



سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

# ایمان نخواستین



دهم

یازدهم

دوازدهم

(کنکور)

طراح سوالات ریاضی قلم چی  
مدرس طرح کنکور مدارس گیلان  
(رشت، لاهیجان، لنگرود، رودسر و ...)

۰۹۱۱۱۴۳ ۶۷۶۴

 nakhostin\_math

 nakhostin\_math

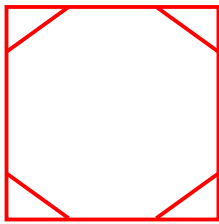
## ضابطه‌ی تابع

## ضابطه‌ی تابع :

در بسیاری از موارد نمایش جبری یک تابع مناسب تر از نمایش زوج مرتب یا نمودار پیکانی است. عبارت جبری ای که به ازای هر مقدار  $x$  مقدار را مشخص کند تابع است مثلاً  $y = 2x^2 - 1$  یک تابع است زیرا برای هر عدد حقیقی مانند  $x$  فقط یک  $y$  به دست می آید اما  $x^2 + y^2 = 5$  تابع نیست زیرا مثلاً برای  $x = 1$  دو مقدار  $\pm 2$  برای  $y$  به دست می آید به عبارتی دیگر زوج های مرتب  $(1, 2), (1, -2)$  را هر دو با هم خواهیم داشت.

سؤال: از یک مربع به ضلع ۱۲ یک ۸ ضلعی منتظم به ضلع  $x$  جدا می کنیم. مساحت ۸ ضلعی به عنوان تابعی

بر حسب  $x$  کدام است.



$$S = \frac{-x^2}{2} + 12x + 72 \quad (2)$$

$$S = 144 - \left(6 - \frac{x}{2}\right)^2 \quad (1)$$

$$S = \frac{-x}{4} + 12x + 36 \quad (4)$$

$$S = 144 + 2\left(6 - \frac{x}{2}\right)^2 \quad (3)$$

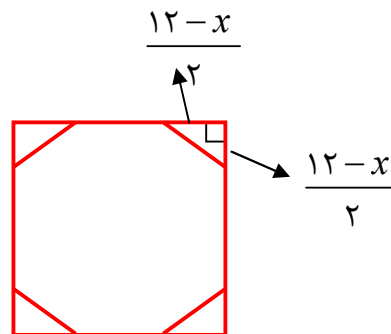
پاسخ: گزینه ۲

با توجه به آنکه ۸ ضلعی منتظم است پس درون مربع ۴ مثلث قائم الزویه متساوی الساقین ایجاد می شود. اگر طول ضلع مربع ۱۲ و

ضلع ۸ ضلعی  $x$  باشد طول هر ساق قائم الزویه متساوی الساقین  $\frac{12-x}{2}$  است زیرا اگر طول هر ضلع آن  $y$  باشد داریم:

$$\text{طول ضلع مربع} = x + 2y$$

$$\Rightarrow x + 2y = 12 \Rightarrow y = \frac{12-x}{2}$$



مساحت مربع برابر مساحت ۸ ضلعی و ۴ مثلث قائم الزویه متساوی الساقین است در نتیجه:

مساحت مثلث + مساحت ۸ ضلعی = مساحت مربع

$$\Rightarrow 12^2 = S + 4 \times \frac{\frac{(12-x)}{2} \times \frac{(12-x)}{2}}{2}$$

$$\Rightarrow 144 = S + \frac{(12-x)^2}{2} \Rightarrow S = 144 - \frac{(12-x)^2}{2}$$

$$= 144 - \frac{144 - 24x + x^2}{2} = 144 - 72 + 12x - \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow S = -\frac{1}{2}x^2 + 12x + 72$$

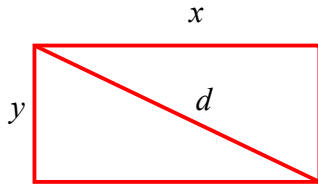
سؤال ۲: محیط مستطیلی برابر ۱۰ است. تابعی که قطر مستطیل را بر حسب طول آن ( $x$ ) بیان می کند کدام است؟

$$d(x) = \sqrt{2x^2 - 10x + 25} \quad (۲)$$

$$d(x) = \sqrt{100 - x^2} \quad (۱)$$

$$d(x) = \sqrt{2x^2 - 20x + 100} \quad (۴)$$

$$d(x) = \sqrt{25 - x^2} \quad (۳)$$



پاسخ: گزینه ۲

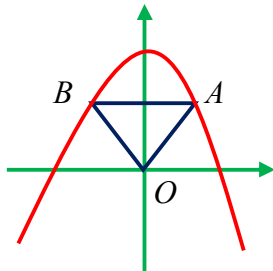
اگر محیط برابر ۱۰ باشد داریم:  $2(x + y) = 10 \Rightarrow x + y = 5$

از طرفی بنا بر قضیه فیثاغورس داریم:  $d^2 = x^2 + y^2$

چون  $x + y = 5$  است پس  $y = 5 - x$  است با جای گذاری  $y$  بر حسب  $x$  در عبارت بالا داریم:

$$d^2 = x^2 + (5 - x)^2 = x^2 + x^2 - 10x + 25 = 2x^2 - 10x + 25 \Rightarrow d = \sqrt{2x^2 - 10x + 25}$$

سؤال ۳: در شکل مقابل سهمی  $f(x) = 4 - x^2$  رسم شده است. مساحت مثلث  $OAB$  را به عنوان تابعی



بر حسب طول نقطه  $A$  نوشته ایم. ضابطه آن کدام است؟

$$S = 4x - x^2 \quad (۲)$$

$$S = 4x - x^2 \quad (۱)$$

$$S = x - 4x^2 \quad (۴)$$

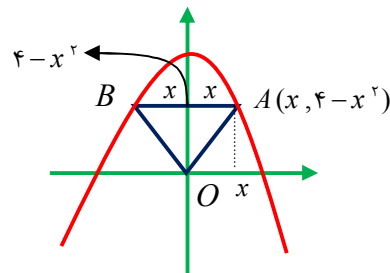
$$S = x - 4x^2 \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۲

اگر طول نقطه  $A$ ،  $x$  باشد چون این نقطه واقع بر منحنی  $y = 4 - x^2$  است پس عرض آن برابر  $4 - x^2$  است. در نتیجه در

مثلث  $OAB$  طول  $AB$  برابر  $2x$  و ارتفاع وارد بر ضلع  $AB$  برابر  $4 - x^2$  است؛ در نتیجه:

$$S = \frac{AB \times h}{2} = \frac{2x \times (4 - x^2)}{2} \\ = x(4 - x^2) = 4x - x^2$$



سؤال ۴: اگر  $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & x \leq 1 \\ -x^2 + 2a & x \geq 1 \end{cases}$  تابع باشد مقدار  $f(\sqrt{2} - 1)$  کدام است؟

$$-2 \quad (۴)$$

$$2 \quad (۳)$$

$$-1 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

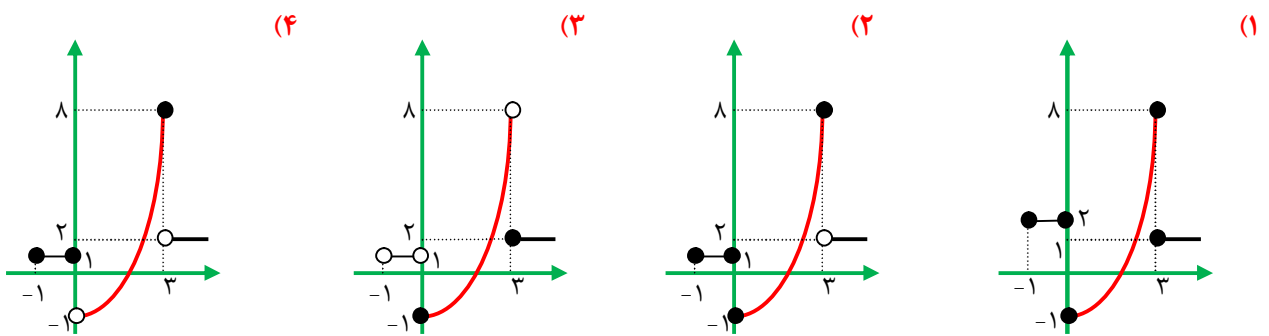
مقدار  $x = 1$  هم در دامنه ضابطه بالا و هم در دامنه ضابطه پایین قرار دارد پس:

$$\begin{cases} f(1) = 1^2 + a \times 1 = a + 1 \\ f(1) = -1^2 + 2a \times 1 = 2a - 1 \end{cases} \Rightarrow a + 1 = 2a - 1 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x \leq 1 \\ -x^2 + 4x & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{2} - 1 < 1 \Rightarrow f(\sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2} - 1)^2 + 2(\sqrt{2} - 1) = 1$$

