بچه های عزیزم ،سلام ، با تخته احتمال پیش دانشگاهی در خدمت شما هستم . با من همراه باشید:

دسته اول) احتمال شرطی: سوالاتی هستند که در صورت مساله ، یک شرط مطرح میشه ینی مثلا میگه در پرتاب یه تاس مـی دونـیم کـه تاس عدد فرد آمده است یا مثلا میگه که اگر در پرتاب تاس عدد ۲ رو نشده باشد... پس هر وقت دیدیم در صورت مـساله کلمـاتی ماننـد: میدانیم که، فرض کنید، اگر　آمد، یاد احتمال شرطی بیافتید.

خب حالا چطوری حل کنیم این سوالات رو:

سریعا شرط داده را روی فضای نمونه ای اعمال می کنیم و به فضای نمونه ای جدید می رسیم. حالا در این فضای نمونه ای جدیـد مـی ریـم دنبال پیدا کردن خواسته مساله....مثلا اگه بگه در پرتاب یه تاس می دانیم عدد زوج امده است ،فضای نمونه ای به جای $\{1,2,3,4,5,6\}$ به صورت $\{2,4,6\}$ درمیاد...

به سوال کنکور تجربی ۸۷ دقت کنید:

یک خانواده‌ی سه فرزندی با کدام احتمال، حداقل دو فرزند دختر دارد، در صورتی که می‌دانیم حداقل یکی از فرزندان، دختر است؟

۱) $\frac{3}{8}$　　۲) $\frac{5}{8}$　　۳) $\frac{3}{7}$　　۴) $\frac{4}{7}$

کلمه‌ی «می‌دانیم» به همراه جمله‌ی خبری بعد از آن، به ما می‌گوید که با احتمال شرطی روبه‌رو هستیم. می‌دانیم حداقل یکـی از فرزنـدان، دختر است. پس این خانواده سه پسر نمی‌تواند داشته باشد و فضای نمونه‌ای جدید را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم. حال بـا توجـه بـه ایـن فضای نمونه‌ای، احتمال داشتن حداقل ۲ دختر (۲ یا ۳ دختر) برابر است با:

$$S_{\text{جدید}} = \{(ددد),(ددپ),(دپد),(پدد),(دپپ),(پدپ),(پپد)\} \Rightarrow P(A)=\frac{4}{7}$$

دسته دوم) انتخاب مهره یا .... از ظرف با جایگذاری یا بدون جایگذاری

الف) با جایگذاری: در این حالت اصلا تعداد مهره های داخل ظرف تغییر نمی کند. مثلا: اگه بگه ۴مهره صورتی و ۵ مهره قرمـز داریـم و سـه مهره بخوایم با جایگذاری یکی یکی از ظرف برداریم ، احتمال اینکه اولی و دومی صورتی و سومی قرمز باشه میشه : $\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}\times\frac{5}{9}$

ب)بدون جایگذاری: در این حالت از تعداد کل مهره ها در هرمرحله یکی کم میشه، همچنین از تعداد مهرهایی کـه همرنگـشون رو خـارج کرده ایم هم در هر مرحله یکی کم میشه. مثلا اگه ۴مهره صورتی و ۵ مهره قرمز داریم و سه مهره بخوایم با جایگذاری یکـی یکـی از ظـرف برداریم ، احتمال اینکه اولی و دومی صورتی و سومی قرمز باشه میشه : $\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}$ به تست کنکور داخل ۹۱ توجه کنید:

از بین ۳ کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان به تصادف یک کارت بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم، سپس کـارت دوم را خـارج می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو کارت هم‌رنگ هستند؟

۱) $\frac{2}{7}$　　۲) $\frac{5}{14}$　　۳) $\frac{3}{7}$　　۴) $\frac{4}{7}$

هر دو کارت هم‌رنگ، یعنی هر دو سبز یا هر دو سفید باشند. داریم:

$$P=\underset{\text{کارت اول سبز}}{\frac{4}{7}}\times\overset{\text{کارت دوم سبز}}{\frac{3}{6}}+\underset{\text{کارت اول سفید}}{\frac{3}{7}}\times\overset{\text{کارت دوم سفید}}{\frac{2}{6}}=\frac{12}{42}+\frac{6}{42}=\frac{18}{42}=\frac{3}{7}$$

نکته: اگر در مساله از برخی مهره های خروجی صحبتی نشود ، فرض می کنیم آن مهره یا مهره ها اصلا انتخاب نشده اند! شتر دیدی ندیدی..

