



RIAZISARA

www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

سراسری ریاضی ۹۸

به ازای کدام مجموعه مقادیر m معادله درجه دوم $(2m-1)x^2 + 6x + m - 2 = 0$ ، دارای دو ریشه حقیقی است؟

$$(1) \quad -2 < m < 2/5 \quad (2) \quad -2 < m < 3/5$$

$$(3) \quad -1 < m < 3/5 \quad (4) \quad -1 < m < 2/5$$

$$\Delta' > 0 \rightarrow (3)^2 - (2m-1)(m-2) > 0 \rightarrow 9 - (2m^2 - 4m - m + 2) > 0$$

$$2m^2 - 5m - 7 < 0 \xrightarrow{b=a+c} -1 < m < \frac{7}{2}$$

۱

سراسری ریاضی ۹۸ - خارج از کشور

به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، سهمی به معادله $y = (1-m)x^2 + 2(m-3)x - 1$ ، همواره زیر محور X ها است؟

$$(1) \quad 1 < m < 5 \quad (2) \quad 2 < m < 5 \quad (3) \quad 2 < m < 4 \quad (4) \quad 2 < m < 6$$

نکته: شرط پائین بودن نمودار تابع زیر محور X ها، I) $\Delta < 0$ II) $a < 0$

$$(1-m)x^2 + 2(m-3)x - 1 < 0 \rightarrow \begin{cases} \text{I) } a < 0 \rightarrow 1-m < 0 \rightarrow m > 1 \\ \text{II) } \Delta < 0 \rightarrow 2 < m < 5 \end{cases} \xrightarrow{\cap} 2 < m < 5$$

$$\Delta' < 0 \rightarrow (m-3)^2 - (1-m)(-1) < 0 \rightarrow m^2 - 7m + 10 < 0 \rightarrow 2 < m < 5$$

۲

سراسری تجربی ۹۷

به ازای کدام مقادیر m ، معادله درجه دوم $(m-6)x^2 - 2mx - 3 = 0$ ، دارای دو ریشه حقیقی منفی است؟

$$(1) \quad m < -6 \quad (2) \quad m > 3$$

$$(3) \quad 0 < m < 3 \quad (4) \quad 3 < m < 6$$

۳

$$(m-6)x^2 - 2mx - 3 = 0 \xrightarrow{\substack{a=m-6, b=-2m, c=-3 \\ 1)\Delta > 0 \quad 2)S < 0 \quad 3)P > 0}} b' = \frac{b}{2} = -m$$

$$1) \quad \Delta > 0 \text{ or } \Delta' > 0 \rightarrow (-m)^2 - (m-6)(-3) > 0 \rightarrow m^2 + 3m - 18 > 0$$

$$(m-3)(m+6) > 0 \rightarrow m < -6 \vee m > 3 \quad \text{(I)}$$

$$2) \quad S < 0 \rightarrow -\frac{b}{a} < 0 \rightarrow -\frac{-2m}{m-6} < 0 \rightarrow \frac{2m}{m-6} < 0 \rightarrow 0 < m < 6 \quad \text{(II)}$$

$$3) \quad P > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow \frac{-3}{m-6} > 0 \rightarrow m-6 < 0 \rightarrow m < 6 \quad \text{(III)}$$

$$\text{(I), (II), (III)} \xrightarrow{\cap} 3 < m < 6$$

سراسری تجربی ۹۷ - خارج از کشور

به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله درجه دوم $x^2 + (m-2)x + m + 1 = 0$ ، دارای دو ریشه حقیقی مثبت است؟

$$(1) -1 < m < 0 \quad (2) m < 0 \quad (3) 2 < m < 8 \quad (4) m > 8$$

۴

$$x^2 + (m-2)x + m + 1 = 0 \xrightarrow{a=1, b=m-2, c=m+1} (I), (II), (III) \xrightarrow{\cap} -1 < m < 0$$

$$1) \Delta > 0 \quad 2) S > 0 \quad 3) P > 0$$

$$1) \Delta > 0 \longrightarrow (m-2)^2 - 4(1)(m+1) > 0 \longrightarrow m^2 - 8m > 0 \longrightarrow (-\infty, 0) \cup (8, +\infty) \quad (I)$$

$$2) S > 0 \longrightarrow -\frac{b}{a} > 0 \longrightarrow -\frac{m-2}{1} > 0 \longrightarrow -m+2 > 0 \longrightarrow m < 2 \quad (II)$$

$$3) P > 0 \longrightarrow \frac{c}{a} > 0 \longrightarrow \frac{m+1}{1} > 0 \longrightarrow m+1 > 0 \longrightarrow m > -1 \quad (III)$$

سراسری تجربی ۹۴

ریشه های کدام معادله، از معکوس ریشه های معادله درجه دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ، یک واحد کمتر است؟

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \quad (1) \quad x^2 + 3x + 1 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 - 5x + 2 = 0 \quad (3) \quad x^2 + 5x + 2 = 0 \quad (4)$$

نکته: تشکیل معادله درجه دوم جدید

الف) ریشه معادله قدیم را X و ریشه معادله جدید را Y فرض می کنیم.

ب) با توجه شرط مساله، رابطه بین X و Y را می یابیم.

ج) X را بر حسب Y نوشته و در معادله قدیم جایگذاری می کنیم تا معادله خواسته شده به دست آید.

۵

روش اول:

$$y = \frac{1}{x} - 1 \longrightarrow y + 1 = \frac{1}{x} \longrightarrow x = \frac{1}{y+1} \xrightarrow{2x^2 - 3x - 1 = 0} 2\left(\frac{1}{y+1}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{y+1}\right) - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\times(y+1)^2} 2 - 3(y+1) - 1(y+1)^2 = 0 \longrightarrow y^2 + 5y + 2 = 0$$

روش دوم:

$$2x^2 - 3x - 1 = 0 \longrightarrow S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{3}{2} \quad P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$$

$$S' = \frac{1}{\alpha} - 1 + \frac{1}{\beta} - 1 = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} - 2 = -\frac{1}{3} - 2 = -\frac{7}{3}$$

$$P' = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\left(\frac{1}{\beta} - 1\right) = \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta} + 1 = -\frac{2}{3} + 3 + 1 = \frac{11}{3} \xrightarrow{x^2 - S'x + P = 0} x^2 + 5x + 2 = 0$$

تذکره: با توجه به گزینه ۴ و به دست آوردن $S' = -\frac{7}{3}$ نیازی به P' نیست.

سراسری تجربی ۹۴ - خارج از کشور

به ازای کدام مقادیر a ، معادله $x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x = 4$ دارای سه ریشه حقیقی متمایز مثبت است؟

$$a < -4 \quad (1) \quad a > -4 \quad (2) \quad a < 4 \quad (3) \quad a > 4 \quad (4)$$

چون مجموع ضرایب معادله $x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 = 0$ است پس یکی از جواب ها $x = 1$ می باشد، در نتیجه بر $x - 1$ بخش پذیر است.

$$x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 = 0 \rightarrow (x-1)(x^2 + ax + 4) = 0 \xrightarrow[\Delta > 0, S > 0, P > 0]{\Delta > 0} a < -4$$

۶

سراسری تجربی ۹۳

به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه های حقیقی معادله $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ برابر ۶ می باشد؟

$$-\frac{9}{5} \quad (1) \quad 1 \quad (2) \quad -\frac{9}{5}, 1 \quad (3) \quad -1, \frac{9}{5} \quad (4)$$

$$mx^2 - (m+3)x + 5 = 0 \rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 6 \rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 6 \rightarrow \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{m}\right) = 6$$

$$\frac{m^2 + 6m + 9}{m^2} - \frac{10}{m} = 6 \rightarrow 5m^2 + 4m - 9 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} m_1 = 1 \rightarrow \text{false} \\ m_2 = \frac{c}{a} = -\frac{9}{5} \end{cases}$$

چون معادله دارای ریشه حقیقی است پس باید $\Delta > 0$

$$\text{if } m = 1 \rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0 \rightarrow \Delta < 0 \rightarrow \text{false}$$

۷

سراسری تجربی ۹۳ - خارج از کشور

به ازای کدام مقدار m ، نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ بر نیمساز ناحیه اول محورهای مختصات مماس است؟

$$-4 \quad (1) \quad -12, 4 \quad (2) \quad 12, -4 \quad (3) \quad 12 \quad (4)$$

$$\begin{cases} y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6 \\ y = x \end{cases} \rightarrow 2x^2 + (m+1)x + m + 6 = x \rightarrow 2x^2 + mx + m + 6 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta=0} m^2 - 8m - 48 = 0 \rightarrow (m-12)(m+4) = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 12 \\ m = -4 \end{cases}$$

$$\text{if } m = 12 \rightarrow 2x^2 + 12x + 18 = 0 \rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \rightarrow (x+3)^2 = 0 \rightarrow x = -3$$

$$\text{if } m = -4 \rightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$$

تذکر: به ازای $m = 12$ ، نمودار تابع بر نیمساز ربع سوم مماس است.

۸

سراسری تجربی ۹۰

مجموع ریشه های حقیقی معادله $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$ ، کدام است ؟

(۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۴

نکته: برخی از معادلات را می توان با استفاده از روش تغییر متغیر به معادله درجه دوم تبدیل کرد .

$$(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0 \xrightarrow{x^2 + x = t} t^2 - 18t + 72 = 0 \longrightarrow (t - 6)(t - 12) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = 6 \longrightarrow x^2 + x = 6 \longrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \longrightarrow x = -3, x = 2 \\ t = 12 \longrightarrow x^2 + x = 12 \longrightarrow x^2 + x - 12 = 0 \longrightarrow x = -4, x = 3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = 6 \longrightarrow x^2 + x = 6 \longrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -1 \\ t = 12 \longrightarrow x^2 + x = 12 \longrightarrow x^2 + x - 12 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} S = x_3 + x_4 = -\frac{b}{a} = -1 \end{array} \right.$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 - 1 = -2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 - 1 = -2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 - 1 = -2$$

سراسری تجربی ۹۰ - خارج از کشور

به ازای کدام مقدار m ، ریشه های حقیقی معادله $mx^2 + 3x + m^2 = 2$ ، معکوس یکدیگرند ؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

$$mx^2 + 3x + m^2 = 2 \longrightarrow mx^2 + 3x + m^2 - 2 = 0 \xrightarrow{\alpha = \frac{1}{\beta}} \alpha \times \beta = 1 \longrightarrow \frac{c}{a} = 1$$

$$\frac{m^2 - 2}{m} = 1 \xrightarrow{m \neq 0} m^2 - m - 2 = 0 \longrightarrow (m - 2)(m + 1) = 0 \longrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \end{cases}$$

$$\text{if } m = 2 \longrightarrow 2x^2 + 3x + 2 = 0 \xrightarrow{\Delta \geq 0} 9 - 4(2)(2) = -7 < 0 \longrightarrow \text{false}$$

$$\text{if } m = -1 \longrightarrow -x^2 + 3x - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta \geq 0} 9 - 4(-1)(-1) = 5 > 0 \longrightarrow \text{True}$$

سراسری تجربی ۸۹ - خارج از کشور

به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله درجه دوم $2x^2 + (m+1)x + \frac{1}{2}m + 2 = 0$ ، فاقد ریشه حقیقی است ؟

(۱) $-3 < m < 5$ (۲) $-3 < m < 4$ (۳) $-2 < m < 4$ (۴) $-1 < m < 5$

نکته: اگر $\Delta < 0$ ، سهمی همواره مثبت یا منفی است . (سهمی محور x ها را قطع نمی کند)

$$2x^2 + (m+1)x + \frac{1}{2}m + 2 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} (m+1)^2 - 4(2)\left(\frac{1}{2}m + 2\right) < 0 \longrightarrow m^2 - 2m - 15 < 0$$

$$(m - 5)(m + 3) < 0 \longrightarrow -3 < m < 5$$

سراسری تجربی ۸۸

به ازای کدام مقادیر m ، از معادله $mx - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0$ ، فقط یک جواب برای x حاصل می شود؟

$$\frac{3}{2} < m < 2 \quad (1) \quad 0 < m < 2 \quad (2) \quad \frac{3}{2} < m < \frac{5}{2} \quad (3) \quad \frac{3}{2} < m < 2 \quad (4)$$

از تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$ استفاده می کنیم.