سؤال ۵: نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} 1 & , -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 - 1 & , 0 < x \leq 3 \\ 2 & , x > 3 \end{cases}$  کدام است؟



پاسخ: گزینه ۴

در بازه  $[-1, 0]$  نمودار تابع به صورت خط افقی با عرض برابر با یک است در بازه  $(0, 3]$  نمودار تابع به صورت بخشی از سهمی  $y = x^2 - 1$  به معادله  $y = x^2 - 1$  است. مقدار تابع  $y$  در صفر برابر با  $-1$  و در  $x = 3$  برابر با  $8$  است. توجه کنید که چون  $x = 0$  جزو بازه  $(0, 3]$  نیست نمودار سهمی را در این نقطه به صورت توفالی رسم می‌کنیم. در بازه  $(3, +\infty)$  نمودار تابع به صورت خط افقی با عرض برابر با  $2$  است. توجه کنید که  $x = 3$  نیز جزو بازه  $(3, +\infty)$  نیست و خط در این نقطه باید توفالی رسم شود. با توجه به توضیحات داده شده نمودار گزینه (۴) جواب است.

سؤال ۶: اگر  $f(x+2) - f(x) = 9$  و  $f(0) = 0$  آنگاه  $f(4)$  کدام است؟

- (۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴

$$x = 0 \Rightarrow 3f(2) - f(0) = 9 \Rightarrow 3f(2) = 9 \Rightarrow f(2) = 3$$

$$x = 2 \Rightarrow 3f(4) - f(2) = 9 \Rightarrow 3f(4) - 3 = 9 \Rightarrow 3f(4) = 12 \Rightarrow f(4) = 4$$

سؤال ۷: اگر  $f(x) = f(2) + x^2 + 7$  باشد مقدار  $f(1) - f(2)$  کدام است؟

۱۵ (۱)  $-\frac{3}{4}$  (۲)  $-10$  (۳)  $-\frac{3}{2}$  (۴)

پاسخ: گزینه ۴

$$x = 2 \Rightarrow 2f(2) = f(2) + 2^2 + 7 \Rightarrow 2f(2) - f(2) = 11 \Rightarrow f(2) = 11$$

$$\Rightarrow 2f(x) = 11 + x^2 + 7 = x^2 + 18 \xrightarrow{x=1} 2f(1) = 1^2 + 18 = 19 \Rightarrow f(1) = \frac{19}{2}$$

$$\Rightarrow f(1) - f(2) = \frac{19}{2} - 11 = \frac{-3}{2}$$

سؤال ۸: اگر  $f(x) + f(3) = x^2 - 3 + f(2)$  مقدار  $f(2)$  کدام است؟

۱ (۱)  $-4$  (۲)  $-2$  (۳)  $2$  (۴)

پاسخ: گزینه ۲

$$x = 2 \Rightarrow f(2) + f(3) = 4 - 3 + f(2) \Rightarrow f(3) = 1$$

$$x = 3 \Rightarrow f(3) + f(3) = 9 - 3 + f(2) \xrightarrow{f(3)=1} 1 + 1 = 6 + f(2) \Rightarrow f(2) = -4$$

سؤال ۹: اگر  $f\left(\frac{1}{y} - x\right) - f\left(x + \frac{1}{y}\right) = 7x - 5$  باشد حاصل  $f(1)$  کدام است؟

$-2$  (۱)  $2$  (۲)  $-7$  (۳)  $7$  (۴)

پاسخ: گزینه ۳

در معادلهٔ داده شده  $x$  را به  $-x$  تبدیل کرده و سپس با استفاده از معادلهٔ جدید و معادلهٔ اصلی دستگاه معادلات زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} 2f\left(\frac{1}{y} - x\right) - f\left(x + \frac{1}{y}\right) = 7x - 5 \\ 2f\left(\frac{1}{y} + x\right) - f\left(-x + \frac{1}{y}\right) = -7x - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4f\left(\frac{1}{y} - x\right) - 2f\left(x + \frac{1}{y}\right) = 14x - 10 \\ 2f\left(\frac{1}{y} + x\right) - f\left(-x + \frac{1}{y}\right) = -7x - 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3f\left(\frac{1}{y} - x\right) = 7x - 15 \Rightarrow \frac{1}{y} - x = t \Rightarrow x = \frac{1}{y} - t \Rightarrow 3f(t) = 7\left(\frac{1}{y} - t\right) - 15$$

$$= -7t - 14 \Rightarrow f(1) = \frac{-7 - 14}{3} = -7$$

سؤال ۱۰: اگر  $f(x+3) - f(x) = 8$  و منحنی تابع  $f$  از مبدأ مختصات عبور کند آنگاه  $f(6)$  کدام است؟

$2$  (۱)  $\frac{5}{2}$  (۲)  $\frac{5}{4}$  (۳)  $5$  (۴)

پاسخ: گزینه ۲

$$f(x+3) - f(x) = 8 \xrightarrow{x=0} 3f(3) - f(0) = 8 \xrightarrow{f(0)=0} f(3) = 2$$

$$f(x+3) - f(x) = 8 \xrightarrow{x=3} 4f(6) - f(3) = 8 \Rightarrow 4f(6) - 2 = 8 \Rightarrow f(6) = \frac{5}{2}$$

سؤال ۱۱: اگر  $f(x) = \frac{2x^2 - 8x + 13}{4x^2 - 16x + 15}$  باشد مقدار  $f(2 - \sqrt{3})$  کدام است؟

(۱)  $\frac{2 - \sqrt{3}}{4}$  (۲) ۱ (۳)  $\frac{11}{15}$  (۴)  $\frac{11}{10}$

پاسخ: گزینه ۲

$$f(x) = \frac{2(x-2)^2 + 5}{4(x-2)^2 - 1}$$

$$\Rightarrow f(2 - \sqrt{3}) = \frac{2(2 - \sqrt{3} - 2)^2 + 5}{4(2 - \sqrt{3} - 2)^2 - 1} = \frac{6 + 5}{11} = \frac{11}{11} = 1$$

سؤال ۱۲: اگر  $f(x) = 1 - 3x$  و  $g(x) = 2x - 3$  به طوری که  $f(g(1)) = g(f(a))$  مقدار  $a$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{5}{6}$  (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴)  $\frac{3}{4}$

پاسخ: گزینه ۱

$$g(x) = 2x - 3 \Rightarrow g(1) = 2 - 3 = -1$$

$$f(x) = 1 - 3x \Rightarrow f(a) = 1 - 3a \Rightarrow f(\underbrace{g(1)}_{-1}) = g(\underbrace{f(a)}_{1-3a})$$

با توجه به آن که  $f(x) = 1 - 3x$  است پس  $f(-1) = 4$  است. برای مناسبه  $g(1 - 3a)$  کافی است به جای ورودی تابع  $g$  (یعنی  $x$ ) قرار دهیم  $1 - 3a$  تا  $g(1 - 3a)$  به دست آید:

$$g(x) = 2x - 3$$

$$g(1 - 3a) = 2(1 - 3a) - 3 = 2 - 6a - 3 = -6a - 1$$

$$-6a - 1 = 4 \Rightarrow a = -\frac{5}{6} \text{ چون باید } f(-1) = g(1 - 3a) \text{ باشد در نتیجه:}$$

