریس افزوده به فرم $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & r \\ 0 & 1 & b & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ است.

۳) اگر سه صفحه بر هم منطبق باشند دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

در این حالت در روش گوس جردن آخرین ماتریس افزوده به فرم $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ است.

۴) اگر فصل مشترک دو صفحه با صفحه‌ی سوم موازی باشد دستگاه جواب ندارد.



در این حالت در روش گوس جردن آخرین ماتریس افزوده به فرم $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & r \\ 0 & 1 & b & s \\ 0 & 0 & 0 & t \neq 0 \end{array}\right]$ است که یک تناقض محسوب می‌شود.

۵) اگر دو تا از صفحات موازی و یکی با هر دو متقاطع باشد دستگاه جواب ندارد.

در این حالت در روش گوس جردن آخرین ماتریس افزوده به فرم $\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & a & r \\ ۰ & ۱ & b & s \\ ۰ & ۰ & ۰ & t \neq ۰ \end{array}\right]$ است.

۶) اگر سه صفحه با هم موازی و غیر منطبق باشند دستگاه بدون جواب است.

در این حالت در روش گوس جردن آخرین ماتریس افزوده به فرم $\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & a & r \\ ۰ & ۱ & b & s \\ ۰ & ۰ & ۰ & t \neq ۰ \end{array}\right]$ است.

می‌بینیم که روش گوس جردن برای حالت‌های ۴، ۵ و ۶ که در آن‌ها دستگاه جواب ندارد، وضعیت یکسانی دارد اما تفاوت بین این سه حالت در ابتدا با توجه به موازی بودن یا نبودن صفحات داده شده مشخص می‌شود.

اکنون به بررسی چند تست از کنکور سراسری می‌پردازیم که به کمک روش گوس جردن می‌توان آن‌ها را حل کرد.

سراسری **۹۳**: سه صفحه با معادله‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ & -۱ \\ ۱ & -۱۱ & ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶ \\ ۴ \\ ۲ \end{bmatrix}$ داده شده است. وضعیت فصل مشترک دو به دو صفحات نسبت به هم چگونه است؟

۱) موازی هم　　۲) منطبق بر هم　　۳) عمود بر هم　　۴) فاقد یکی از فصل مشترک‌ها

حل:گزینه ۱

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۲ & -۱ & ۱ & ۶ \\ ۱ & ۳ & -۱ & ۴ \\ ۱ & -۱۱ & ۵ & ۲ \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{r} R_۲ \rightarrow R_۱ \\ ۲R_۲ - R_۱ \rightarrow R_۲ \\ R_۲ - R_۳ \rightarrow R_۳ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۳ & -۱ & ۴ \\ ۰ & ۷ & -۳ & ۲ \\ ۰ & ۱۴ & -۶ & ۲ \end{array}\right] \rightarrow ۲R_۲ - R_۳ \rightarrow R_۳ \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۳ & -۱ & ۴ \\ ۰ & ۱ & -۳ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲ \end{array}\right]$$

تناقض ایجاد شده در سطر سوم آخرین ماتریس نشان می‌دهد که این دستگاه جواب ندارد و با توجه به این‌که این صفحات هیچ‌کدام موازی نیستند با حالت چهارم مواجه هستیم

در این حالت فصل مشترک دو به دو صفحات با هم موازی‌اند.

خارج کشور ۹۳: سه صفحه با معادله‌ی ماتریس $\begin{bmatrix} ۴ \\ ۵ \\ -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \\ ۲ & -۱ & -۴ \\ ۱ & -۸ & ۱ \end{bmatrix}$ داده شده است. وضعیت این صفحات نسبت به هم چگونه است؟

۱) فاقد نقطه‌ی مشترک
۲) هر سه صفحه گذرا بر یک خط
۳) هر سه صفحه فقط در یک نقطه مشترک
۴) فصل مشترک دوبه دوصفحات، موازی هم

حل: گزینه ۲

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۲ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۱ & -۴ & ۵ \\ ۱ & -۸ & ۱ & -۲ \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{c} ۲R_۱ - R_۲ \rightarrow R_۲ \\ R_۱ - R_۳ \rightarrow R_۳ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & ۵ & -۲ & ۳ \\ ۰ & ۱۰ & -۴ & ۶ \end{array}\right] \rightarrow ۲R_۲ - R_۳ \rightarrow R_۳ \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & ۵ & -۲ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array}\right]$$

چون سطر آخر آخرین ماتریس، صفر است با حالت دوم روبرو هستیم ، دستگاه بی‌شمار جواب دارد و هر سه صفحه گذرا بر یک خط اند.