برای این که معادله درجه دوم، دو ریشه مختلف علامه داشته باشد باید:

$$mx - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0 \xrightarrow{\sqrt{x}=t} mt^2 - 3t + m - 2 = 0$$

اگر معادله فوق یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی داشته باشد، در این صورت مقدار منفی t غیر قابل قبول خواهد بود چون \sqrt{x} منفی نمی شود و فقط یک جواب مثبت برای t و در نتیجه برای \sqrt{x} به دست می آید.

$$mt^2 - 3t + m - 2 = 0 \rightarrow P < 0 \rightarrow \frac{c}{a} < 0 \rightarrow \frac{m-2}{m} < 0 \rightarrow (0, 2)$$

تذکر: اگر $\Delta = 0$ و $m = -\frac{b}{2a} > 0$ باشد، معادله درجه دوم، دارای ریشه مضاعف مثبت است.

$$\Delta = 0 \rightarrow 9 - 4m(m-2) = 0 \rightarrow 4m^2 - 8m - 9 = 0$$

$$\frac{b' = \frac{b}{2} = -4}{\Delta' = 52} \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{52}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{13}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{13}}{2} \xrightarrow{-\frac{b}{2a} > 0} x = 1 + \frac{\sqrt{13}}{2} \quad (2)$$

$$m \in (0, 2) \cup \left\{ 1 + \frac{\sqrt{13}}{2} \right\}$$

۱۲

سراسری تجربی ۸۸ - خارج از کشور

به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، از معادله $x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0$ ، دو جواب متمایز برای x حاصل می شود؟

$$m \geq 1 \quad (1) \quad m < 2 \quad (2) \quad 1 \leq m < 2 \quad (3) \quad \text{هیچ مقدار } m \quad (4)$$

حالت اول: دارای دو ریشه حقیقی متمایز مثبت باشد.

$$x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0 \xrightarrow{\sqrt{x}=t} t^2 - 2t + m - 1 = 0 \rightarrow \begin{matrix} 1) \Delta > 0 \\ 2) S > 0 \\ 3) P > 0 \end{matrix}$$

$$1) 4 - 4(m-1) > 0 \rightarrow m < 2$$

$$2) -\frac{b}{a} > 0 \rightarrow 2 > 0 \quad \cap \rightarrow 1 < m < 2 \quad (1)$$

$$3) \frac{c}{a} > 0 \rightarrow m - 1 > 0 \rightarrow m > 1$$

حالت دوم: دارای یک ریشه صفر و یک ریشه مثبت باشد. برای این منظور باید $C = 0$ و $-\frac{b}{a} = 2 > 0$ باشد.

$$m - 1 = 0 \rightarrow m = 1 \quad (2) \quad \xrightarrow{(1) \cup (2)} 1 \leq m < 2$$

۱۳

سراسری تجربی ۸۷

ریشه های معادله درجه دوم $x^2 + ax + b = 0$ ، یک واحد از ریشه های معادله $3x^2 + 7x + 1 = 0$ بیشتر است .
b کدام است ؟

$$\frac{4}{3} \quad (4) \qquad \frac{2}{3} \quad (3) \qquad -1 \quad (2) \qquad -2 \quad (1)$$

روش اول:

$$3x^2 + 7x + 1 = 0 \xrightarrow[x=y-1]{y=x+1} 3(y-1)^2 + 7(y-1) + 1 = 0$$

$$3y^2 + y - 3 = 0 \xrightarrow{\div 3} y^2 + \frac{1}{3}y - 1 = 0 \xrightarrow{x^2+ax+b=0} a = \frac{1}{3} \wedge b = -1$$

روش دوم:

$$3x^2 + 7x + 1 = 0 \longrightarrow S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{7}{3} \qquad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$$

$$x^2 + ax + b = 0 \longrightarrow \begin{cases} S' = -a = (\alpha + 1) + (\beta + 1) = -\frac{7}{3} + 2 = -\frac{1}{3} \longrightarrow a = \frac{1}{3} \\ P' = b = (\alpha + 1)(\beta + 1) = \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = -1 \longrightarrow b = -1 \end{cases}$$

۱۴

سراسری تجربی ۸۶

اگر هر یک از ریشه های معادله $3x^2 + ax + b = 0$ ، دو برابر معکوس هر ریشه از معادله $4x^2 - 7x + 3 = 0$ باشد ، a کدام است ؟

$$-6 \quad (4) \qquad -8 \quad (3) \qquad -12 \quad (2) \qquad -14 \quad (1)$$

$$\frac{y=\frac{2}{x}}{x=\frac{2}{y}} \rightarrow 4\left(\frac{2}{y}\right)^2 - 7\left(\frac{2}{y}\right) + 3 = 0 \longrightarrow 3y^2 - 14y + 16 = 0 \xrightarrow{3x^2+ax+b=0} \begin{cases} a = -14 \\ b = 16 \end{cases}$$

۱۵

روش دوم:

$$4x^2 - 7x + 3 = 0 \longrightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{7}{4} \\ P = \alpha.\beta = \frac{c}{a} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$3x^2 + ax + b = 0 \longrightarrow \begin{cases} S' = -\frac{a}{3} = \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = \frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha.\beta} \longrightarrow a = -14 \\ P' = \frac{b}{3} = \frac{4}{\alpha.\beta} \longrightarrow b = 16 \end{cases}$$

سراسری تجربی ۸۶ - خارج از کشور

خط به معادله $y = mx + 4$ با منحنی به معادله $y = -x^2 + 2x$ ، هیچ نقطه مشترکی ندارند. مجموعه مقادیر m ، به کدام صورت است؟

(۱) $m < 0$ (۲) $m > 4$ (۳) $-1 < m < 4$ (۴) $-2 < m < 6$

۱۶

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x \\ y = mx + 4 \end{cases} \longrightarrow -x^2 + 2x = mx + 4 \longrightarrow x^2 + (m-2)x + 4 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0}$$

$$(m-2)^2 - 16 < 0 \longrightarrow (m-2)^2 < 16 \longrightarrow -4 < m-2 < 4 \xrightarrow{+2} -2 < m < 6$$

سراسری تجربی ۸۶ - خارج از کشور

ریشه های معادله $3x^2 + ax + b = 0$ ، از ریشه های معادله $3x^2 - 4x - 1 = 0$ یک واحد بیشتر است. b ، کدام است؟

(۱) -5 (۲) 2 (۳) 4 (۴) 6

۱۷

$$3x^2 - 4x - 1 = 0 \xrightarrow[\begin{smallmatrix} y=x+1 \\ x=y-1 \end{smallmatrix}]{y=x+1} 3(y-1)^2 - 4(y-1) - 1 = 0 \longrightarrow 3y^2 - 10y + 6 = 0$$

$$3x^2 + ax + b = 0 \longrightarrow a = -10 \wedge b = 6$$

سراسری تجربی ۸۵

اگر معادله $x^4 - (m+2)x^2 + m + 5 = 0$ دارای ۴ ریشه حقیقی متمایز باشد، مجموعه مقادیر m کدام است؟

(۱) $m < -4$ (۲) $m > 4$ (۳) $-4 < m < 4$ (۴) $4 < m < 9$

۱۸

نکته: معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ در صورتی دارای دو ریشه مثبت است که:

الف) $\Delta > 0$ (ب) $S = -\frac{b}{a} > 0$ (ج) $P = \frac{c}{a} > 0$

از تغییر متغیر $x^2 = t$ استفاده می کنیم. اگر معادله زیر دارای دو ریشه مثبت باشد، در این صورت معادله اصلی دارای چهار ریشه حقیقی متمایز خواهد داشت.

$$x^4 - (m+2)x^2 + m + 5 = 0 \xrightarrow{x^2=t>0} t^2 - (m+2)t + m + 5 = 0$$

$$1) (m+2)^2 - 4(m+5) > 0 \longrightarrow m^2 > 16 \longrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < -4 \end{cases}$$

$$2) \frac{c}{a} > 0 \longrightarrow m + 5 > 0 \longrightarrow m > -5 \xrightarrow{(1) \cap (2) \cap (3)} m > 4$$

$$3) -\frac{b}{a} > 0 \longrightarrow m + 2 > 0 \longrightarrow m > -2$$

سراسری تجربی ۸۴ - خارج از کشور

در معادله درجه دوم $2x^2 + ax + 9 = 0$ یک ریشه دو برابر ریشه دیگر است. مجموع دو ریشه مثبت کدام است؟

- (۱) $3/5$ (۲) 4 (۳) $4/5$ (۴) 5

$$2x^2 + ax + 9 = 0 \xrightarrow{\beta=2\alpha} \alpha + \beta = -\frac{a}{2} \rightarrow 3\alpha = -\frac{a}{2} \rightarrow 3\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{a}{2} \rightarrow a = -9$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{9}{2} \rightarrow 2\alpha^2 = \frac{9}{2} \rightarrow \alpha^2 = \frac{9}{4} \rightarrow \alpha = \pm \frac{3}{2}$$

$$\alpha + \beta = -\frac{a}{2} \rightarrow \alpha + \beta = -\frac{-9}{2} = 4/5$$

۱۹

سراسری تجربی ۸۳

اگر یکی از منحنی های تابع درجه دوم $y = (a-1)x^2 + x + 3$ نسبت به خط $x = 2$ متقارن باشد، این منحنی محور x ها را با کدام طول مثبت قطع می کند؟

- (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 6

نکته: در تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ معادله محور تقارن $x = -\frac{b}{2a}$ می باشد.

چون خط $x = 2$ محور تقارن تابع است پس طول رأس سهمی نیز می باشد.

$$x = -\frac{b}{2a} \xrightarrow{x=2} -\frac{1}{2a-2} = 2 \rightarrow 4a - 4 = -1 \rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$y = (a-1)x^2 + x + 3 \rightarrow y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3 \xrightarrow{y=0} x^2 - 4x - 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -2 \end{cases}$$

نکته: ریشه های معادله $f(x) = 0$ ، همان برخورد نمودار تابع f با محور x ها می باشد.

۲۰

سراسری تجربی ۸۱

به ازای کدام مقادیر a ، معادله درجه دوم $2x^2 + ax + a - \frac{3}{2} = 0$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز است؟

- (۱) $(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$ (۲) $(-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$ (۳) $(2, 6)$ (۴) $(3, 4)$

نکته: در صورتی معادله درجه دوم، دارای دو ریشه حقیقی متمایز است که $\Delta > 0$ باشد.

$$2x^2 + ax + a - \frac{3}{2} = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} (a)^2 - 4(2)(a - \frac{3}{2}) > 0 \rightarrow a^2 - 8a + 12 > 0$$

$$(a-2)(a-6) > 0 \rightarrow (-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$$

۲۱

<p>سراسری تجربی ۷۹</p> <p>به ازای کدام مقدار k ، در معادله درجه دوم $2x^2 - x + k = 0$ بین ریشه ها ، رابطه $x_1 + 2x_2 = 3$ برقرار است ؟</p> <p>(۱) -۱۲ (۲) -۱۰ (۳) ۸ (۴) ۶</p> $2x^2 - x + k = 0 \rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{1}{2} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{k}{2}$ $x_1 + 2x_2 = 3 \rightarrow (x_1 + x_2) + x_2 = 3 \rightarrow \frac{1}{2} + x_2 = 3 \rightarrow x_2 = \frac{5}{2}$ $x_1 + 2\left(\frac{5}{2}\right) = 3 \rightarrow x_1 = -2 \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{k}{2} \rightarrow -5 = \frac{k}{2} \rightarrow k = -10$ <p>or $x_2 = \frac{5}{2} \rightarrow \frac{25}{2} - \frac{5}{2} + k = 0 \rightarrow k = -10$</p>	<p>۲۲</p>
<p>سراسری تجربی ۷۸</p> <p>در معادله $(x+1)(x^2 - x + 6m) = 0$ ، حاصلضرب سه ریشه -۶ است ، مقدار m کدام است ؟</p> <p>(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴</p> $(x+1)(x^2 - x + 6m) = 0 \xrightarrow{x=-1, \alpha, \beta} (-1)\alpha\beta = -6 \rightarrow \alpha\beta = 6 \xrightarrow{P=6} 6m = 6 \rightarrow m = 1$	<p>۲۳</p>
<p>سراسری تجربی ۷۷</p> <p>در معادله درجه دوم $2x^2 + (2k-1)x - k = 0$ به ازای کدام مقدار k ، مجموع معکوس هر دو ریشه برابر $\frac{7}{3}$ است ؟</p> <p>(۱) -۴ (۲) -۳ (۳) ۳ (۴) ۴</p> $2x^2 + (2k-1)x - k = 0 \xrightarrow{\alpha, \beta} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{7}{3} \rightarrow \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{7}{3} \rightarrow \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{7}{3} \rightarrow \frac{-b}{c} = \frac{7}{3}$ $\frac{-b}{c} = \frac{7}{3} \rightarrow \frac{2k-1}{k} = \frac{7}{3} \rightarrow k = -3$	<p>۲۴</p>
<p>سراسری تجربی ۷۵</p> <p>در معادله درجه دوم $x^2 - ax + a + 2 = 0$ تفاضل دو ریشه برابر ۲ است ، a کدام است ؟</p> <p>(۱) -۶، -۲ (۲) -۶، ۲ (۳) ۶، -۲ (۴) ۶، ۲</p> $ \alpha - \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{ a } \xrightarrow{\alpha - \beta = 2} \frac{\sqrt{a^2 - 4(a+2)}}{1} = 2 \rightarrow a^2 - 4a - 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ a = -2 \end{cases}$	<p>۲۵</p>