سؤال ۱۳: با فرض  $f(x) + f(2) = \frac{3x}{x-1}$  مقدار  $f(f(-2))$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{4}{3}$  (۲)  $-\frac{3}{2}$  (۳)  $-\frac{3}{4}$  (۴)  $-\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا باید  $f(2)$  را به دست آوریم تا بتوانیم ضابطه تابع  $f$  را بنویسیم. برای به دست آوردن  $f(2)$  در دو طرف تساوی معادله به جای  $x$  قرار می‌دهیم:

$$f(x) + f(2) = \frac{3x}{x-1} \xrightarrow{x=2} f(2) + f(2) = \frac{6}{2-1} \Rightarrow 2f(2) = 6 \Rightarrow f(2) = 3$$

$$f(x) + 3 = \frac{3x}{x-1} \Rightarrow f(x) = \frac{3x}{x-1} - 3$$

$$f(-2) = \frac{-6}{-2-1} - 3 = 2 - 3 = -1$$

در نتیجه  $f(f(-2)) = f(-1)$  است پس باید  $f(-1)$  را به دست آوریم:

$$f(\underbrace{f(-2)}_{-1}) = f(-1) = \frac{3(-1)}{-1-1} - 3 = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$$

سؤال ۱۴: اگر  $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x > 0 \\ \sqrt{-x} & x \leq 0 \end{cases}$  مقدار  $f(f(f(-81)))$  کدام است؟

$$-\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{9} \quad (2)$$

$$\frac{1}{9} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

برای مناسبه  $f(f(f(-81)))$  مراحل حل زیر را طی می‌کنیم:

(۱) ابتدا  $f(-81)$  را به دست می‌آوریم چون  $-81$  از صفر کمتر است پس وارد ضابطه دوم یعنی  $y = \sqrt{-x}$  می‌شود:

$$f(-81) = \sqrt{-(-81)} = \sqrt{81} = 9$$

(۲) بنابر مرحله (۱)،  $f(f(-81)) = f(9)$  است پس باید  $f(9)$  را به دست آوریم. چون  $9$  از صفر بزرگتر است وارد ضابطه

$$\text{اول یعنی } y = -\frac{1}{x} \text{ می‌شود: } f(f(-81)) = f(9) = -\frac{1}{9}$$

(۳) بنابر مرحله ۲،  $f(f(f(-81))) = f\left(-\frac{1}{9}\right)$  است پس باید  $f\left(-\frac{1}{9}\right)$  را به دست آوریم چون  $-\frac{1}{9}$  کمتر از صفر است.

$$f(\underbrace{f(f(-81))}_{-\frac{1}{9}}) = f\left(-\frac{1}{9}\right) = \sqrt{-\left(-\frac{1}{9}\right)} = \frac{1}{3}$$

پس وارد ضابطه دوم یعنی  $y = \sqrt{-x}$  می‌شود:

سؤال ۱۵: اگر  $f(x) = \frac{4^x}{2+4^x}$  و  $\alpha + \beta = 1$  مقدار  $f(\alpha) + f(\beta)$  کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$



پاسخ: گزینه ۲

اگر  $\alpha + \beta = 1$  باشد  $\alpha = 1 - \beta$  است در نتیجه:

$$f(\alpha) = f(1 - \beta) = \frac{4^{1-\beta}}{2 + 4^{1-\beta}} = \frac{\frac{4}{4^\beta}}{2 + \frac{4}{4^\beta}} = \frac{\frac{4}{4^\beta}}{\frac{2 \times 4^\beta + 4}{4^\beta}}$$

$$\frac{4}{2 \times 4^\beta + 4} = \frac{4}{2(4^\beta + 2)} = \frac{2}{4^\beta + 2}$$

$$f(\beta) = \frac{4^\beta}{2 + 4^\beta} \Rightarrow f(\alpha) + f(\beta) = \frac{2}{4^\beta + 2} + \frac{4^\beta}{2 + 4^\beta} = \frac{2 + 4^\beta}{4^\beta + 2} = 1$$

تذکره: از رابطه  $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$  داریم:  $4^{1-\beta} = \frac{4}{4^\beta}$

سؤال ۱۶: اگر  $f(x) = x^2 - 4x$ ،  $f(\alpha) = f(\alpha + 2)$  مقدار  $\alpha$  کدام می‌تواند باشد؟

۴ صفر

۱ (۳)

۱ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$f(\alpha) = \alpha^2 - 4\alpha$$

برای مناسبه  $f(\alpha + 2)$  کافی است در تابع  $f(x) = x^2 - 4x$  به جای  $x$  (ورودی تابع) قرار دهیم  $\alpha + 2$ :

$$f(\alpha + 2) = (\alpha + 2)^2 - 4(\alpha + 2) = \alpha^2 + 4\alpha + 4 - 4\alpha - 8 = \alpha^2 - 4$$

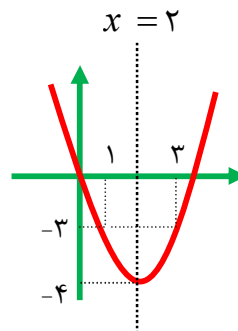
$$f(\alpha) = f(\alpha + 2) \Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha = \alpha^2 - 4 \Rightarrow 4\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 1$$

تذکره: می‌دانیم نمودار تابع  $f$  یک سهمی است که دارای محور تقارن  $x = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$  است. در نتیجه زمانی فروبی‌های

تابع  $f$  با هم برابرند که ورودی‌های تابع نسبت به محور تقارن سهمی به یک فاصله باشند. چون محور تقارن این سهمی  $x = 2$  است پس باید میانگین  $\alpha + 2$ ، یعنی  $\alpha + 1$  برابر ۲ باشد:

$$\alpha + 1 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\Rightarrow f(1) = f(3)$$



سؤال ۱۷: اگر  $f(x) = \begin{cases} f(x-1) - x & x > 2 \\ 2x - 5 & x \leq 2 \end{cases}$  مقدار  $f(4)$  کدام است؟

(۱) -۵ (۲) -۶ (۳) -۷ (۴) -۸

پاسخ: گزینه ۴

چون ۴ بزرگتر از ۲ است وارد ضابطه یعنی  $y = f(x-1) - x$  می شود پس:

$$f(4) = f(4-1) - 4 = f(3) - 4$$

حال باید  $f(3)$  را به دست آوریم. چون ۳ بزرگتر از ۲ است وارد ضابطه اول یعنی  $y = f(x-1) - x$  می شود در نتیجه:

$$f(3) = f(3-1) - 3 = f(2) - 3$$

حال باید  $f(2)$  را به دست آوریم. ورودی ۲ وارد ضابطه دو یعنی  $y = 2x - 5$  می شود پس:

$$f(2) = 2 \times 2 - 5 = -1$$

$$f(3) = f(2) - 3 = -1 - 3 = -4$$

$$f(4) = f(3) - 4 = -4 - 4 = -8$$

سؤال ۱۸: اگر  $f(2x-1) = f(4-3x)$  و  $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$  مقدار  $x$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) صفر (۴)  $\pm 1$

پاسخ: گزینه ۱

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2} \Rightarrow \begin{cases} f(2x-1) = \frac{(2x-1)-1}{(2x-1)+2} = \frac{2x-2}{2x+1} \\ f(4-3x) = \frac{(4-3x)-1}{(4-3x)+2} = \frac{-3x+3}{-3x+6} = \frac{-x+1}{-x+2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2x-2}{2x+1} = \frac{-x+1}{-x+2} \Rightarrow \frac{2(x-1)}{2x+1} = \frac{-(x-1)}{-(x-2)}$$

در تساوی فوق اگر  $x=1$  باشد دو طرف تساوی برابر صفر می شوند پس یکی از جواب های معادله  $x=1$  است. اگر  $x=1$  نباشد می توان عبارت  $x-1$  را از دو طرف تساوی ساده کرد:

$$\frac{2}{2x+1} = \frac{1}{x-2} \Rightarrow 2x-4 = 2x+1 \Rightarrow 4 = -1$$

معادله جواب دیگری ندارد.