به تست کنکور سال ۹۲ توجه کنید:

در جعبه‌ای ۶ مهره‌ی سفید و ۹ مهره‌ی سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جای‌گذاری از آن بیرون می‌آوریم. بـا کـدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهره‌ی خارج‌شده سفید است؟

۱) $\frac{5}{14}$　　۲) $\frac{3}{7}$　　۳) $\frac{3}{5}$　　۴) $\frac{2}{5}$

چون به رنگ اولین مهره اشاره نشده، آن را کنار گذاشته و فکر می‌کنیم مهره‌ی اول از ابتدا انتخـاب نشـده اسـت. پس داریم:

$$P\,(\text{دومین مهره سفید باشد}) = P\,(\text{اولین مهره سفید باشد}) = \frac{6}{9+6}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$$

دسته سوم)نمودار درختی

برای اینکه بفهمین که چ مسائلی را باید از طریق نمودار درختی حل کنین یه مثال می زنم :

سوال میگه که $\frac{1}{5}$ مردان و $\frac{1}{3}$ زنان با سواد هستند، حالا یه نفرو انتخاب می کنیم با چه احتمالی اون فرد با سواد هست؟؟؟

خب اولین سوالی که باید توی ذهن تو پیش بیاد اینکه که آقا اون نفری که انتخاب کردی مرد هست یا زنه!!! خب همین فکر ینی اینکه باید مساله را در دو قسمت جداگانه حل کنی و این میشه مساله‌ی نمودار درختی ... به همین راحتی. کلا در این نوع مسائل همیشه روی شاخه های ما دو تا عبارت متضاد وجود داره، مثلا زن و مرد، بی سواد و با سواد، شاغل و بیکار، سالم و بیمار ...... به کنکور سال ۹۲ دقت کنید:

در جعبه‌ی اول ۴ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه، در جعبه‌ی دوم ۳ مهره‌ی سفید و ۶ مهره‌ی سیاه موجود است. به تصادف یکی از جعبه‌ها را انتخاب کرده و دو مهره با هم از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال هر دو مهره سفید است؟

۱) $\frac{31}{168}$ ۲) $\frac{11}{56}$ ۳) $\frac{17}{84}$ ۴) $\frac{13}{56}$

برای حل مجبوریم مسأله را به دو قسمت مختلف تفکیک کنیم (انتخاب مهره از جعبه‌ی اول یا انتخاب از جعبه‌ی دوم). پس از نمودار درختی استفاده می‌کنیم:

$\frac{1}{2}$ جعبه‌ی اول $\xrightarrow{\text{دو مهره‌ی سفید}}$ $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{\frac{4\times 3}{2}}{\frac{7\times 6}{2}} = \frac{2}{7}$

$\frac{1}{2}$ جعبه‌ی دوم $\xrightarrow{\text{دو مهره‌ی سفید}}$ $\frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{\frac{3\times 2}{2}}{\frac{9\times 8}{2}} = \frac{1}{12}$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{2}\times\frac{2}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{12} = \frac{1}{2}\overbrace{\left(\frac{2}{7}+\frac{1}{12}\right)}^{\frac{31}{84}} = \frac{1}{2}\times\frac{31}{84} = \frac{31}{168}$$

دسته چهارم) جدول توزیع احتمال

کلا بچه ها در بعضی مسائل X می بینی و بعد خود مساله بهت میگه X رو باید چه چیزی در نظر بگیری. مثلا در پرتاب دو سکه بهت میگه که X تعداد (پشت)آمدن ها است. خب تو باید ببینی که X چه اعدادی می تونه باشه، در این مثال X،تعداد پشت ها است که می تونه صفر،یک، دو باشه. بعد یه جدول می کشیم و این اعداد رو توی اون جدول می نویسیم و زیرش احتمالشو به دست می آوریم:

X	۰	۱	۲
P(X)	$\frac{\binom{2}{0}}{2^2}$	$\frac{\binom{2}{1}}{2^2}$	$\frac{\binom{2}{2}}{2^2}$

$\Rightarrow$

X	۰	۱	۲
P(X)	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$
	P(X=۰)	P(X=۱)	P(X=۲)

نکته: جمع اعداد داخل جدول همیشه برابر یک است... مثلا در مثال فوق داریم: $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=1$ به تنها سوال امده از این مبحث در کنکور ۹۱ دقت کنید:

در آزمایشگاهی ۶ موش سیاه و ۴ موش سفید موجود است. به طور تصادفی ۲ موش از بین آن‌ها خارج می‌کنیم. X تعداد موش‌های سفید خارج شده است. بیشترین مقدار در توزیع احتمال آن کدام است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{7}{15}$ ۳) $\frac{8}{15}$ ۴) $\frac{3}{5}$