سراسری ریاضی ۹۷

معادله $(x^2 - 2x)^2 - (x^2 - 2x) = 2$ ، چند ریشه حقیقی دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$(x^2 - 2x)^2 - (x^2 - 2x) = 2 \xrightarrow{x^2 - 2x = t} t^2 - t - 2 = 0 \xrightarrow{b=a+c} \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases}$$

۲۶

$$t = -1 \longrightarrow x^2 - 2x = -1 \longrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} \boxed{1}$$

$$t = 2 \longrightarrow x^2 - 2x = 2 \longrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \boxed{2}$$

سراسری ریاضی ۹۶

به ازای کدام مقدار a ، معادله درجه دوم $x^2 - 2(a-2)x + 14 - a = 0$ ، دارای دو ریشه مثبت است؟ $5 < a < 14$ (۴) $2 < a < 14$ (۳) $2 < a < 5$ (۲) $-2 < a < 2$ (۱)**نکته:** معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ در صورتی دارای دو ریشه مثبت است که:

$$1) \Delta' > 0 \quad b' = \frac{b}{2} = 2 - a \quad \Delta' > 0 \longrightarrow b'^2 - ac > 0 \longrightarrow (2 - a)^2 - 1(14 - a) > 0$$

۲۷

$$4 - 4a + a^2 - 14 + a > 0 \longrightarrow a^2 - 3a - 10 > 0 \longrightarrow (a - 5)(a + 2) > 0 \longrightarrow \begin{cases} a > 5 \\ a < -2 \end{cases} \quad (I)$$

$$2) P = \frac{c}{a} > 0 \longrightarrow 14 - a > 0 \longrightarrow a < 14 \quad (II)$$

$$3) S = -\frac{b}{a} > 0 \longrightarrow -\frac{-2(a-2)}{1} > 0 \longrightarrow a - 2 > 0 \longrightarrow a > 2 \quad (III)$$

$$(I) \cap (II) \cap (III) \longrightarrow 5 < a < 14$$

سراسری ریاضی ۹۶

به ازای کدام مقدار m ، مجموع جذر هر دو ریشه معادله درجه دوم $2x^2 - (m+1)x + \frac{1}{8} = 0$ برابر ۲ می باشد؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۲۸

$$2x^2 - (m+1)x + \frac{1}{8} = 0 \longrightarrow \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 2 \longrightarrow \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = 4$$

$$\frac{m+1}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{16}} = 4 \longrightarrow \frac{m+1}{2} + \frac{1}{2} = 4 \longrightarrow m+1+1=8 \longrightarrow \boxed{m=6}$$

سراسری ریاضی ۹۶ - خارج از کشور

به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع $y = (1-a)x^2 + 2\sqrt{6}x - a$ ، همواره بالای محور x ها است؟

$$a < 1 \quad (1) \quad a < -2 \quad (2) \quad a > 3 \quad (3) \quad -2 < a < 1 \quad (4)$$

نکته: نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ در صورتی همواره بالای محور طول هاست که:

$$1) \quad a > 0 \longrightarrow 1 - a > 0 \longrightarrow a < 1 \quad (I)$$

$$2) \quad \Delta' < 0 \quad b' = \frac{b}{a} = \sqrt{6} \quad \Delta' < 0 \longrightarrow b'^2 - ac < 0 \longrightarrow (\sqrt{6})^2 - (1-a)(-a) < 0$$

$$6 + a - a^2 < 0 \longrightarrow a^2 - a - 6 > 0 \longrightarrow (a-3)(a+2) > 0 \longrightarrow a > 3 \vee a < -2 \quad (II)$$

$$\underline{(I) \cap (II)} \longrightarrow a < -2$$

۲۹

سراسری ریاضی ۹۶ - خارج از کشور

به ازای کدام مقدار m ، هر یک از ریشه های معادله درجه دوم $8x^2 - mx - 8 = 0$ ، توان سوم ریشه های معادله

$$2x^2 - x - 2 = 0$$
 می باشد؟

$$15 \quad (4) \quad 13 \quad (3) \quad 11 \quad (2) \quad 9 \quad (1)$$

$$2x^2 - x - 2 = 0 \xrightarrow{\alpha, \beta} S = \alpha + \beta = \frac{1}{2} \quad P = \alpha \cdot \beta = -1$$

$$8x^2 - mx - 8 = 0 \xrightarrow{\alpha^3, \beta^3} S = \alpha^3 + \beta^3 = \frac{m}{8} \quad P = \alpha^3 \cdot \beta^3 = -1$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = \frac{m}{8} \longrightarrow (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = \frac{m}{8} \longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3(-1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{m}{8}$$

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{2} = \frac{m}{8} \longrightarrow 1 + 12 = m \longrightarrow \boxed{m = 13}$$

۳۰

سراسری ریاضی ۹۵

به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله $y = (m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12$ ، محور x ها را در دو

نقطه به طول های منفی، قطع می کند؟

$$m > 2 \quad (1) \quad -1 < m < 2 \quad (2) \quad \text{هر مقدار } m \quad (3) \quad \text{هیچ مقدار } m \quad (4)$$

نکته: نمودار تابع $ax^2 + bx + c = 0$ در صورتی محور طول ها را در دو نقطه با طول های منفی قطع می کند که:

۳۱

$$۱) \Delta' > 0 \quad b' = \frac{b}{2} = -m-1 \quad b'^2 - ac > 0 \longrightarrow (-m-1)^2 - 12(m-2) > 0$$

$$m^2 + 2m + 1 - 12m + 24 > 0 \longrightarrow m^2 - 10m + 25 > 0 \longrightarrow (m-5)^2 > 0 \longrightarrow (I)$$

$$۲) P = \frac{c}{a} > 0 \longrightarrow \frac{12}{m-2} > 0 \longrightarrow m-2 > 0 \longrightarrow m > 2 \quad (II)$$

$$۳) S = -\frac{b}{a} < 0 \longrightarrow -\frac{-2(m+1)}{m-2} < 0 \longrightarrow \frac{2(m+1)}{m-2} < 0 \longrightarrow -1 < m < 2 \quad (III)$$

$$(I) \cap (II) \cap (III) \longrightarrow \emptyset$$

سراسری ریاضی ۹۵ - خارج از کشور

به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله $y = (m+2)x^2 + 3x + 1 - m$ ، محور x ها را در هر دو طرف مبدأ مختصات، قطع می کند؟

$$۱) m > 1 \text{ یا } m < -2 \quad ۲) -2 < m < 1 \quad ۳) \text{ فقط } m < -2 \quad ۴) \text{ فقط } m > 1$$

نکته: نمودار تابع $ax^2 + bx + c = 0$ در صورتی محور طول ها را در دو طرف مبدأ مختصات قطع می کند که:

$$I) P < 0 \quad II) \Delta > 0$$

$$P < 0 \longrightarrow \frac{c}{a} < 0 \longrightarrow \frac{1-m}{m+2} < 0 \longrightarrow m < -2 \vee m > 1$$

نکته: هرگاه $p < 0$ باشد، چون ac منفی است، Δ همواره مثبت می شود و نیازی به بررسی Δ نیست.

سراسری ریاضی ۹۴

حاصل ضرب ریشه ای حقیقی معادله $x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ ، کدام است؟

$$۱) -2 \quad ۲) ۱ \quad ۳) 2 \quad ۴) 4$$

$$x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5} \xrightarrow{x^2 + 4x + 3 = t} t = \sqrt{t+2} \longrightarrow t^2 = t+2$$

$$t^2 - t - 2 = 0 \xrightarrow{b=a+c} \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$t = -1 \longrightarrow x^2 + 4x + 3 = -1 \longrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} x = -2$$

$$t = 2 \longrightarrow x^2 + 4x + 3 = 2 \longrightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \longrightarrow P = \frac{c}{a} = 1$$

سراسری ریاضی ۹۲

به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ از ناحیه اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

- (۱) $a \leq 2$ (۲) $0 < a \leq 2$ (۳) $2 < a < 3$ (۴) $0 < a < 3$

نکته: برای آن که تابع $y = ax^2 + bx + c$ از ناحیه اول نگذرد

اولاً: باید ضریب x^2 عددی نامثبت باشد، یعنی $a \leq 0$

ثانیاً: اگر $\Delta \leq 0$ باشد آن گاه با توجه به $a < 0$ ، نمودار تابع به طور قطع از ناحیه اول نخواهد گذشت.

ثالثاً: اگر $\Delta > 0$ باشد، آن گاه تابع دو ریشه حقیقی خواهد داشت. با توجه به $a < 0$ ، در صورتی از ناحیه اول نمی‌گذرد که هر دو ریشه نامثبت باشند.

به a مقدار داده و بعد نمودار را رسم می‌کنیم.

$$a = 0 \rightarrow y = -3x^2 - 1 \rightarrow \text{Reject}(2), (3), (4)$$

۳۴

سراسری ریاضی ۹۲

اگر α و β ریشه های معادله $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، مجموعه جواب های کدام معادله به صورت

$$\left\{ \frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1 \right\} \text{ است؟}$$

$$4x^2 - 3x + 1 = 0 \quad (2)$$

$$4x^2 - 5x + 1 = 0 \quad (1)$$

$$4x^2 - 3x - 1 = 0 \quad (4)$$

$$4x^2 - 5x - 1 = 0 \quad (3)$$

۳۵

$$2x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$S' = \alpha' + \beta' = \frac{1}{\alpha} + 1 + \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} + 2 = \frac{5}{4}$$

$$P' = \alpha'\beta' = \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) = -\frac{1}{4}$$

$$x^2 - S'x + P' = 0 \rightarrow x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{4} = 0 \rightarrow 4x^2 - 5x - 1 = 0$$

سراسری ریاضی ۹۲ - خارج از کشور

به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = ax^2 + (a+3)x - 1$ ، محور x ها را در دو نقطه به طول های منفی قطع می‌کند؟

- (۱) $a < -9$ (۲) $a < -3$ (۳) $a > -1$ (۴) $-3 < a < 0$

نکته: تابع $y = ax^2 + bx + c$ در صورتی محور طول ها را در دو نقطه به طول های منفی قطع می‌کند که سه شرط

- ۱) $\Delta > 0$ ۲) $P > 0$ ۳) $S < 0$

زیر برقرار باشد:

۳۶

$$f(x) = ax^2 + (a+3)x - 1$$

$$۱) \Delta > 0 \longrightarrow (a+3)^2 - 4(a)(-1) > 0 \longrightarrow a^2 + 10a + 9 > 0 \longrightarrow (-\infty, -9) \cup (-1, +\infty)$$

$$۲) P > 0 \longrightarrow \frac{c}{a} > 0 \longrightarrow \frac{-1}{a} > 0 \longrightarrow a < 0 \longrightarrow (-\infty, 0)$$

$$۳) S < 0 \longrightarrow -\frac{b}{a} < 0 \longrightarrow -\frac{a+3}{a} < 0 \longrightarrow \frac{a+3}{a} > 0 \longrightarrow (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$$

$$\xrightarrow{(۱) \cap (۲) \cap (۳)} (-\infty, -9)$$

سراسری ریاضی ۹۱

اگر عبارت $(a-1)x^2 + (a-1)x + 1$ به ازای هر مقدار x منفی باشد، a به کدام مجموعه تعلق دارد؟

$$\mathbb{R} \quad (۴) \quad \emptyset \quad (۳) \quad a < 1 \quad (۲) \quad 1 < a < 5 \quad (۱)$$

نکته: شرط آن که عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ برای هر x ، همواره منفی باشد آن است که:

$$۱) a < 0 \quad ۲) \Delta < 0$$

$$(a-1)x^2 + (a-1)x + 1 \xrightarrow{(۱) \cap (۲)} \emptyset$$

$$۱) a < 0 \longrightarrow a-1 < 0 \longrightarrow a < 1$$

$$۲) \Delta < 0 \longrightarrow (a-1)^2 - 4(a-1)(1) < 0 \longrightarrow (a-1)(a-5) < 0 \longrightarrow (1, 5)$$

از آن جا که اشتراک (۱) و (۲) تهی است بنابراین عبارت نمی تواند همواره منفی باشد، پس مقداری برای a یافت نمی شود.