پس تنها جواب معادله  $x=1$  است.

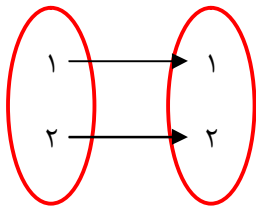
سؤال ۱۹: چند تابع مانند  $f$  از مجموعه  $A = \{1, 2\}$  به مجموعه  $A$  وجود دارد که  $f(f(x)) = x$  باشد؟

(تقدیم به دانش آموزای باهوشم)

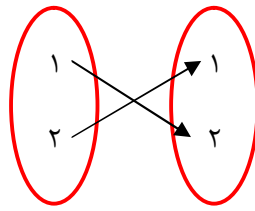
(۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

پاسخ: گزینه ۲

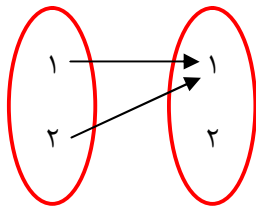
از مجموعه  $A$  به  $A$  کلاً ۴ تابع زیر را می توان نوشت:



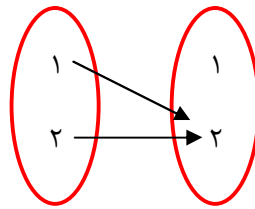
$$f_1 = \{(1,1), (2,2)\}$$



$$f_2 = \{(1,2), (2,1)\}$$



$$f_3 = \{(1,1), (2,1)\}$$



$$f_4 = \{(1,2), (2,2)\}$$

در هر یک از این توابع صحت رابطه  $f(f(x)) = x$  را به ازای هر  $x$  بررسی می کنیم:

$$f_1 : f(\underbrace{f(1)}_1) = f(1) = 1 \quad \checkmark$$

$$f(\underbrace{f(2)}_2) = f(2) = 2 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$  در تابع  $f_1$  رابطه  $f(f(x)) = x$  برقرار است.

$$f_2 : f(\underbrace{f(1)}_2) = f(2) = 1 \quad \checkmark$$

$$f(\underbrace{f(2)}_1) = f(1) = 2 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$  در تابع  $f_2$  رابطه  $f(f(x)) = x$  برقرار است.

$$f_3 : f(\underbrace{f(1)}_1) = f(1) = 1 \quad \checkmark$$

$$f(\underbrace{f(2)}_1) = f(1) = 1 \quad \times$$

$\Rightarrow$  در تابع  $f_3$  رابطه  $f(f(x)) = x$  برقرار نیست.

$$f_4 : f(\underbrace{f(1)}_2) = f(2) = 2 \quad \times$$

$$f(\underbrace{f(2)}_2) = f(2) = 2 \quad \checkmark$$

در تابع  $f_2$  رابطه  $f(f(x)) = x$  برقرار نیست.

در نتیجه از بین این ۴ تابع فقط در ۲ تابع  $f_1$  و  $f_2$  به ازای هر  $x$  از دامنه رابطه  $f(f(x)) = x$  برقرار است.

سؤال ۲۰: اگر  $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$  و تابع  $g$  به گونه ای باشد که برای هر  $x, x \neq 2$   $f(g(x)) = x$  باشد آنگاه  $g(7)$

کدام است؟

- (۱)  $\frac{7}{2}$       (۲)  $\frac{5}{2}$       (۳)  $\frac{3}{2}$       (۴)  $\frac{6}{5}$

پاسخ: گزینه ۲

اگر فرض کنیم  $g(7) = \alpha$  است با قرار دادن  $x$  برابر ۷ در تابع  $f(g(x)) = x$  داریم:

$$f(g(7)) = 7 \xrightarrow{g(7)=\alpha} f(\alpha) = 7$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2} \Rightarrow f(\alpha) = \frac{\alpha+1}{\alpha-2} = 7 \Rightarrow 7\alpha - 14 = \alpha + 1$$

$$6\alpha = 15 \Rightarrow \alpha = \frac{5}{2}$$

در نتیجه  $\alpha = g(7) = \frac{5}{2}$  است.

سؤال ۲۱: اگر  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$  باشد ضابطه  $f(f(x))$  کدام است؟

- (۱)  $x^2$       (۲) ۱      (۳)  $x$       (۴)  $x^2 + 1$

پاسخ: گزینه ۲

مقادیر  $f(x)$ ،  $x^2$  یا ۱ هستند که هم  $x^2$  و هم ۱ همواره مثبت هستند یعنی:

$$f(f(x)) = f(\text{مثبت}) = 1$$

سؤال ۲۲: اگر  $f(x) = \begin{cases} 2 & x \in Q \\ 1 & x \notin Q \end{cases}$  باشد ضابطه  $f(f(x))$  کدام است؟

- (۱) ۱      (۲) ۲      (۳) صفر      (۴) هیچ کدام

پاسخ: گزینه ۲

مقادیر  $f(x)$ ، ۲ یا ۱ هستند که هم ۲ و هم ۱ اعدادی گویا هستند.

$$f(f(x)) = f(\text{مقادیر گویا}) = 2$$

سؤال ۲۳: اگر  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ 4 & x < 0 \end{cases}$  مقدار  $f(f(-f(x)))$  کدام است؟ (سنجش)

پاسخ:  $f(x)$  به ازای هر  $x \neq 0$  مقداری مثبت دارد و به ازای  $x = 0$  حاصل آن صفر است.

$$x = 0 \Rightarrow f(f(-f(0))) = f(f(0)) = f(0) = 0$$

$$x \neq 0 \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow -f(x) < 0 \Rightarrow f(-f(x)) = 4$$

$$\Rightarrow f(f(-f(x))) = f(4) = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow f(f(-f(x))) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 2 & x \neq 0 \end{cases}$$

سؤال ۲۴: اگر  $f(2x+1) = 8x^2 + 6x + 5$  باشد آنگاه  $f(x)$  کدام است؟ (خارج تجربی ۹۵)

$$2x^2 - 2x + 3 \quad (2) \qquad 2x^2 + 3x + 1 \quad (1)$$

$$2x^2 + x + 3 \quad (4) \qquad 2x^2 - x + 4 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳

$$f(2x+1) = 8x^2 + 6x + 5$$

$$= \bigcirc(2x+1)^2 + \square(2x+1) + \Delta$$

$$= 2(4x^2 + 4x + 1) - (2x + 1) + 4$$

$$\Rightarrow f(2x+1) = 2(2x+1)^2 - (2x+1) + 4 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - x + 4$$

سؤال ۲۵: اگر  $f(2x-3) = 4(x^2 - 4x + 5)$  تابع  $f(x)$  کدام است؟ (داخل ریاضی ۹۳)

$$x^2 - 4x + 3 \quad (1) \qquad x^2 - 4x + 5 \quad (2)$$

$$x^2 - 2x + 5 \quad (3) \qquad x^2 - 2x + 3 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۳

$$f(2x-3) = 4x^2 - 16x + 20$$

$$= \bigcirc(2x-3)^2 + \square(2x-3) + \Delta$$

$$= 1(4x^2 - 12x + 9) - 2(2x - 3) + 5$$

$$\Rightarrow f(2x-3) = (2x-3)^2 - (2x-3) + 5 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 5$$