طبق مسأله ۲ موش خارج کرده‌ایم و X تعداد موش‌های سفید خروجی است. پس X می‌تواند ۰، ۱ یا ۲ باشد. حال در جدول توزیع احتمال زیر، حالت‌های مختلف بیرون آمدن موش‌های سفید را بررسی می‌کنیم:

	۰ موش سفید و ۲ موش سیاه	۱ موش سفید و ۱ موش سیاه	۲ موش سفید و ۰ موش سیاه
X	۰	۱	۲
P	$\frac{\binom{4}{0}\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}}$	$\frac{\binom{4}{1}\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}}$	$\frac{\binom{4}{2}\binom{6}{0}}{\binom{10}{2}}$

فضای نمونه‌ای انتخاب ۲ موش از ۱۰=۶+۴ موش موجود است.

$\xrightarrow{\text{پس از محاسبه و ساده‌سازی احتمال‌ها}}$

X	۰	۱	۲
P	$\frac{5}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

بیشترین مقدار

دسته پنجم)توزیع دوجمله ای

مسائلی هستند که یه ازمایش رو مثلا ۱۰ بار انجام میدهیم. بعدش طراح از ما میخواد که مثلا ۴ بار نتیجه ازمایش اونی باشه که میگه.... مثلا یه سکه را ۱۰ بار میندازیم، احتمال اینکه ۴ بار (رو) بیاد.... در این نوع مسائل نتیجه ازمایش کلا دو حالت داره که یکی از دوحالت رو پیروزی و دیگری رو شکست درنظر میگیریم که جمع احتمال این دوحالت یک میشه پس مثلا اگه احتمال پیروزی $\frac{۱}{۴}$ باشه احتمال شکست میشه $۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$.این سوالات معمولا اخرین سوال احتمالی هست که توی دفترچه سوالات کنکور می بینیده. فرمول این نوع احتمال به صورت زیر است:

$$P(\text{بار پیروزی } k)=\binom{n}{k}p^{k}(۱-p)^{n-k}$$

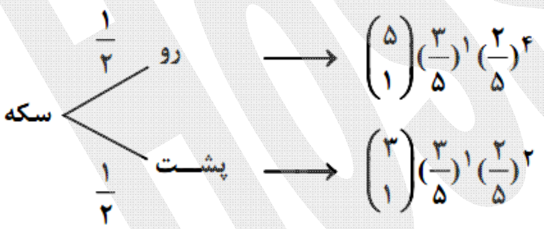
توجه : بچه ها خیلی حواستون باشه جدیدا در کنکور سوالات احتمال رو ترکیبی می دن مثلا نمودار درختی رو با توزیع دوجمله‌ای قاطی می کنن و بهتون می دن که خیلی باید حواستون رو جمع کنید. خداروشکر در ازمونهای جامع قلمچی که پیش رو داریم. من و دوستانم سعی کردیم تمام حالت هایی که از احتمال می تونن ترکیبی بدن رو بیاریم ... خوب اون سوالات رو بعد از برگزاری تحلیل کنید که در کنکور دچار مشکل نشوید

به سوال ترکیبی کنکور خارج ۹۴ دقت کنید:

۱۳۸– در پرتاب یک سکه، اگر «رو» بیاید یک تیرانداز مجاز است ۵ تیر رها کند، اگر «پشت» بیاید، ۳ تیر رها می‌کند. می‌دانیم احتمال اصابت هر تیر رها شده $\frac{۳}{۵}$ است. با کدام احتمال فقط یک تیر اصابت می‌کند؟

۱) $\frac{۹۶}{۶۲۵}$ ۲) $\frac{۱۱۴}{۶۲۵}$ ۳) $\frac{۱۲۲}{۶۲۵}$ ۴) $\frac{۱۲۸}{۶۲۵}$

خب می بینید اول مساله گفته اگر (رو) بیاد یه کاری رو انجام بده و اگر (پشت) بیاد یه کار دیگه ای رو باید انجام بده. همینجا باید سریع دو تا حالت کنید مساله را. ینی یه شاخه (رو) و یه شاخه (پشت) حالا برین توی هر کدوم از شاخه ها و ببینید که مساله گفته باید چه کاری انجام بشه..... به حل دقت کنید:



$$\frac{۱}{۲}\times\binom{۵}{۱}\left(\frac{۳}{۵}\right)\left(\frac{۲}{۵}\right)^{۴}+\frac{۱}{۲}\times\binom{۳}{۱}\left(\frac{۳}{۵}\right)\left(\frac{۲}{۵}\right)^{۲}=\frac{۱۱۴}{۶۲۵}$$

موفق باشید.

@see_i