۳۷

سراسری ریاضی ۹۱ - خارج از کشور

در معادله $x^2 - 8x + m = 0$ یک ریشه از نصف ریشه دیگر ۵ واحد بیش تر است، مقدار m کدام است؟

$$۱۶ \quad (۴) \quad ۱۴ \quad (۳) \quad ۱۲ \quad (۲) \quad ۱۰ \quad (۱)$$

$$x^2 - 8x + m = 0 \xrightarrow{\alpha, \beta} \beta = \frac{\alpha}{2} + 5 \longrightarrow \boxed{2\beta - \alpha = 10} \quad S = \alpha + \beta = 8$$

$$\begin{cases} 2\beta - \alpha = 10 \\ \alpha + \beta = 8 \end{cases} \longrightarrow 3\beta = 18 \longrightarrow \boxed{\beta = 6} \longrightarrow \boxed{\alpha = 2}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \longrightarrow 12 = m$$

۳۸

سراسری ریاضی ۹۰

به ازای کدام مقادیر m ، خط به معادله $y = 2x - 4$ بر منحنی به معادله $y = (m+3)x^2 + mx$ مماس است؟

$$۴, ۱۱ \quad (۴) \quad -۲, ۲۲ \quad (۳) \quad ۲, ۲۲ \quad (۲) \quad -۲, ۱۸ \quad (۱)$$

۳۹

نکته: معادله حاصل از تقاطع ضابطه های خط و منحنی باید ریشه مضاعف داشته باشد.

$$\begin{cases} y = (m+3)x^2 + mx \\ y = 2x - 4 \end{cases} \longrightarrow (m+3)x^2 + mx = 2x - 4 \longrightarrow (m+3)x^2 + (m-2)x + 4 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta=0} (m-2)^2 - 4(m+3)(4) = 0 \longrightarrow m^2 - 20m - 44 = 0 \longrightarrow (m-22)(m+2) = 0$$

$$m = 22 \text{ or } m = -2$$

سراسری ریاضی ۹۰

اگر α و β ریشه های معادله $x(\Delta x + 3) = 2$ باشند، به ازای کدام مقدار k ، مجموعه جواب های معادله

$$4x^2 - kx + 25 = 0 \text{ به صورت } \left\{ \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2} \right\} \text{ است؟}$$

۴۰

۳۱ (۴)

۲۸ (۳)

۲۹ (۲)

۲۷ (۱)

$$x(\Delta x + 3) = 2 \longrightarrow \Delta x^2 - 3x - 2 = 0 \xrightarrow{\alpha, \beta} S = \alpha + \beta = \frac{3}{\Delta} \quad P = \alpha\beta = -\frac{2}{\Delta}$$

$$4x^2 - kx + 25 = 0 \xrightarrow{\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}} S' = \alpha' + \beta' = \frac{k}{4} \longrightarrow \frac{29}{4} = \frac{k}{4} \longrightarrow \boxed{k = 29}$$

$$\alpha' + \beta' = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha\beta)^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} = \frac{29}{4}$$

سراسری ریاضی ۹۰ - خارج از کشور

به ازای کدام مقادیر m ، عبارت $(m-1)x^2 + 6x + 2m + 1$ ، برای هر مقدار دلخواه x ، مثبت است؟

۱ < m < 2/5 (۴)

۱ < m < 2 (۳)

m > 2/5 (۲)

m < -2 (۱)

۴۱

نکته: برای آن که عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ همواره مثبت باشد، باید I) $a > 0$ II) $\Delta < 0$ و نمودارش تماماً بالای محور طول ها است.

$$(m-1)x^2 + 6x + 2m + 1 > 0 \longrightarrow \begin{cases} 1) a > 0 \longrightarrow m-1 > 0 \longrightarrow m > 1 \\ 2) \Delta < 0 \longrightarrow (-\infty, 2) \cup (\frac{5}{2}, +\infty) \end{cases} \xrightarrow{\cap} (\frac{5}{2}, +\infty)$$

$$b' = 3 \xrightarrow{\Delta' < 0} (3)^2 - (m-1)(2m+1) < 0 \longrightarrow 9 - 2m^2 - m + 2m + 1 < 0$$

$$-2m^2 + m + 10 < 0 \longrightarrow 2m^2 - m - 10 < 0 \longrightarrow (-\infty, 2) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$$

سراسری ریاضی ۸۸

منحنی به معادله $y = (2x + 1)(x + 8)$ با خطوط $y = mx$ ، نقطه مشترک ندارد. مجموعه مقادیر m چگونه است؟

$$5 < m < 13 \quad (4) \quad 7 < m < 15 \quad (3) \quad 15 < m < 23 \quad (2) \quad 9 < m < 25 \quad (1)$$

۴۵

نکته: اگر دو منحنی به معادلات $y = f(x)$ و $y = g(x)$ ، با یکدیگر نقطه مشترک نداشته باشند بایستی معادله $f(x) = g(x)$ جواب نداشته باشد.

$$\begin{cases} y = (2x + 1)(x + 8) \\ y = mx \end{cases} \longrightarrow (2x + 1)(x + 8) = mx \longrightarrow 2x^2 + (17 - m)x + 8 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0}$$

$$(17 - m)^2 - 64 < 0 \longrightarrow (17 - m)^2 < 64 \longrightarrow -8 < 17 - m < 8 \longrightarrow 9 < m < 25$$

سراسری ریاضی ۸۸ - خارج از کشور

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4}$ ، در بازه (a, b) پایین تر از خط به معادله $y = 2$ است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

$$\infty \quad (4) \quad 8 \quad (3) \quad 6 \quad (2) \quad 4 \quad (1)$$

$$f(x) < 2 \longrightarrow \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4} < 2 \longrightarrow \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4} - 2 < 0 \longrightarrow \frac{3x^2 - 2x - 2x^2 - 8}{x^2 + 4} < 0$$

$$\frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + 4} < 0 \xrightarrow{x^2 + 4 > 0} x^2 - 2x - 8 < 0 \longrightarrow (x - 4)(x + 2) < 0 \longrightarrow (-2, 4)$$

۴۶

سراسری ریاضی ۸۷

در معادله $3x^2 - 17x + m = 0$ ، یک ریشه از سه برابر ریشه دیگر ۳ واحد بیش تر است، مقدار m کدام است؟

$$15 \quad (4) \quad 12 \quad (3) \quad 10 \quad (2) \quad 9 \quad (1)$$

$$3x^2 - 17x + m = 0 \xrightarrow{\alpha, \beta} \beta = 3\alpha + 3 \longrightarrow \beta - 3\alpha = 3$$

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{17}{3} \longrightarrow 3\alpha + 3\beta = 17$$

$$\begin{cases} \beta - 3\alpha = 3 \\ 3\alpha + 3\beta = 17 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\beta = 5} \longrightarrow \boxed{\alpha = \frac{2}{3}}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \longrightarrow \frac{10}{3} = \frac{m}{3} \longrightarrow \boxed{m = 10}$$

۴۷

سراسری ریاضی ۸۷

اگر منحنی به معادله $y = 2x^2 - 4x + m - 3$ ، محور x ها را در دو نقطه به طول های مثبت قطع کند ، آن گاه مجموعه مقادیر m ، به کدام صورت است ؟

$$m > 3 \quad (1) \quad 3 < m < 4 \quad (2) \quad 3 < m < 5 \quad (3) \quad 4 < m < 5 \quad (4)$$

نکته: تابع $y = ax^2 + bx + c$ در صورتی محور طول ها را در دو نقطه به طول های مثبت قطع می کند که سه شرط

$$1) \Delta > 0 \quad 2) P = \frac{c}{a} > 0 \quad 3) S = -\frac{b}{a} > 0$$

زیر برقرار باشد :

اولاً: دلتای معادله مثبت باشد ، تا معادله دو ریشه حقیقی متمایز داشته باشد .

ثانیاً: حاصل ضرب ریشه ها ، مثبت باشد تا دو ریشه هم علامت باشند .

ثالثاً: مجموع ریشه ها نیز باید مثبت باشد ، تا دو ریشه هم علامت مثبت باشند .

$$y = 2x^2 - 4x + m - 3 \xrightarrow{(1) \cap (2) \cap (3)} (3, 5)$$

$$1) \Delta > 0 \xrightarrow{b' = -2} (-2)^2 - (2)(m - 3) > 0 \longrightarrow m < 5$$

$$2) P = \frac{c}{a} > 0 \longrightarrow \frac{m - 3}{2} > 0 \longrightarrow m - 3 > 0 \longrightarrow m > 3$$

$$3) S = -\frac{b}{a} > 0 \longrightarrow 2 > 0$$

۴۸

سراسری ریاضی ۸۷ - خارج از کشور

با کدام مقادیر m ، منحنی به معادله $y = (m + 2)x^2 - 2x + 1$ از هر چهار ناحیه محورهای مختصات می گذرد ؟

$$m < -2 \quad (1) \quad m < -1 \quad (2) \quad -2 < m < -1 \quad (3) \quad -4 < m < -2 \quad (4)$$

نکته: اگر معادله $f(x) = 0$ دارای دو ریشه حقیقی ، یکی مثبت و دیگری منفی باشد ، آن گاه نمودار تابع f از هر

چهار ناحیه می گذرد . شرط آن که معادله دارای دو ریشه مختلف علامت باشد ، آن است که $P = \frac{c}{a} < 0$ باشد .

$$y = (m + 2)x^2 - 2x + 1 \longrightarrow P = \frac{c}{a} < 0 \longrightarrow \frac{1}{m + 2} < 0 \longrightarrow m + 2 < 0 \longrightarrow m < -2$$

۴۹

سراسری ریاضی ۸۷ - خارج از کشور

اگر یکی از ریشه های معادله $x(ax^2 - x - 5) = 2$ برابر ۲ باشد ، مجموع دو ریشه دیگر آن کدام است ؟

$$-2 \quad (1) \quad -\frac{3}{2} \quad (2) \quad \frac{1}{2} \quad (3) \quad \frac{3}{2} \quad (4)$$

$$x(ax^2 - x - 5) = 2 \xrightarrow{x=2} 2(4a - 2 - 5) = 2 \longrightarrow a = 2$$

$$2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0 \xrightarrow{x=2} (x - 2)(2x^2 + 3x + 1) = 0 \longrightarrow S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2}$$

۵۰

سراسری ریاضی ۸۵

به ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع $y = (m-1)x^2 + \sqrt{3}x + m$ همواره در زیر محور x ها است؟

$$m < -\frac{1}{2} \quad (1) \quad -\frac{1}{2} < m < 1 \quad (2) \quad 1 < m < \frac{3}{2} \quad (3) \quad m > \frac{3}{2} \quad (4)$$

۵۱

نکته: تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ همواره زیر محور x ها قرار دارد اگر ۱) $a < 0$ ۲) $\Delta < 0$

$$y = (m-1)x^2 + \sqrt{3}x + m < 0 \longrightarrow \begin{cases} 1) a < 0 \\ 2) \Delta < 0 \end{cases} \longrightarrow (-\infty, -\frac{1}{2})$$

$$1) m-1 < 0 \longrightarrow m < 1$$

$$2) (\sqrt{3})^2 - 4m(m-1) < 0 \longrightarrow 4m^2 - 4m - 3 > 0 \longrightarrow (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$$

سراسری ریاضی ۸۵ - خارج از کشور

به ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع $y = (m+2)x^2 - 2mx + 1$ همواره در بالای محور x ها است؟

$$m > -2 \quad (1) \quad -2 < m < -1 \quad (2) \quad -2 < m < 2 \quad (3) \quad -1 < m < 2 \quad (4)$$