سؤال ۲۶: اگر  $f(2x+3) = 8x^2 + 22x + 20$  تابع  $f(x)$  کدام است؟ (داخل ریاضی ۹۲)

$$f(2x+3) = 8x^2 + 22x + 20$$

$$= \bigcirc(2x+3)^2 + \square(2x+3) + \Delta$$

$$= 2(4x^2 + 12x + 9) - (2x + 3) + 5$$

$$\Rightarrow f(2x+3) = 2(2x+3)^2 - (2x+3) + 5 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - x + 5$$

سؤال ۲۷: اگر  $f(x^2 + 2x) = \frac{x^4 + 4}{x^2 - 2x + 2}$  مقدار  $f(5)$  کدام است؟

۹ (۴)

۷ (۳)

۵ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{aligned} x^4 + 4 &= x^4 + 4x^2 - 4x^2 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 \\ &= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x^2 + 2x) = \frac{(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)}{x^2 - 2x + 2} = x^2 + 2x + 2$$

$$\Rightarrow f(x) = x + 2 \Rightarrow f(5) = 5 + 2 = 7$$

سؤال ۲۸: اگر  $g(x) = \sqrt{x^2 + 4}$  و  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$  و  $0 < a < 1$  آنگاه حاصل

$f\left(a + \frac{1}{a}\right) + g\left(a - \frac{1}{a}\right)$  کدام است؟

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 4} + \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 4} &= \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 - 4} + \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 + 4} \\ &= \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2} - 2} + \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2} + 2} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2} - 2(a)\left(\frac{1}{a}\right)} + \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2} + 2(a)\left(\frac{1}{a}\right)} \\ &= \underbrace{\sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2}}_{\text{منفی}} + \underbrace{\sqrt{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2}}_{\text{مثبت}} = \left|a - \frac{1}{a}\right| + \left|a + \frac{1}{a}\right| = -a + \frac{1}{a} + a + \frac{1}{a} = \frac{2}{a} \end{aligned}$$

**تست ضابطه‌ی تابع**

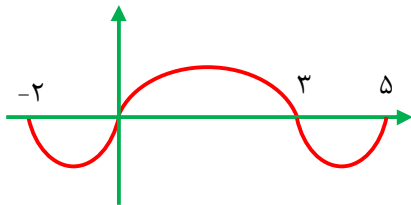
سؤال ۱: در هر یک از توابع زیر دامنه و برد تابع را بیابید.

۱)  $f(x) = x^2 + 4x + 9$

۲)  $f(x) = 3 + \sqrt{4 - x^2}$

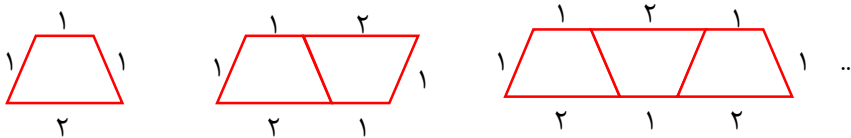
۳)  $f(x) = x + \frac{4}{x}$

سؤال ۲: اگر نمودار  $f$  شکل مقابل باشد دامنه تابع  $y = \sqrt{(x-1)f(x)}$  شامل چند عدد صحیح است؟



- ۵ (۱)
- ۶ (۲)
- ۷ (۳)
- ۸ (۴)

سؤال ۳: در الگوی زیر محیط شکل  $n$  ام تابعی از تعداد دوزنقه‌های آن شکل ( $k$ ) است. ضابطه این تابع کدام است؟



- ۴k + 1 (۱)
- ۳k + 2 (۲)
- k^2 + k + 3 (۳)
- ۲k^2 + k + 2 (۴)

سؤال ۴: طول دو ضلع مثلثی ۳ و ۴ و زاویه بین آنها منفرجه است. تابعی که اندازه ضلع سوم را برحسب مساحت مثلث ( $S$ ) بیان می‌کند چه ضابطه‌ای دارد؟

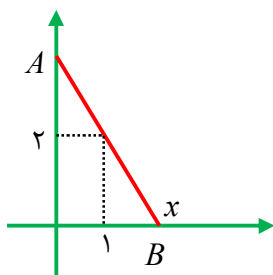
$L(s) = \sqrt{25 + 2\sqrt{36 - S^2}}$  (۲)

$L(s) = \sqrt{25 - 2\sqrt{36 - S^2}}$  (۱)

$L(s) = \sqrt{25 + 4\sqrt{36 - S^2}}$  (۴)

$L(s) = \sqrt{25 - 4\sqrt{36 - S^2}}$  (۳)

سؤال ۵: در شکل مقابل مقدار  $AB^2$  تابعی از طول نقطه  $B(x)$  است. ضابطه این تابع کدام است؟



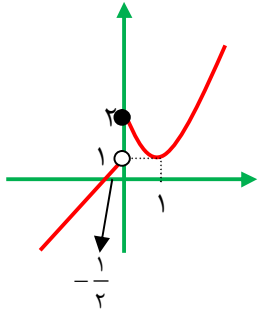
$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 (x^2 - 2x + 5)$  (۲)

$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 (x^2 + 2x + 5)$  (۱)

$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 (x^2 - 4x + 6)$  (۴)

$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 (x^2 + 4x + 3)$  (۳)

سؤال ۶: مطابق شکل زیر نمودار تابع  $f$  از یک خط و بخشی از یک سهمی تشکیل شده است. حاصل عبارت



$$\frac{f(3) - f(4)}{-f(-1) + f(-3/5)}$$

کدام است؟

(۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) -۲  
(۴) -۱

سؤال ۷: نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} |x| - 1 & x \geq 0 \\ x^2 + 5x + 1 & x < 0 \end{cases}$  محور طولها را در چند نقطه قطع می کند؟

- (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۲

سؤال ۸: یک تانکر گاز از یک استوانه به ارتفاع ۸ متر و دو نیم کره به شعاع  $r$  متر در دو انتهای استوانه تشکیل

شده است. حجم تانکر بر حسب تابعی از  $r$  کدام است؟

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 + 8\pi r^2 \quad (۲) \quad V(r) = \frac{2\pi r^3}{3} + 4\pi r^2 \quad (۱)$$

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2 \quad (۴) \quad V(r) = \pi r^3 + \pi r^2 \quad (۳)$$

سؤال ۹: اگر  $f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{x-1}{|x|+1} & x \geq 0 \\ b + 2x - 3 & x \leq 0 \end{cases}$  نمایش یک تابع باشد مقدار  $b$  کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) ۲ (۴) -۲

سؤال ۱۰: به ازای کدام مقدار صحیح  $a$  برد تابع  $f(x) = \begin{cases} 2 - ax & x \geq 1 \\ x^2 + 1 & x < 1 \end{cases}$  مجموعه اعداد حقیقی است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

سؤال ۱۱: اگر  $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 - 7 & x > 0 \\ -x^3 + 9 & x < 0 \end{cases}$  باشد به ازای چه مقادیری از  $x$  رابطه

$f(x^4) - f(-x^4) = 0$  برقرار است؟

- (۱)  $\pm 2$  (۲)  $\pm 8$  (۳)  $\pm \sqrt{2}$  (۴)  $\pm \sqrt[4]{2}$



سؤال ۱۲: کدامیک از گزینه‌های زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 2x - 4 & x < 2 \end{cases} \quad (۲) \quad f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \geq 0 \\ x + 3 & x \leq 0 \end{cases} \quad (۱)$$

$$h(x) = \begin{cases} |x| + 1 & x \leq -2 \\ x^2 + 1 & x \geq -2 \end{cases} \quad (۴) \quad k(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x^2 & x \leq 0 \end{cases} \quad (۳)$$

سؤال ۱۳: اگر در تابع  $f(x) = ax^2 - x + 4a + b$  روابط  $f(2) = 2f(1) = 4f(3)$  برقرار باشد حاصل  $a + b$  کدام است؟

$$-\frac{1}{4} \quad (۴) \quad \frac{1}{4} \quad (۳) \quad -\frac{1}{12} \quad (۲) \quad \frac{1}{12} \quad (۱)$$