خارج کشور ۸۷: دستگاه معادلات به صورت $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & a \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ با کدام شرایط، فاقد جواب است؟

۱) $b = ۲, a = ۱$
۲) $b \neq ۲, a = ۱$
۳) $b = ۱, a = ۲$
۴) $b \neq ۱, a = ۲$

حل: گزینه ۴

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & -۱ & a & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۳ & b \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{r} R_۱ - R_۲ \rightarrow R_۲ \\ ۲R_۲ - R_۳ \rightarrow R_۳ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & -۱ & a & ۰ \\ ۰ & -۳ & a-۱ & -۱ \\ ۰ & ۳ & -۱ & ۲-b \end{array}\right] \rightarrow R_۲ + R_۳ \rightarrow R_۳ \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & -۱ & a & ۰ \\ ۰ & -۳ & a-۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & a-۲ & ۱-b \end{array}\right]$$

برای آن‌که دستگاه فوق جواب نداشته باشد باید $a = ۲$ و $b \neq ۱$.

معکوس ماتریس‌های مربعی:

فرض کنیم ماتریس مربعی A معکوس پذیر باشد. در این‌جا به کمک اعمال سطری مقدماتی می‌خواهیم روش دیگری برای تعیین معکوس ماتریس A به‌دست آوریم. به این صورت که با اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس افزوده $[A \;\vdots\; I]$ ، سمت چپ را به ماتریس همانی تبدیل می‌کنیم در این صورت ، قسمت سمت راست ماتریس افزوده ، معکوس ماتریس A است یعنی:

$$\left[I \;\vdots\; A^{-۱}\right]$$

مثال: معکوس ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

حل:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{r} -۲R_۲ + R_۱ \rightarrow R_۱ \\ -۲R_۳ + R_۲ \rightarrow R_۲ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & -۱ & ۱ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right] \rightarrow$$

$$R_۳ + R_۱ \rightarrow R_۱ \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & -۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right] \rightarrow A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

سراسری ۹۴: اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $A^{-۱}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۱ ۴) صفر

حل: گزینه ۳

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & -۱ & ۲ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{r} ۰/۵R_۲ + R_۱ \rightarrow R_۱ \\ ۰/۵R_۲ \rightarrow R_۲ \\ \frac{۱}{۳}R_۳ \rightarrow R_۳ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۱/۵ & ۱ & ۰/۵ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۰/۵ & ۰ & ۰/۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & \frac{۱}{۳} \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\begin{matrix} -1/5R_3+R_1\to R_1 \\ 0/5R_3+R_2\to R_2 \end{matrix}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0/5 & -0/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0/5 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right] \to \qquad A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0/5 & 0/5 \\ 0 & 0/5 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

خارج کشور ۸۹: اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ معکوس ماتریس $I-A$ به صورت $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & \multicolumn{2}{c}{B} \\ 0 & & \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ است، ماتریس B کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 1 & 14 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 2 & 14 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}$

حل: گزینه ۲

$$I-A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\begin{matrix} 2R_2+R_1\to R_1 \\ 5R_3+R_2\to R_2 \end{matrix}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -14 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \quad 14R_3+R_1\to R_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 14 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

تمرین:

۱- سه صفحه با معادلات ماتریسی $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ داده شده‌اند، فصل مشترک‌های دوبه دو این سه صفحه، چگونه‌اند؟ (سراسری ۸۸)

۱) موازی هم ۲) عمود بر هم ۳) منطبق ۴) متقاطع

۲- سه صفحه با معادلات ماتریسی $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ داده شده‌اند. فصل مشترک دوبه دوی این سه صفحه چگونه‌اند؟ (خارج کشور۸۸)

۱) موازی هم ۲) منطبق بر هم ۳) عمودبر هم ۴) گذرا از یک نقطه

۳- اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$، عنصرسطر دوم و ستون سوم ماتریس $A^{-۱}$ کدام است؟ (سراسری ۸۶)

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) صفر ۳) $\frac{۹}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۴- دستگاه معادلات به صورت $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۳ \\ ۷ & ۴ & ۹ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ a \\ b \end{bmatrix}$، با کدام شرایط بی‌شمار جواب دارد؟ (خارج کشور ۸۵)

۱) $b=a+۲$ ۲) $b=a+۳$ ۳) $b=۲a+۳$ ۴) $b=۳a+۲$

۵- در روش گاوس ـ جردن ماتریس $\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۲ & -۳ & ۷ \\ ۲ & ۱ & ۳ & ۲ \\ -۱ & ۴ & ۵ & -۳ \end{array}\right]$ به صورت $\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & ۰ & a \\ ۰ & ۱ & ۰ & b \\ ۰ & ۰ & ۱ & c \end{array}\right]$ درآمده است. $a+b+c$ کدام است؟ (سراسری ۸۴)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۶- سه صفحه با معادلات ماتریسی $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۷ \\ ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & -۲ \\ ۵ & -۲ & ۰ \end{bmatrix}$ داده شده‌اند. فصل مشترک دوبه دو این سه صفحه چگونه‌اند؟ (سراسری ۸۲)

۱) فقط گذرا بر یک صفحه ۲) منطبق بر هم

۳) همه موازی هم ۴) فاقد نقطه‌ی مشترک

گردآوری از سید امیر ستوده

amirsotoudeh@yahoo.com