۵۲

نکته: تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ همواره بالای محور x ها قرار دارد اگر ۱) $a > 0$ ۲) $\Delta < 0$

$$y = (m+2)x^2 - 2mx + 1 > 0 \longrightarrow \begin{cases} 1) a > 0 \\ 2) \Delta < 0 \end{cases} \longrightarrow (-1, 2)$$

$$1) a > 0 \longrightarrow m+2 > 0 \longrightarrow \boxed{m > -2}$$

$$2) \Delta < 0 \longrightarrow (-2m)^2 - 4(m+2) < 0 \longrightarrow m^2 - m - 2 < 0 \xrightarrow{b=a+c} \boxed{-1 < m < 2}$$

سراسری ریاضی ۸۵ - خارج از کشور

اگر α و β ریشه های معادله $4x^2 - 12x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ کدام است؟

$$2 \quad (1) \quad 3 \quad (2) \quad 4 \quad (3) \quad 6 \quad (4)$$

۵۳

$$4x^2 - 12x + 1 = 0 \longrightarrow S = \alpha + \beta = 3 \quad P = \alpha\beta = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

$$k = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \longrightarrow k^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} \longrightarrow k^2 = 3 + 2\left(\frac{1}{2}\right) \longrightarrow k = 2$$

سراسری ریاضی ۸۴

به ازای کدام مقادیر a ، منحنی به معادله $y = (\frac{1}{2}x + a)(x^2 - 4)$ بر محور x ها در یک نقطه مماس است؟

(۱) \emptyset (۲) $\{1\}$ (۳) $\{-1, 1\}$ (۴) $\{-2, 2\}$

نکته: برای این که منحنی تابع f با ضابطه $y = f(x)$ بر محور x ها مماس باشد، بایستی معادله $f(x) = 0$

ریشه مضاعف داشته باشد. بنابراین باید ریشه های $x^2 - 4 = 0$ در معادله $\frac{1}{2}x + a = 0$ صدق کند.

$$x^2 - 4 = 0 \longrightarrow x^2 = 4 \longrightarrow x = \pm 2$$

$$x = 2 \longrightarrow \frac{1}{2}x + a = 0 \longrightarrow 1 + a = 0 \longrightarrow a = -1$$

$$x = -2 \longrightarrow \frac{1}{2}x + a = 0 \longrightarrow -1 + a = 0 \longrightarrow a = 1$$

۵۴

سراسری ریاضی ۸۴

به ازای کدام مقدار m ، عدد $\frac{1}{8}$ واسطه عددی بین دو ریشه حقیقی معادله $(m^2 - 4)x^2 - 3x + m = 0$ است؟

(۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۴ (۴) -۴

$$(m^2 - 4)x^2 - 3x + m = 0 \xrightarrow{\alpha, b, \beta} 2b = \alpha + \beta \longrightarrow 2\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{m^2 - 4} \longrightarrow m = \pm 4$$

$$m = 4 \longrightarrow 12x^2 - 3x + 4 = 0 \longrightarrow \Delta < 0$$

$$m = -4 \longrightarrow 12x^2 - 3x - 4 = 0 \longrightarrow \Delta > 0$$

۵۵

سراسری ریاضی ۸۴ - خارج از کشور

به ازای کدام مقدار m ، عدد $\sqrt{2}$ واسطه هندسی بین دو ریشه حقیقی معادله $mx^2 - 5x + m^2 - 3 = 0$ است؟

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۳ (۴) -۳

$$mx^2 - 5x + m^2 - 3 = 0 \xrightarrow{\alpha, b, \beta} b^2 = \alpha\beta \longrightarrow (\sqrt{2})^2 = \frac{m^2 - 3}{m}$$

$$m^2 - 2m - 3 = 0 \xrightarrow{b=a+c} m = -1 \wedge m = 3$$

$$m = -1 \longrightarrow -x^2 - 5x - 2 = 0 \longrightarrow x^2 + 5x + 2 = 0 \longrightarrow \Delta > 0$$

$$m = 3 \longrightarrow 9x^2 - 5x + 6 = 0 \longrightarrow \Delta < 0$$

۵۶

<p>سراسری ریاضی ۸۳</p> <p>منحنی به معادله $(x-1)(x^2 - ax + a) = 0$ محور x ها را فقط در یک نقطه قطع می کند ، مجموعه مقادیر a به کدام صورت است ؟</p> <p>(۱) $-4 < a < 0$ (۲) $0 < a < 2$ (۳) $0 < a < 4$ (۴) $a > 4$</p> <p>نکته: برای به دست آوردن طول محل تقاطع تابع $f(x)$ با محور x ها ($y=0$) ، بایستی معادله $f(x) = 0$ باشد .</p> <p>$(x-1)(x^2 - ax + a) = 0 \xrightarrow{x=1} x^2 - ax + a = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} a^2 - 4a < 0 \longrightarrow a(a-4) < 0$</p> <p>$(0, 4)$</p>	<p>۵۷</p>
<p>سراسری ریاضی ۸۳</p> <p>اگر بیشترین مقدار تابع $f(x) = (k+3)x^2 - 4x + k$ برابر صفر باشد ، مقدار k ، کدام است ؟</p> <p>(۱) -4 (۲) -1 (۳) 1 (۴) 4</p> <p>نکته: تابع درجه دوم وقتی ماکزیمم دارد که ضریب x^2 منفی باشد تا تععر آن رو به پائین باشد .</p> <p>۱) $a < 0 \longrightarrow k+3 < 0 \longrightarrow k < -3$</p> <p>۲) $y_{\max} = 0 \longrightarrow \frac{-\Delta}{4a} = 0 \longrightarrow \Delta = 0 \xrightarrow{b'=-2} (-2)^2 - (k+3)(k) = 0 \longrightarrow k^2 + 3k - 4 = 0$</p> <p>$(k+4)(k-1) = 0 \longrightarrow \begin{cases} k=1 \\ k=-4 \end{cases}$</p>	<p>۵۸</p>
<p>سراسری ریاضی ۸۲</p> <p>به ازای کدام مقدار m ، نمودار تابع با ضابطه $y = (m-2)x^2 - 3x + m+2$ ، بالای محور x ها و مماس بر آن است ؟</p> <p>(۱) -3 (۲) $-\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) 3</p> <p>نکته: چون نمودار تابع بر محور x ها مماس است پس محل برخورد تابع با خط $y=0$ بایستی ریشه مضاعف داشته باشد . یعنی $\Delta = 0$ و $a > 0$ باشد .</p> <p>$a > 0 \longrightarrow m-2 > 0 \longrightarrow \boxed{m > 2}$</p> <p>$\begin{cases} y = (m-2)x^2 - 3x + m+2 \\ y = 0 \end{cases} \longrightarrow (m-2)x^2 - 3x + m+2 = 0 \xrightarrow{\Delta=0}$</p> <p>$(-3)^2 - 4(m-2)(m+2) = 0 \longrightarrow m^2 = \frac{25}{4} \longrightarrow m = \pm \frac{5}{2} \xrightarrow{m>2} m = \frac{5}{2}$</p>	<p>۵۹</p>

سراسری ریاضی ۸۲

در معادله $3x^2 - 15x + m = 0$ ، اگر یکی از ریشه ها ۲ واحد از ریشه دیگر بیشتر باشد، m کدام است؟

۶۰

$\frac{63}{4}$ (۴)

$\frac{59}{4}$ (۳)

$\frac{63}{5}$ (۲)

$\frac{59}{5}$ (۱)

$$\begin{cases} \beta = \alpha + 2 \\ \alpha + \beta = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta - \alpha = 2 \\ \alpha + \beta = 5 \end{cases} \xrightarrow{\substack{\beta = \frac{\gamma}{2} \\ \alpha = \frac{3-\gamma}{2}}} 3\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - 15\left(\frac{\gamma}{2}\right) + m = 0 \rightarrow m = \frac{63}{4}$$

سراسری ریاضی ۷۸

به ازای کدام مقدار m ، در معادله درجه دوم $(m+1)x^2 - 3x + m = 0$ یکی از ریشه ها دو برابر ریشه دیگر است؟

۶۱

$-2, 1$ (۴)

$-1, 2$ (۳)

$-3, 2$ (۲)

$-2, 3$ (۱)

$(m+1)x^2 - 3x + m = 0 \xrightarrow{\alpha, \beta} \beta = 2\alpha$

$S = \alpha + \beta = \frac{3}{m+1} \rightarrow \alpha + 2\alpha = \frac{3}{m+1} \rightarrow 3\alpha = \frac{3}{m+1} \rightarrow \alpha = \frac{1}{m+1}$

$P = \alpha\beta = \frac{m}{m+1} \rightarrow 2\alpha^2 = \frac{m}{m+1} \rightarrow 2\left(\frac{1}{m+1}\right)^2 = \frac{m}{m+1} \rightarrow \frac{2}{(m+1)^2} = \frac{m}{m+1}$

$\frac{2}{m+1} = \frac{m}{1} \rightarrow m^2 + m - 2 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} m = 1 \wedge m = -2$

نکته: اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، یک ریشه k برابر ریشه دیگر باشد، داریم: $\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$

معادله $3x^2 - 8x + 4 = \frac{1}{[x] + [-x]}$ دارای چند جواب است؟ ([] نماد جزء صحیح است)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

$$3x^2 - 8x + 4 = \frac{1}{[x] + [-x]} \xrightarrow{x \notin \mathbb{Z}} 3x^2 - 8x + 4 = -1 \longrightarrow 3x^2 - 8x + 5 = 0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5}{3} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

۶۲

ریشه های معادله $2(x + \frac{1}{x})^2 + 3(x + \frac{1}{x}) = 5$ چگونه است؟

(۲) دو ریشه منفی

(۱) دو ریشه مثبت

(۴) فاقد ریشه

(۳) یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی

۶۳

$$2(x + \frac{1}{x})^2 + 3(x + \frac{1}{x}) = 5 \longrightarrow x + \frac{1}{x} = t$$

$$2t^2 + 3t - 5 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} t = 1 \wedge t = -\frac{5}{2}$$

$$t = 1 \longrightarrow x + \frac{1}{x} = 1 \longrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \longrightarrow \Delta < 0$$

$$t = -\frac{5}{2} \longrightarrow x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2} \longrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0 \longrightarrow \Delta > 0 \wedge P > 0 \wedge S < 0$$

به ازای کدام مقادیر m ، سهمی به معادله $y = (m+3)x^2 + 4x + m$ ، همواره در زیر محور x ها است؟

- (۱) $m < -4$ (۲) $m < -3$ (۳) $m < -2$ (۴) $m < 0$

$$y = (m+3)x^2 + 4x + m \xrightarrow{y < 0} \begin{cases} \text{I) } a < 0 \\ \text{II) } \Delta < 0 \end{cases} \xrightarrow{\cap} m < -4$$

$$a < 0 \longrightarrow m+3 < 0 \longrightarrow \boxed{m < -3}$$

$$\Delta' < 0 \longrightarrow b'^2 - ac < 0 \longrightarrow 4 - (m+3)(m) < 0 \longrightarrow 4 - m^2 - 3m < 0$$

$$m^2 + 3m - 4 > 0 \longrightarrow (m+4)(m-1) > 0 \longrightarrow \boxed{m < -4 \vee m > 1}$$

۶۴

اگر نمودار تابع درجه دوم با ریشه های صحیح $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر باشد، مقدار b ، کدام است؟

۲ (۴)

۳ (۳)

-۳ (۲)

-۶ (۱)

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$(0, -3) \longrightarrow \boxed{c = -3}$$

$$(1, 0) \longrightarrow a + b - 3 = 0 \longrightarrow \boxed{a + b = 3}$$

$$y_S = -4 \longrightarrow \frac{-\Delta}{4a} = -4 \longrightarrow \frac{b^2 + 12a}{4a} = 4$$

$$b^2 + 12a = 16a \longrightarrow \boxed{b^2 = 4a}$$

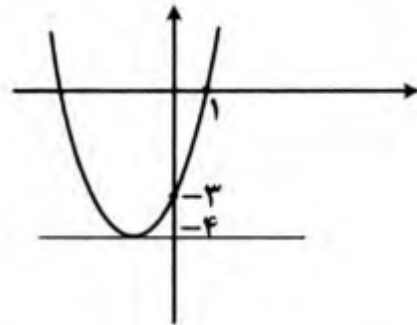
$$4a + 4b = 12 \longrightarrow b^2 + 4b - 12 = 0$$

$$(b+6)(b-2) = 0 \longrightarrow b = -6 \wedge b = 2$$

$$x = -\frac{b}{2a} < 0 \longrightarrow \frac{b}{2a} > 0$$

$$b = -6 \longrightarrow a = 9 \longrightarrow f(x) = 9x^2 - 6x - 3$$

$$\boxed{b = 2} \longrightarrow \boxed{a = 1} \longrightarrow f(x) = x^2 + 2x - 3$$