سؤال ۱۴: هرگاه  $f(x-1) = 2 + x^2 - 2f(3)$  مقدار  $f(-2)$  کدام است؟

$$-9 \quad (۴) \quad -10 \quad (۳) \quad 11 \quad (۲) \quad 10 \quad (۱)$$

سؤال ۱۵: اگر  $f(2x-1) = x^2 - x$  آنگاه  $f(3x+1)$  کدام است؟

$$9x^2 - 6x - 1 \quad (۴) \quad 9x^2 - 6x + 1 \quad (۳) \quad 9x^2 + 6x \quad (۲) \quad 9x^2 - 6x \quad (۱)$$

سؤال ۱۶: با فرض  $f(x) + 2f(-x) = x^2 + x$  مقدار  $f(2)$  کدام است؟

$$-8 \quad (۴) \quad 8 \quad (۳) \quad 10 \quad (۲) \quad -10 \quad (۱)$$

سؤال ۱۷: اگر  $P$  محیط مثلث متساوی الاضلاع و  $S$  مساحت آن باشد  $S$  به عنوان یک تابع بر حسب  $P$  کدام است؟

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2} P^2 \quad (۲) \quad S = \frac{1}{4\sqrt{3}} P^2 \quad (۱)$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{36} P^2 \quad (۴) \quad S = \frac{\sqrt{3}}{9} P^2 \quad (۳)$$

سؤال ۱۸: با فرض تابع بودن  $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & x \geq a \\ 3x - 1 & x \leq a \end{cases}$  مقدار  $a$  کدام است؟

$$-2 \quad (۴) \quad -1 \quad (۳) \quad 2 \quad (۲) \quad 1 \quad (۱)$$

سؤال ۱۹: اگر  $xf(3) + 3f(x) = x + 6$  باشد  $f(6)$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

سؤال ۲۰: اگر  $f(x) = x - 2f(-x)$  آنگاه ضابطه  $f(x)$  کدام است؟

- (۱)  $-x$  (۲)  $3x$  (۳)  $x$  (۴)  $-\frac{1}{3}$

سؤال ۲۱: اگر  $f(x) = ax^2 + (b-a)x + 4$  به طوری که  $f(-3) = 6$  مقدار  $f(3)$  کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) -۶ (۳) ۲ (۴) -۲

سؤال ۲۲: اگر  $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 12}$  آنگاه حاصل عبارت  $A = f(2 + \sqrt{7}) + f(2 - \sqrt{7}) - f(2)$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

سؤال ۲۳: اگر  $f(x) + xf(-x) = x^2 + 1$  باشد آنگاه  $f(2)$  کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۲ (۳) صفر (۴) ۳

### پاسخنامه تست ضابطه‌ی تابع

۱- پاسف: این تابع را یک تابع چند جمله‌ای می‌نامیم. چون به ازای هر عدد حقیقی تعریف شده است پس  $D_f = R$  است کلاً در توابع چند جمله‌ای دامنه  $R$  است. برای مناسبه برد ابتدا تابع  $f$  را به صورت  $f(x) = (x+2)^2 + 5$  می‌نویسیم. چون  $(x+2)^2 \geq 0$  پس  $f(x) \geq 5$  است به این ترتیب  $R_f = [5, +\infty)$ .

$$4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_f = [-2, 2] \quad (2)$$

می‌دانیم  $-x^2 \leq 0$  پس  $4 - x^2 \leq 4$  اما با توجه به دامنه تعریف تابع داریم:  $0 \leq 4 - x^2 \leq 4$  پس  $0 \leq \sqrt{4 - x^2} \leq 2$  پس  $R_f = [3, 5]$ .

۳) دامنه تابع  $R - \{0\}$  است می‌دانیم  $a, b > 0, \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$  یعنی واسطه هندسی دو عدد مثبت کمتر یا مساوی واسطه عددی آنها می‌باشد پس:

$$x > 0: \frac{x + \frac{4}{x}}{2} \geq \sqrt{x \times \frac{4}{x}} \Rightarrow x + \frac{4}{x} \geq 4$$

و اگر  $x < 0$  آنگاه  $x + \frac{4}{x} \leq -4$  پس به طور کلی  $R_f = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$

### ۲- پاسف: گزینه ۳

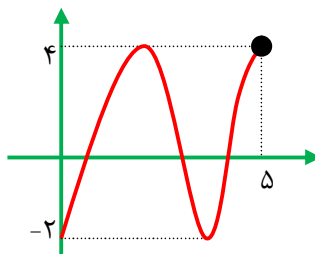
باید عبارت زیر رادیکال غیرمنفی باشد به کمک جدول تعیین علامت دامنه  $y$  را پیدا می‌کنیم:

$$D_y = [-2, 0] \cup [1, 3] \cup \{5\}$$

	-2	0	1	3	5
$f(x)$	+	-	+	+	-
$x-1$	-	-	+	+	+
$(x-1)f(x)$	-	+	-	+	-
	ن	ت	ن	ت	ن

اعداد صحیح در دامنه عبارتند از:  $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 5\}$  که تعداد آن‌ها ۷ تا است.

تذکره: اگر نمودار تابع را روی محور  $x$  ها تصویر کنیم، دامنه معلوم می‌شود و اگر نمودار  $f$  را روی محور عرض‌ها تصویر کنیم، برد معلوم می‌شود؛ مثلاً نمودار  $f$  را در شکل مقابل در نظر بگیرید:



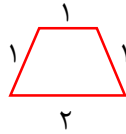
$$D_f = [0, 5]$$

$$R_f = [-2, 4]$$

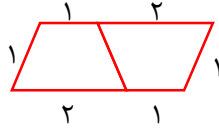
۳- پاسف: گزینه ۲

مطابق الگوی زیر می توان نشان داد در هر مرحله به اندازه جمع دو قاعده زوزنقه اولیه به محیط اضافه می شود:

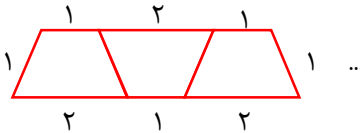
$$p_1 = (2+1) + 2 = 1 \times 3 + 2$$



$$p_2 = 2 \times (1+2) + 2 = 2 \times 3 + 2$$



$$p_3 = 3 \times (1+2) + 2 = 3 \times 3 + 2$$



در نتیجه در شکل  $k$  ام محیط به صورت زیر است:  $p_k = k \times 3 + 2 = 3k + 2$

تذکره: در واقع محیط های اشکال یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۳ و جمله اولیه ۵ می سازند.

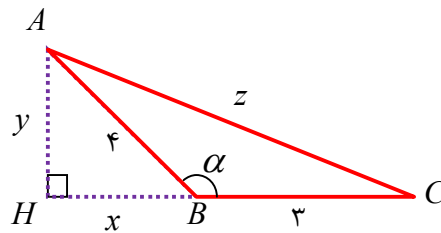
$$5, 8, 11, \dots \Rightarrow p_k = 5 + (k-1) \times 3 = 3k + 2$$

۴- پاسف: گزینه ۴

اگر زاویه بین دو ضلع مثلث منفرجه باشد شکل مثلث به صورت زیر است. اگر مساحت مثلث  $ABC$  را  $S$  بنامیم داریم:

$$S = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{3 \times y}{2} = \frac{3}{2}y$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{3}S$$



از طرفی بنا بر قضیه فیثاغورس در مثلث  $AHB$  داریم:  $x^2 + y^2 = 16$  (\*)

در مثلث قائم الزاویه  $AHC$  داریم:

$$AH^2 + HC^2 = AC^2 \Rightarrow y^2 + (x+3)^2 = z^2 \Rightarrow y^2 + x^2 + 6x + 9 = z^2$$

در نتیجه بنا بر (\*) داریم:  $z^2 = 16 + 16x + 9 = 25 + 6x$

بنا بر روابط  $z^2 = 25 + 6x$ ,  $x^2 + y^2 = 16$ ,  $y = \frac{2}{3}S$  می توانیم  $x$  را بر حسب  $S$  به دست آوریم و در رابطه بالا جایگزین کنیم:

$$x^2 + \left(\frac{2}{3}S\right)^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 16 - \frac{4}{9}S^2 = \frac{16 \times 9 - 4S^2}{9} \Rightarrow x^2 = \frac{4}{9}(36 - S^2) \Rightarrow x = \frac{2}{3}\sqrt{36 - S^2}$$

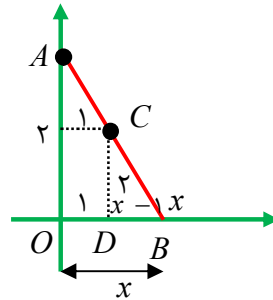
$$z^2 = 25 + 6x = 25 + 6 \times \frac{2}{3}\sqrt{36 - S^2} = 25 + 4\sqrt{36 - S^2} \Rightarrow z = \sqrt{25 + 4\sqrt{36 - S^2}}$$

۵- پاسخ: گزینه ۲

اگر طول نقطه  $B$  را  $x$  و عرض نقطه  $A$  را  $y$  در نظر بگیریم بنا بر قضیه تالس داریم:

$$CD \parallel OA : \frac{BD}{OB} = \frac{CD}{OA}$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{x} = \frac{2}{y} \Rightarrow y = \frac{2x}{x-1}$$

از طرفی بنا بر قضیه فیثاغورس در مثلث  $OAB$  داریم:

$$OA^2 + OB^2 = AB^2 \Rightarrow AB^2 = \left(\frac{2x}{x-1}\right)^2 + x^2 = \frac{4x^2}{(x-1)^2} + x^2 = x^2 \left(\frac{4}{(x-1)^2} + 1\right)$$

$$= x^2 \left(\frac{4 + (x-1)^2}{(x-1)^2}\right) = x^2 \left(\frac{x^2 - 2x + 5}{(x-1)^2}\right) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 (x^2 - 2x + 5)$$

۶- پاسخ: گزینه ۱

از روی نمودار معادله این تابع را مینویسیم: برای  $x$  های بزرگتر یا مساوی صفر یک سهمی با رأس  $(1, 1)$  و  $c = 2$  داریم. برای عبارت درجه دوم  $y = ax^2 + bx + c$  خواهیم داشت:

$$c = 2$$

$$\frac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow b = -2a \quad (1)$$

$$\frac{-\Delta}{4a} = 1 \Rightarrow \frac{-(b^2 - 4a(2))}{4a} = 1 \Rightarrow \frac{-b^2 + 8a}{4a} = 1 \Rightarrow b^2 = 4a \xrightarrow{(1)} (-2a)^2 = 4a$$

$$\Rightarrow 4a^2 = 4a \Rightarrow 4a(a-1) = 0 \xrightarrow{a>0} a = 1 \xrightarrow{(1)} b = -2 \Rightarrow y = x^2 - 2x + 2$$

و برای  $x$  های منفی قطعی داریم که از دو نقطه  $(0, 1)$  و  $(-\frac{1}{2}, 0)$  می‌گذرد. معادله آن می‌نویسیم:  $y = 2x + 1$ حال ضابطه تابع  $f(x)$  به دست می‌آید:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & x \geq 0 \\ 2x + 1 & x < 0 \end{cases}$$

$$f(3) = (3)^2 - 2(3) + 2 = 5, f(4) = (4)^2 - 2(4) + 2 = 10$$

$$f(-1) = 2(-1) + 1 = -1, f(-3/5) = 2(-3/5) + 1 = -6/5$$

$$\text{فاصل عبارت: } \frac{5 - (10)}{-(-1) - (-6/5)} = \frac{-5}{-5} = 1$$

۷- پاسخ: گزینه ۳

اگر  $x \geq 0$  باشد داریم:

$$f(x) = 0 \Rightarrow |x| - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 > 0 & \text{ق ق} \\ x = -1 < 0 & \text{ق غ} \end{cases}$$

اگر  $x < 0$  باشد داریم:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-5 + \sqrt{21}}{2} < 0 & \text{ق ق} \\ x_2 = \frac{-5 - \sqrt{21}}{2} < 0 & \text{ق ق} \end{cases}$$

پس این نمودار در مجموع محور طول ها را در سه نقطه قطع می کند.

۸- پاسخ: گزینه ۲

مییم تاکنر برابر است با:

مییم استوانه + (مییم هر نیم کره)  $\times 2 = V(r) =$  مییم تاکنر

$$\Rightarrow V(r) = 2 \left( \frac{2}{3} \pi r^3 \right) + \pi r^2 \times 8 \Rightarrow V(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 + 8\pi r^2$$

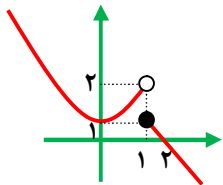
توجه کنید که مییم استوانه از رابطه «مساحت قاعده  $\times$  ارتفاع» قابل محاسبه است.

۹- پاسخ: گزینه ۳

برای آن که رابطه داده شده تابع باشد باید به ازای  $x = 0$  فقط یک  $y$  داشته باشیم پس داریم:

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow 2x + \frac{x-1}{|x|+1} = 0 + \frac{0-1}{0+1} = -1 \Rightarrow b-3 = -1 \Rightarrow b = 2 \\ x = 0 \Rightarrow b + 2x - 3 = b + 0 - 3 = b - 3 \end{cases}$$

۱۰- پاسخ: گزینه ۱



$$y = \begin{cases} 2-x & x \geq 1 \\ x^2+1 & x < 1 \end{cases}$$

به ازای  $a = 1$  ضابطه تابع به صورت

نمودار آن به صورت مقابل خواهد بود که برد آن  $R$  است.

۱۱- پاسخ: گزینه ۱

با توجه به دامنه تابع  $x \neq 0$  است با فرض  $x \neq 0$  داریم:

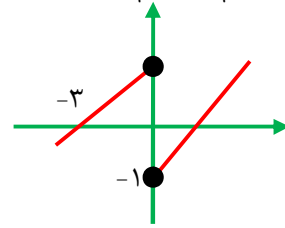
$$x^f > 0 \Rightarrow f(x^f) = (x^f)^f + (x^f)^f - 7 = x^{12} + x^8 - 7$$

$$-x^f < 0 \Rightarrow f(-x^f) = -(x^f)^f + 9 = x^{12} + 9$$

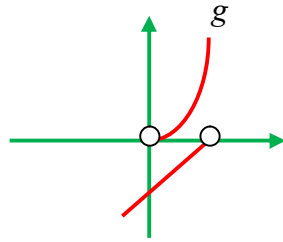
$$\Rightarrow x^{12} + x^8 - 7 - (x^{12} + 9) = 0 \Rightarrow x^8 = 16 \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{2}$$

۱۲- پاسخ: گزینه ۳

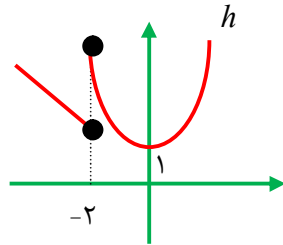
نمودار هر گزینه را رسم می‌کنیم:  
(گزینه ۱)



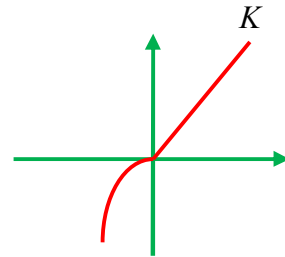
(گزینه ۲)



(گزینه ۴)



(گزینه ۳)



با توجه به نمودارها تنها گزینه (۳) تابع است.