۶۵

به ازای چند عدد صحیح برای m ، معادله $mx^2 + 4x + m - 2 = 0$ دارای دو ریشه متمایز مثبت است؟

۴ بی شمار

دو (۳)

یک (۲)

صفر (۱)

$$mx^2 + 4x + m - 2 = 0$$

$$I) \Delta > 0 \longrightarrow 16 - 4(m)(m-2) > 0 \longrightarrow 4 - m^2 + 2m > 0$$

$$m^2 - 2m - 4 < 0 \xrightarrow{\Delta=20} \boxed{1 - \sqrt{5} < m < 1 + \sqrt{5}}$$

$$II) P = \frac{c}{a} > 0 \longrightarrow \frac{m-2}{m} > 0 \longrightarrow \boxed{m < 0 \vee m > 2}$$

$$III) S = -\frac{b}{a} > 0 \longrightarrow \frac{-4}{m} > 0 \longrightarrow \boxed{m < 0}$$

$$\xrightarrow{(I) \cap (II) \cap (III)} 1 - \sqrt{5} < m < 0 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} \boxed{m = -1}$$

۶۶

یکی از ریشه های معادله $a(x-2)^2 = x$ از 10 برابر ریشه دیگر 3 واحد کمتر است، مقدار مثبت a کدام است؟

$$\frac{5}{4} \quad (4)$$

$$\frac{5}{9} \quad (3)$$

$$\frac{4}{5} \quad (2)$$

$$\frac{9}{5} \quad (1)$$

$$a(x-2)^2 = x \longrightarrow ax^2 + (-4a-1)x + 4a = 0 \xrightarrow{\alpha, \beta} \boxed{\beta = 10\alpha - 3}$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{4a+1}{a} \quad P = \alpha\beta = \frac{4a}{a} = 4 \longrightarrow \alpha(10\alpha - 3) = 4$$

$$10\alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0 \xrightarrow{\Delta=169} \alpha_1 = \frac{3+13}{20} = \frac{4}{5} \quad \wedge \quad \alpha_2 = \frac{3-13}{20} = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha_1 = \frac{4}{5} \longrightarrow a\left(\frac{4}{5}-2\right)^2 = \frac{4}{5} \longrightarrow \frac{36a}{25} = \frac{4}{5} \longrightarrow 9a = 5 \longrightarrow \boxed{a = \frac{5}{9}}$$

$$\alpha_2 = \frac{4}{5} \longrightarrow a\left(-\frac{1}{2}-2\right)^2 = -\frac{1}{2} \longrightarrow \frac{25a}{4} = -\frac{1}{2} \longrightarrow 25a = -2 \longrightarrow \boxed{a = -\frac{2}{25}}$$

۶۷

تمام محدوده a کدام باشد تا سهمی به معادله $y = (a+6)x^2 + (a-2)x + 1$ از ناحیه چهارم محورهای مختصات عبور نکند؟

$$a > 5 \quad (4)$$

$$a \geq -2 \quad (3)$$

$$a \leq -2 \quad (2)$$

$$-6 < a < -2 \quad (1)$$

$$I) a > 0 \quad II) \Delta \leq 0$$

حالت اول: نمودار از ناحیه های اول و دوم بگذرد.

$$I) a > 0 \longrightarrow a+6 > 0 \longrightarrow \boxed{a > -6}$$

$$II) \Delta \leq 0 \longrightarrow (a-2)^2 - 4(a+6) \leq 0 \longrightarrow a^2 - 8a - 20 \leq 0 \longrightarrow \boxed{-2 \leq a \leq 10}$$

$$\xrightarrow{(I) \cap (II)} \boxed{-2 \leq a \leq 10} \quad (1)$$

حالت دوم: نمودار از ناحیه های اول و دوم و سوم بگذرد.

$$I) a > 0 \quad II) \Delta > 0 \quad III) x_S < 0$$

$$I) a > 0 \longrightarrow a+6 > 0 \longrightarrow \boxed{a > -6}$$

$$II) \Delta > 0 \longrightarrow a^2 - 8a - 20 > 0 \longrightarrow (a-10)(a+2) > 0 \longrightarrow \boxed{a < -2 \vee a > 10}$$

$$III) x = -\frac{b}{2a} < 0 \longrightarrow -\frac{a-2}{2(a+6)} < 0 \longrightarrow \frac{a-2}{2(a+6)} > 0 \xrightarrow{a+6 > 0} \boxed{a > 2}$$

$$\xrightarrow{(I) \cap (II) \cap (III)} \boxed{a > 10} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cup (2)} \boxed{a \geq -2}$$

۶۸

اگر $\alpha = \sqrt[6]{5\sqrt{2}-7}$ و $\beta = \sqrt[6]{5\sqrt{2}+7}$ باشد، آن گاه حاصل $A = (\alpha^3 + \beta^3 - 2\alpha\beta)(\alpha^3 + \beta^3 + 2\alpha\beta)$ کدام است؟

(۱) $10\sqrt{2}+2$ (۲) $10\sqrt{2}$ (۳) $10\sqrt{2}-2$ (۴) $10\sqrt{2}+1$

$$A = (\alpha^3 + \beta^3 - 2\alpha\beta)(\alpha^3 + \beta^3 + 2\alpha\beta) = (\alpha^3 + \beta^3)^2 - (2\alpha\beta)^2$$

$$= \alpha^6 + \beta^6 + 2(\alpha\beta)^3 - 4(\alpha\beta)^2 = 5\sqrt{2} - 7 + 5\sqrt{2} + 7 + 2 - 4 = 10\sqrt{2} - 2$$

$$\alpha^6 = 5\sqrt{2} - 7 \quad \beta^6 = 5\sqrt{2} + 7$$

$$\alpha\beta = \sqrt[6]{5\sqrt{2}-7} \times \sqrt[6]{5\sqrt{2}+7} = \alpha = \sqrt[6]{(5\sqrt{2}-7)(5\sqrt{2}+7)} = \sqrt[6]{50-49} = 1$$

۶۹

به ازای کدام مقدار m ، معادله $(m+4)x^2 + mx + \frac{1}{2} = 0$ تنها یک ریشه دارد که علامت آن منفی است؟

(۱) $\{4\}$ (۲) $\{-2\}$ (۳) $\{-2, 4\}$ (۴) \emptyset

$$(m+4)x^2 + mx + \frac{1}{2} = 0$$

$$I) \Delta = 0 \rightarrow m^2 - 4(m+4)\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \rightarrow m^2 - 2m - 8 = 0 \rightarrow (m-4)(m+2) = 0$$

$$m = 4 \vee m = -2$$

$$II) S = -\frac{b}{a} < 0 \rightarrow \frac{-m}{m+4} < 0 \rightarrow \frac{m}{m+4} > 0 \rightarrow m < -4 \vee m > 0 \rightarrow \boxed{m = 4}$$

$$\boxed{m = 4} \rightarrow \frac{4}{8} > 0 \quad m = -2 \rightarrow \frac{-2}{2} < 0$$

۷۰

اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 5x + a = 0$ باشند، به طوری که $|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| = 1$ ، آن گاه نمودار تابع

$y = ax^2 - 2ax + 1$ از کدام ناحیه محورهای مختصات عبور نمی کند؟

(۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

$$x^2 - 5x + a = 0 \rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 5 \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = a \end{cases}$$

$$|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| = 1 \xrightarrow{\wedge^2} \alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta} = 1 \rightarrow 5 - 2\sqrt{a} = 1 \rightarrow 2\sqrt{a} = 4 \rightarrow \boxed{a = 4}$$

$$y = 4x^2 - 8x + 1 \rightarrow x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{8} = 1 \rightarrow f(1) = -3 \quad S(1, -3)$$

۷۱

یکی از ریشه های معادله $x^2 + x + \frac{4}{x^2 + x + 2} + m = 0$ برابر -2 است، قدر مطلق اختلاف ریشه دیگر این معادله از -2 کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

$$x^2 + x + \frac{4}{x^2 + x + 2} + m = 0 \xrightarrow{x=-2} 2+1+m=0 \longrightarrow \boxed{m=-3}$$

$$x^2 + x + \frac{4}{x^2 + x + 2} - 3 = 0 \xrightarrow{\substack{x^2+x+2=t \\ x^2+x=t-2}} t-2+\frac{4}{t}-3=0 \longrightarrow t+\frac{4}{t}-5=0$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} t=1 \quad \wedge \quad t=4$$

$$t=1 \longrightarrow x^2 + x + 2 = 1 \longrightarrow x^2 + x + 1 = 0 \longrightarrow \Delta = -3 < 0$$

$$t=4 \longrightarrow x^2 + x + 2 = 4 \longrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} x=1 \quad \wedge \quad x=-2$$

۷۲

دو خط $mx - (m+1)y = 4$ و $2x + (2m-1)y = 3$ عمود بر هم و در ناحیه چهارم متقاطع اند، m در کدام فاصله قرار دارد؟

-۲ < m < -۱ (۴)

-۱ < m < ۰ (۳)

۰ < m < ۲ (۲)

۲ < m < ۳ (۱)

$$mx - (m+1)y = 4 \longrightarrow a = -\frac{m}{-(m+1)} = \frac{m}{m+1}$$

$$2x + (2m-1)y = 3 \longrightarrow a' = -\frac{2}{2m-1} = \frac{-2}{2m-1}$$

$$a \times a' = -1 \longrightarrow \frac{m}{m+1} = \frac{2m-1}{2} \longrightarrow 2m^2 - m - 1 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} m=1 \quad \wedge \quad m=-\frac{1}{2}$$

$$m=1 \longrightarrow \begin{cases} x-2y=4 \\ 2x+y=3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x-2y=4 \\ 4x+2y=6 \end{cases} \longrightarrow x=2 \quad \wedge \quad y=-1 \longrightarrow \boxed{A(2, -1)}$$

$$m=-\frac{1}{2} \longrightarrow \begin{cases} x+y=-8 \\ 2x-2y=3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x+2y=-16 \\ 2x-2y=3 \end{cases} \longrightarrow x=-\frac{13}{4} \quad \wedge \quad y=-\frac{19}{4}$$

۷۳

به ازای کدام مقدار a ، معادله درجه دوم $(a+1)x^2 + a(a^2-9)x + 2 = 0$ دو ریشه حقیقی قرینه دارد؟

۳ (۴)

-۲ (۳)

۲ (۲)

-۳ (۱)

$$(a+1)x^2 + a(a^2-9)x + 2 = 0$$

$$a(a^2-9) = 0 \longrightarrow a = 0 \vee a = 3 \vee a = -3$$

$$a = 0 \longrightarrow x^2 + 2 = 0 \quad a = 3 \longrightarrow 4x^2 + 2 = 0$$

$$\boxed{a=-3} \longrightarrow -2x^2 + 2 = 0 \longrightarrow x^2 = 1 \longrightarrow x = \pm 1$$

۷۴

اگر $x - \sqrt{x} > 0$ باشد، مجموع معکوس ریشه های معادله $|x^2 - 1| = |\Delta x + 1| - 8$ کدام است؟

(۱) $\frac{5}{6}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{1}{5}$

$$x - \sqrt{x} > 0 \rightarrow x > \sqrt{x} \xrightarrow{x > 0} x^2 > x \rightarrow x^2 - x > 0 \rightarrow x(x-1) > 0$$

$$\rightarrow x < 0 \vee \boxed{x > 1}$$

$$x > 1 \rightarrow x^2 - 1 = \Delta x + 1 - 8 \rightarrow x^2 - \Delta x + 6 = 0 \rightarrow (x-2)(x-3) = 0$$

$$x = 2 \wedge x = 3 \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

۷۵

اگر α و β ریشه های معادله $x^2 + 7x - 1 = 0$ باشند، حاصل $\sqrt{\alpha^2(1-7\beta)}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) -۱

$$x^2 + 7x - 1 = 0 \xrightarrow{\alpha, \beta} \beta^2 + 7\beta - 1 = 0 \rightarrow \boxed{\beta^2 = 1 - 7\beta}$$

$$\sqrt{\alpha^2(1-7\beta)} = \sqrt{\alpha^2\beta^2} = \sqrt{(\alpha\beta)^2} = |\alpha\beta| = |-1| = 1$$