۱۳- پاسخ: گزینه ۲

$$4a - 2 + 4a + b = 4(a - 1 + 4a + b) = 4(9a - 3 + 4a + b)$$

$$\Rightarrow 8a + b - 2 = 20a + 4b - 4 = 52a + 4b - 12 \Rightarrow \begin{cases} 12a + 3b = 2 \\ 32a = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow b = -\frac{1}{3} \Rightarrow a + b = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}$$

۱۴- پاسخ: گزینه ۴

ابتدا سعی می‌کنیم  $f(3)$  را به دست آوریم. برای این کار در دو طرف تساوی به جای  $x$  قرار می‌دهیم ۴، تا  $f(3)$  به دست آید:

$$x - 1 = 3 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow f(4 - 1) = 2 + 4^2 - 2f(3)$$

$$\Rightarrow f(3) = 18 - 2f(3) \Rightarrow 3f(3) = 18 \Rightarrow f(3) = 6$$

$$f(x - 1) = 2 + x^2 - 2 \times 6 = x^2 - 10$$

اگر به جای  $x$  در تساوی بالا قرار دهیم ۱- مقدار  $f(-2)$  به دست می‌آید:

$$x - 1 = -2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow f(-1 - 1) = (-1)^2 - 10 \Rightarrow f(-2) = 1 - 10 = -9$$

۱۵- پاسخ: گزینه ۲

روش اول) ابتدا سعی می‌کنیم ضابطه تابع  $f$  را به دست آوریم. اگر فرض کنیم  $2x - 1 = t$  است می‌توانیم  $x$  را بر حسب  $t$  به دست آوریم:

$$2x - 1 = t \Rightarrow x = \frac{t+1}{2} \Rightarrow f(\underbrace{2x-1}_t) = x^2 - x = \left(\frac{t+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{t+1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{t^2 + 2t + 1}{4} - \frac{t+1}{2} = \frac{t^2 + 2t + 1 - 2t - 2}{4} = \frac{t^2 - 1}{4}$$

در نتیجه  $f(x) = \frac{t^2 - 1}{4}$  است پس:

$$f(3x+1) = \frac{(3x+1)^2 - 1}{4} = \frac{9x^2 + 6x + 1 - 1}{4} = \frac{9x^2 + 6x}{4} \Rightarrow 4f(3x+1) = 9x^2 + 6x$$

روش دوم (۴) می‌دانیم  $(2x+1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$  در نتیجه:

$$4x^2 - 4x = (2x+1)^2 - 1 \Rightarrow x^2 - x = \frac{(2x-1)^2 - 1}{4}$$

پس اگر  $2x - 1 = t$  باشد  $x^2 - x = \frac{t^2 - 1}{4}$  است:

$$f(2x-1) = \frac{(2x-1)^2 - 1}{4} \Rightarrow f(t) = \frac{t^2 - 1}{4} \Rightarrow 4f(3x+1) = (3x+1)^2 - 1 = 9x^2 + 6x$$

۱۶- پاسخ: گزینه ۱

اگر در تساوی  $f(x) + 2f(-x) = x^2 + x$  به جای  $x$  یک بار ۲ و یک بار -۲ قرار دهیم داریم:

$$x = 2 \Rightarrow f(2) + 2f(-2) = 2^2 + 2 = 10$$

$$x = -2 \Rightarrow f(-2) + 2f(2) = (-2)^2 + (-2) = -10$$

در نتیجه با حل دستگاه زیر  $f(2)$  را می‌توان به دست آورد:

$$\begin{cases} f(2) + 2f(-2) = 10 \\ f(-2) + 2f(2) = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(2) + 2f(-2) = 10 \\ -2f(-2) - 4f(2) = 20 \end{cases}$$

$$-3f(2) = 30 \Rightarrow f(2) = -10$$

۱۷- پاسخ: گزینه ۴

اگر طول هر ضلع مثلث متساوی الاضلاع برابر  $x$  باشد، محیط آن برابر  $3x$  و مساحت آن برابر  $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$  است؛ پس:

$$P = 3x$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$



چون  $P = 3x$  است؛ پس  $x = \frac{P}{3}$  است یعنی از تقسیم محیط بر ۳، طول ضلع به دست می‌آید. اگر در رابطه مساحت بر حسب طول ضلع به جای  $x$  قرار دهیم  $\frac{P}{3}$  مساحت بر حسب محیط به دست می‌آید:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \frac{P}{3} \right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{P^2}{9} = \frac{\sqrt{3}}{36} P^2$$

۱۸- پاسخ: گزینه ۱

با توجه به آنکه ورودی  $a$  هم وارد ضابطه  $y = x^2 + a$  و هم وارد ضابطه  $y = 3x - 1$  می‌شود پس لازم است این دو فروبی یکسان باشند تا  $f$  تابع باشد:

$$\begin{cases} f(a) = a^2 + a \\ f(a) = 3a - 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 + a = 3a - 1 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a - 1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

۱۹- پاسخ: گزینه ۲

ابتدا باید  $f(3)$  را بیابیم پس مقدار  $x$  را در رابطه برابر با ۳ قرار می‌دهیم:

$$3f(3) + 3f(3) = 3 + 6 = 9 \Rightarrow 6f(3) = 9 \Rightarrow f(3) = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

حال مقدار  $f(3)$  را در رابطه اصلی قرار می‌دهیم تا  $f(x)$  به دست آید:

$$\Rightarrow 3f(x) = -\frac{3}{2}x + x + 6 \Rightarrow -\frac{1}{2}x + 6 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{6}x + 2$$

$$\Rightarrow f(6) = -\frac{1}{6}(6) + 2 = 1$$

۲۰- پاسخ: گزینه ۱

با تبدیل  $x$  به  $-x$  داریم:

$$\begin{cases} f(x) + 2f(-x) = x \\ -2 \times \begin{cases} f(-x) + 2f(x) = -x \\ -2f(-x) - 4f(x) = +2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) + 2f(-x) = x \\ -2f(-x) - 4f(x) = +2x \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -3f(x) = 3x \Rightarrow f(x) = -x$$

۲۱- پاسخ: گزینه ۳

$$f(-3) = 6 \Rightarrow 6 = a(-3)^2 + (b-1)(-3) + 4 \Rightarrow -27a - 3b + 7 = 6$$

$$\Rightarrow -27a - 3b = -1 \Rightarrow 27a + 3b = 1$$

$$f(3) = a(3)^2 + (b-1)(3) + 4 = \underbrace{27a + 3b}_1 + 1 = 2$$

۲۲- پاسخ: گزینه ۱

$$f(x) = \sqrt{-(x^2 - 4x - 12)} = \sqrt{-[(x-2)^2 - 16]}$$

$$f(2 + \sqrt{7}) = \sqrt{-[(2 + \sqrt{7} - 2)^2 - 16]} = \sqrt{-(7 - 16)} = \sqrt{9} = 3$$

$$f(2 - \sqrt{7}) = \sqrt{-[(2 - \sqrt{7} - 2)^2 - 16]} = \sqrt{-(7 - 16)} = \sqrt{9} = 3$$

$$f(2) = \sqrt{-[(2-2)^2 - 16]} = \sqrt{-(0 - 16)} = 4$$

$$A = 3 + 3 - 4 = 2$$

۲۳- پاسخ: گزینه ۱

برای مناسبه  $f(2), f(-2)$  را نیز باید بیابیم با جای‌گذاری  $x = -2, x = 2$  در رابطه داده شده داریم:

$$\begin{cases} f(2) + 2f(-2) = (2)^2 + 1 \\ f(-2) - 2f(2) = (-2)^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(2) + 2f(-2) = 5 \\ f(-2) - 2f(2) = 5 \end{cases} \Rightarrow f(-2) = 3, f(2) = -1$$

# ایمان نخستین



دهم

یازدهم

دوازدهم

کنکور

طراح سوالات ریاضی قلم چی  
مدرس طرح کنکور مدارس گیلان  
(رشت، لاهیجان، لنگرود، رودسر و ...)

۰۹۱۱۱۴۳ ۶۷۶۴

 nakhostin\_math

 nakhostin\_math