۷۶

به ازای چه مقادیری از m ، سهمی به معادله $y = (m-2)x^2 + 2x + 1 - m$ ، فقط از ناحیه دوم محورهای مختصات عبور نمی کند؟

(۱) $-1 < m \leq 3$ (۲) $m < 2$ (۳) $m > 2$ (۴) $1 \leq m < 2$

$$I) \Delta > 0 \rightarrow 4 - 4(m-2)(1-m) > 0 \rightarrow m^2 - 3m + 3 > 0 \rightarrow \Delta < 0$$

$$II) a < 0 \rightarrow m - 2 < 0 \rightarrow \boxed{m < 2} \quad III) b > 0 \rightarrow b = 2 > 0$$

$$IV) c \leq 0 \rightarrow 1 - m \leq 0 \rightarrow \boxed{m \geq 1} \quad \rightarrow \cap \rightarrow \boxed{1 \leq m < 2}$$

۷۷

اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند، آن گاه حاصل $(\alpha + \frac{1}{\beta})^3 + (\beta + \frac{1}{\alpha})^3$ کدام است؟

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \xrightarrow{\alpha, \beta} S = \alpha + \beta = 3 \quad P = \alpha\beta = 1 \rightarrow \alpha = \frac{1}{\beta}$$

$$(\alpha + \frac{1}{\beta})^3 + (\beta + \frac{1}{\alpha})^3 = (\alpha + \alpha)^3 + (\beta + \beta)^3 = 8(\alpha^3 + \beta^3)$$

$$= 8[(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)] = 8(27 - 9) = 144$$

۷۸

اگر هر یک از ریشه های معادله $3x^2 + ax + b = 0$ ، دو برابر معکوس هر ریشه از معادله $4x^2 - 7x + 3 = 0$ باشد مقدار a کدام است؟

$$-6 \quad (4) \qquad -8 \quad (3) \qquad -12 \quad (2) \qquad -14 \quad (1)$$

$$4x^2 - 7x + 3 = 0 \xrightarrow{\alpha, \beta} S = \alpha + \beta = \frac{7}{4} \qquad P = \alpha\beta = \frac{3}{4}$$

$$3x^2 + ax + b = 0 \xrightarrow{\alpha' = \frac{2}{\alpha}, \beta' = \frac{2}{\beta}} S' = \alpha' + \beta' = -\frac{a}{3} \longrightarrow \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = \frac{-a}{3}$$

$$\frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = \frac{-a}{3} \longrightarrow \frac{14}{3} = \frac{-a}{3} \longrightarrow \boxed{a = -14}$$

۷۹

به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه های حقیقی معادله $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ ، برابر ۶ می باشد؟

$$-\frac{9}{5}, 1 \quad (4) \qquad -1, \frac{9}{5} \quad (3) \qquad 1 \quad (2) \qquad -\frac{9}{5} \quad (1)$$

$$mx^2 - (m+3)x + 5 = 0 \xrightarrow{\alpha, \beta} S = \alpha + \beta = \frac{m+3}{m} \qquad P = \alpha\beta = \frac{5}{m}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 6 \longrightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 6 \longrightarrow \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{m}\right) = 6$$

$$\frac{m^2 + 6m + 9}{m^2} - \frac{10}{m} = 6 \longrightarrow 5m^2 + 4m - 9 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} m = 1 \wedge m = -\frac{9}{5}$$

$$m = 1 \longrightarrow x^2 - 4x + 5 = 0 \longrightarrow \Delta = -4 < 0$$

$$\boxed{m = -\frac{9}{5}} \longrightarrow 9x^2 - x - 25 = 0 \longrightarrow \Delta > 0$$

۸۰

اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشند، ریشه های کدام معادله زیر $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta - 1$ است؟

$$-2x^2 + 4 = 0 \quad (2) \qquad x^2 - 4x - 4 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + 4x - 4 = 0 \quad (4) \qquad x^2 - 4 = 0 \quad (3)$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \xrightarrow{\alpha, \beta} S = \alpha + \beta = 2 \qquad P = \alpha\beta = -1$$

$$\alpha' = \alpha + \beta = 2 \qquad \beta' = \alpha\beta - 1 = -1 - 1 = -2$$

$$S' = \alpha' + \beta' = 0 \qquad P' = \alpha'\beta' = -4$$

$$x^2 - S'x + P' = 0 \longrightarrow x^2 - 4 = 0$$

۸۱

اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشند، کدام معادله ریشه هایش $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ است؟

$x^2 + x - 2 = 0$ (۱) $x^2 - x - 2 = 0$ (۲)

$x^2 - 2x - 1 = 0$ (۳) $2x^2 - x - 1 = 0$ (۴)

$x^2 - 2x - 1 = 0 \xrightarrow{\alpha, \beta} S = \alpha + \beta = 2 \quad P = \alpha\beta = -1$

$\alpha' = \alpha + \beta = 2 \quad \beta' = \alpha\beta = -1 \longrightarrow S' = \alpha' + \beta' = 1 \quad P' = \alpha'\beta' = -2$

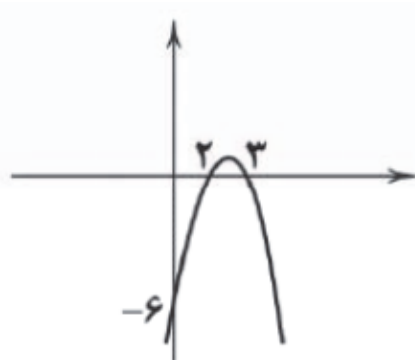
$x^2 - S'x + P' = 0 \longrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

۸۲

شکل زیر نمودار یک سهمی است، بیشترین مقدار این سهمی کدام است؟

$\frac{5}{2}$ (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴)

۸۳



$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

$f(x) = a(x - 2)(x - 3)$

$(0, -6) \longrightarrow -6 = 6a \longrightarrow a = -1$

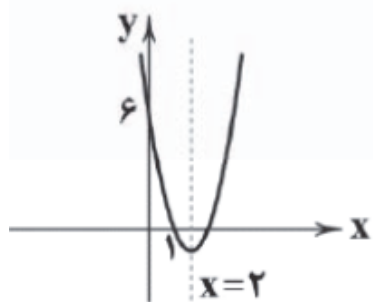
$f(x) = -(x - 2)(x - 3) = -x^2 + 5x - 6$

$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{-2} = \frac{5}{2}$

$f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{25}{4} + \frac{25}{2} - 6 = \frac{-25 + 50 - 24}{4} = \frac{1}{4}$

اگر نمودار تابع درجه دوم $f(x)$ به شکل زیر باشد، $f(5)$ کدام است؟

۸ (۱) ۹۶ (۲) ۴۸ (۳) ۱۶ (۴)



$f(x) = ax^2 + bx + c \longrightarrow c = 6$

$(1, 0) \longrightarrow a + b + 6 = 0 \longrightarrow a + b = -6$

$x = -\frac{b}{2a} \longrightarrow 2 = -\frac{b}{2a} \longrightarrow b = -4a$

$a - 4a = -6 \longrightarrow a = 2 \longrightarrow b = -8$

$f(x) = 2x^2 - 8x + 6 \longrightarrow f(5) = 50 - 40 + 6 = 16$

۸۴

<p>به ازای کدام مقدار m، منحنی به معادله $y = 2x^2 + (m-2)x + m + 4$ بر محور x ها مماس است؟</p> <p>(۱) $2, -14$ (۲) $-2, 14$ (۳) $-4, 7$ (۴) $4, -7$</p> $y = 2x^2 + (m-2)x + m + 4 \xrightarrow{\Delta=0} (m-2)^2 - 4(2)(m+4) = 0 \longrightarrow m^2 - 12m - 28 = 0$ $(m-14)(m+2) = 0 \longrightarrow m = 14 \wedge m = -2$	۸۵
<p>به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $y = 2x^2 + mx + 2$ همواره بالای نیمساز ربع اول و سوم است؟</p> <p>(۱) $-3 < m < 5$ (۲) $-2 < m < 5$ (۳) $-3 < m < 4$ (۴) $-2 < m < 4$</p> $2x^2 + mx + 2 > x \longrightarrow 2x^2 + (m-1)x + 2 > 0 \xrightarrow{\Delta < 0} (m-1)^2 - 4(2)(2) < 0$ $(m-1)^2 - 16 < 0 \longrightarrow (m-1)^2 < 16 \longrightarrow -4 < m-1 < 4 \longrightarrow \boxed{-3 < m < 5}$	۸۶
<p>اگر منحنی به معادله $y = 2x^2 - 4x + m - 3$ محور x ها را در دو نقطه به طول های مثبت قطع کند، آن گاه مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟</p> <p>(۱) $m > 3$ (۲) $3 < m < 4$ (۳) $3 < m < 5$ (۴) $4 < m < 5$</p> $y = 2x^2 - 4x + m - 3 \xrightarrow{(I) \cap (II)} \boxed{3 < m < 5}$ <p>I) $\Delta > 0 \xrightarrow{\Delta' = b^2 - 4ac} (-2)^2 - 2(m-3) > 0 \longrightarrow 4 - 2m + 6 > 0 \longrightarrow \boxed{m < 5}$</p> <p>II) $P = \frac{c}{a} > 0 \longrightarrow \frac{m-3}{2} > 0 \longrightarrow m-3 > 0 \longrightarrow \boxed{m > 3}$</p> <p>III) $S = -\frac{b}{2a} > 0 \longrightarrow -\frac{-4}{4} = 1 > 0$</p>	۸۷
<p>حدود m برای آن که عبارت $(m-1)x^2 + x + m + 1$ همواره مثبت باشد، کدام است؟</p> <p>(۱) $m > 1$ (۲) $m > \frac{\sqrt{5}}{2}$ (۳) $0 < m < 2$ (۴) $-1 < m < 1$</p> $(m-1)x^2 + x + m + 1 > 0 \xrightarrow{(I) \cap (II)} m > \frac{\sqrt{5}}{2}$ <p>I) $a > 0 \longrightarrow m-1 > 0 \longrightarrow \boxed{m > 1}$</p> <p>II) $\Delta < 0 \longrightarrow (1)^2 - 4(m-1)(m+1) < 0 \longrightarrow 1 - 4(m^2 - 1) < 0 \longrightarrow 1 - 4m^2 + 4 < 0$</p> $5 - 4m^2 < 0 \longrightarrow 4m^2 - 5 > 0 \longrightarrow m^2 > \frac{5}{4} \longrightarrow \boxed{m < -\frac{\sqrt{5}}{2} \vee m > \frac{\sqrt{5}}{2}}$	۸۸

به ازای کدام مقادیر m ، معادله درجه دوم $x^2 + (m+1)x + m + \frac{9}{4} = 0$ ، دارای دو ریشه حقیقی می باشد؟

$$-2 < m < 4 \quad (1)$$

$$m > 1 \quad (2)$$

$$-3 < m < 3 \quad (3)$$

$$m < -2 \vee m > 4 \quad (4)$$

۸۹

نکته: در معادله درجه دوم، اگر $\Delta > 0$ باشد، آن گاه معادله دارای دو ریشه حقیقی است.

$$x^2 + (m+1)x + m + \frac{9}{4} = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} (m+1)^2 - 4(m + \frac{9}{4}) > 0 \longrightarrow m^2 - 2m - 8 > 0$$

$$(m-4)(m+2) > 0 \longrightarrow m < -2 \vee m > 4$$

اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $2x^2 - 6x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\frac{\alpha}{\beta+1} + \frac{\beta}{\alpha+1}$ کدام است؟

$$\frac{5}{3} \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$\frac{19}{9} \quad (2)$$

$$\frac{22}{9} \quad (1)$$

$$2x^2 - 6x + 1 = 0 \longrightarrow S = \alpha + \beta = 3 \quad P = \alpha\beta = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\alpha}{\beta+1} + \frac{\beta}{\alpha+1} = \frac{\alpha(\alpha+1) + \beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)} = \frac{\alpha^2 + \alpha + \beta^2 + \beta}{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta + (\alpha+\beta)}{\alpha\beta + (\alpha+\beta) + 1}$$

$$= \frac{9 - 1 + 3}{3 + \frac{1}{2} + 1} = \frac{11}{\frac{9}{2}} = \frac{22}{9}$$

۹۰

ریشه های معادله درجه دوم $x^2 + ax + b = 0$ ، دو برابر ریشه های معادله $5x^2 - 4x - 1 = 0$ می باشند، مقدار a کدام است؟

$$-\frac{2}{5} \quad (4)$$

$$-\frac{8}{5} \quad (3)$$

$$\frac{8}{5} \quad (2)$$

$$\frac{2}{5} \quad (1)$$

$$5x^2 - 4x - 1 = 0 \xrightarrow{\alpha, \beta} S = \alpha + \beta = \frac{4}{5} \quad P = \alpha\beta = -\frac{1}{5}$$

$$x^2 + ax + b = 0 \xrightarrow{\alpha' = 2\alpha, \beta' = 2\beta} S' = \alpha' + \beta' = -a \longrightarrow 2\alpha + 2\beta = -a \longrightarrow 2(\alpha + \beta) = -a$$

$$-a = 2\left(\frac{4}{5}\right) \longrightarrow a = -\frac{8}{5}$$

۹۱

به ازای کدام مقادیر m ، معادله $mx^2 + (m-1)x + m = 0$ ، دارای دو ریشه حقیقی منفی می باشد ؟

$$-1 < m < 2 \quad (1) \quad 0 < m < 1 \quad (2) \quad -1 < m < 0 \quad (3) \quad 0 < m < \frac{1}{3} \quad (4)$$

نکته: شرط آن که معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دارای دو ریشه حقیقی منفی باشد آن است که :

$$I) \Delta > 0 \quad II) S < 0 \quad III) P > 0$$

$$I) (m-1)^2 - 4(m)(m) > 0 \longrightarrow 3m^2 + 2m - 1 < 0 \xrightarrow{b=a+c} -1 < m < \frac{1}{3}$$

$$II) S = -\frac{b}{a} < 0 \longrightarrow -\frac{m-1}{m} < 0 \longrightarrow \frac{m-1}{m} > 0 \longrightarrow m < 0 \vee m > 1$$

$$I) P = \frac{c}{a} > 0 \longrightarrow \frac{m}{m} > 0 \longrightarrow 1 > 0 \xrightarrow{(I) \cap (II)} -1 < m < 0$$

۹۲

اگر رأس تابع $f(x+4) = x^2 - ax + 5$ نقطه $S(1, k)$ باشد ، مجموع طول و عرض نقطه رأس تابع $f(x)$ کدام است ؟

$$9 \quad (4) \quad 7 \quad (3) \quad 3 \quad (2) \quad 6 \quad (1)$$

$$f(x+4) = x^2 - ax + 5 \xrightarrow{x \rightarrow x-4} f(x-4+4) = (x-4)^2 - a(x-4) + 5$$

$$f(x) = x^2 - \lambda x + 16 - ax + 4a + 5 \longrightarrow f(x) = x^2 - (\lambda+a)x + 4a + 21$$

$$S(1, k) \longrightarrow S'(1+4, k) \longrightarrow S'(5, k)$$

$$x = -\frac{b}{2a} \longrightarrow 5 = \frac{\lambda+a}{2} \longrightarrow \lambda+a = 10 \longrightarrow a = 2$$

$$f(x) = x^2 - 10x + 29 \xrightarrow{S'(5, k)} k = 25 - 50 + 29 \longrightarrow k = 4 \longrightarrow S'(5, 4)$$

۹۳

با کدام مقادیر m ، منحنی به معادله $y = (m-1)x^2 - 3x + m + 2$ از هر چهار ناحیه می گذرد و دارای می نیم است ؟

$$m < -2 \quad (4) \quad m > 1 \quad (3) \quad \emptyset \quad (2) \quad \mathbb{R} \quad (1)$$

$$y = (m-1)x^2 - 3x + m + 2 \xrightarrow{(I) \cap (II)} \emptyset$$

$$I) a > 0 \longrightarrow m-1 > 0 \longrightarrow m > 1$$

$$II) P = \frac{c}{a} < 0 \longrightarrow \frac{m+2}{m-1} < 0 \longrightarrow -2 < m < 1$$

۹۴

اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 5x + 1 = 0$ باشند، ریشه های کدام معادله زیر $\frac{\alpha}{\beta}$ و $\frac{\beta}{\alpha}$ می باشد؟

$$x^2 - 17x + 1 = 0 \quad (۲)$$

$$x^2 + 17x + 1 = 0 \quad (۱)$$

$$x^2 + 23x + 1 = 0 \quad (۴)$$

$$x^2 - 23x + 1 = 0 \quad (۳)$$

۹۵

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 5$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = 1$$

$$S' = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = 25 - 2 = 23$$

$$P' = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\beta}{\alpha} = 1$$

$$x^2 - S'x + P' = 0 \longrightarrow x^2 - 23x + 1 = 0$$

معادله ای که هر یک از ریشه های آن دو برابر ریشه های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشد، کدام است؟

$$x^2 - 6x - 4 = 0 \quad (۲)$$

$$x^2 + 6x + 4 = 0 \quad (۱)$$

$$x^2 - 6x + 4 = 0 \quad (۴)$$

$$x^2 + 6x - 4 = 0 \quad (۳)$$

۹۶

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \xrightarrow{\alpha} \beta = 2\alpha \longrightarrow \alpha = \frac{\beta}{2}$$

$$\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{\beta}{2}\right) + 1 = 0 \longrightarrow \frac{\beta^2}{4} - \frac{3\beta}{2} + 1 = 0 \longrightarrow \beta^2 - 6\beta + 4 = 0$$

نقطه $S(2, -5)$ رأس سهمی به معادله $y = 2x^2 + nx + m$ است، این سهمی خط $y = -3$ را در دو نقطه قطع می کند، مجموع طول های نقاط برخورد کدام اند؟

$$-4 \quad (۴)$$

$$-5 \quad (۳)$$

$$4 \quad (۲)$$

$$5 \quad (۱)$$

۹۷

$$y = 2x^2 + nx + m \quad S(2, -5)$$

$$I) \quad x = -\frac{b}{2a} \longrightarrow 2 = -\frac{n}{4} \longrightarrow n = -8$$

$$II) \quad y = 2x^2 - 8x + m \xrightarrow{S(2, -5)} -5 = 8 - 16 + m \longrightarrow m = 3$$

$$III) \quad y = 2x^2 - 8x + 3 \xrightarrow{y=-3} -3 = 2x^2 - 8x + 3 \longrightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \longrightarrow (x-1)(x-3) = 0 \longrightarrow x=1 \wedge x=3$$

به ازای کدام مقادیر m ، عبارت $mx^2 + (m+2)x + \frac{m}{2} + \frac{7}{4}$ ، همواره منفی است ؟

$$m < -4 \quad (1) \quad -4 < m < 1 \quad (2) \quad -1 < m < 4 \quad (3) \quad m < 0 \quad (4)$$

$$mx^2 + (m+2)x + \frac{m}{2} + \frac{7}{4} < 0 \longrightarrow \begin{cases} \text{I) } a < 0 \longrightarrow m < 0 \\ \text{II) } \Delta < 0 \end{cases}$$

$$(m+2)^2 - 4(m)\left(\frac{2m+7}{4}\right) < 0 \longrightarrow m^2 + 4m + 4 - 2m^2 - 7m < 0$$

$$-m^2 - 3m + 4 < 0 \longrightarrow m^2 + 3m - 4 > 0 \xrightarrow{a+b+c=0} a < -4 \vee m > 1$$

$$\xrightarrow{(I) \cap (II)} m < -4$$

۹۸

به ازای کدام مقادیر m ، در معادله $x^2 + 7x + m^2 + m = 0$ ، یک ریشه از دو برابر ریشه دیگر ، ۲ واحد بیش تر است ؟

$$-4, 3 \quad (1) \quad -3, 4 \quad (2) \quad -5, 2 \quad (3) \quad -2, 5 \quad (4)$$

$$x^2 + 7x + m^2 + m = 0 \xrightarrow{\alpha, \beta} \beta = 2\alpha + 2 \quad S = \alpha + \beta = -7$$

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = -2 \\ \alpha + \beta = -7 \end{cases} \longrightarrow 3\alpha = -9 \longrightarrow \alpha = -3 \longrightarrow \beta = -4$$

$$P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} \longrightarrow 12 = m^2 + m \longrightarrow m^2 + m - 12 = 0 \longrightarrow (m+4)(m-3) = 0$$

$$m = -4 \wedge m = 3$$

۹۹

اگر هر یک از ریشه های معادله $x^2 + ax + b = 0$ ، دو برابر قرینه هر ریشه از معادله $x^2 + 4x - 1 = 0$ باشد ، $a - b$ کدام است ؟

$$-4 \quad (1) \quad -6 \quad (2) \quad 6 \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$

$$\text{I) } x^2 + 4x - 1 = 0 \longrightarrow x \quad \text{II) } x^2 + ax + b = 0 \xrightarrow{y=-2x} x = -\frac{y}{2}$$

$$\text{III) } \left(-\frac{y}{2}\right)^2 + 4\left(-\frac{y}{2}\right) - 1 = 0 \longrightarrow \frac{y^2}{4} - 2y - 1 = 0 \longrightarrow y^2 - 8y - 4 = 0$$

$$a = -8 \wedge b = -4 \longrightarrow a - b = -8 + 4 = -4$$

۱۰۰

اگر معادله $x^4 - (m+2)x^2 - 2m+1 = 0$ دارای چهار ریشه حقیقی متمایز باشد، حدود m کدام است؟

$$-2 < m < 0 \quad (2) \qquad 0 < m < \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$m < -3 \vee m > -\frac{1}{2} \quad (4) \qquad m > 0 \vee m < -2 \quad (3)$$

$$x^4 - (m+2)x^2 - 2m+1 = 0 \xrightarrow{x^2=t} t^2 - (m+2)t - 2m+1 = 0$$

$$I) \Delta > 0 \longrightarrow (m+2)^2 - 4(-2m+1) > 0 \longrightarrow m^2 + 12m > 0 \longrightarrow m < -12 \vee m > 0$$

$$II) P = \frac{c}{a} > 0 \longrightarrow -2m+1 > 0 \longrightarrow m < \frac{1}{2}$$

$$III) S = -\frac{b}{a} < 0 \longrightarrow m+2 > 0 \longrightarrow m > -2$$

$$\xrightarrow{(I) \cap (II) \cap (III)} 0 < m < \frac{1}{2}$$

۱۰۱

به ازای کدام مقدار m ، منحنی به معادله $y = 2x^2 + mx - m - \frac{3}{2}$ بر محور x ها مماس است؟

$$-2, 6 \quad (4) \qquad 2, -6 \quad (3) \qquad -2, -6 \quad (2) \qquad 2, 6 \quad (1)$$

$$y = 2x^2 + mx - m - \frac{3}{2} \xrightarrow{\Delta=0} (m)^2 - 4(2)(-m - \frac{3}{2}) = 0 \longrightarrow m^2 + 8m + 12 = 0$$

$$(m+2)(m+6) = 0 \longrightarrow m = -2 \wedge m = -6$$

۱۰۲

به ازای چه مقداری از a ، عبارت $(a+1)x^2 - ax + \frac{1}{4}(a+3)$ ، همواره منفی است؟

$$\mathbb{R} \quad (4) \qquad \emptyset \quad (3) \qquad a < -1 \quad (2) \qquad -1 < a < -\frac{3}{4} \quad (1)$$

$$(a+1)x^2 - ax + \frac{1}{4}(a+3) < 0 \longrightarrow \begin{cases} I) a < 0 \\ II) \Delta < 0 \end{cases}$$

$$a+1 < 0 \longrightarrow a < -1$$

$$(-a)^2 - 4(a+1)(\frac{1}{4})(a+3) < 0 \longrightarrow a^2 - a^2 - 4a - 3 < 0 \longrightarrow a > -\frac{3}{4}$$

$$\xrightarrow{(I) \cap (II)} \emptyset$$

۱۰۳

مجموع ریشه های معادله $2x^2 + \frac{2}{x^2} - x - \frac{1}{x} = 6$ ، کدام است ؟

$$\frac{5}{2} \quad (4) \qquad -\frac{3}{2} \quad (3) \qquad -\frac{1}{2} \quad (2) \qquad \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$2x^2 + \frac{2}{x^2} - x - \frac{1}{x} = 6 \longrightarrow 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$$

$$\boxed{x + \frac{1}{x} = t} \longrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = t^2 \longrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = t^2 \longrightarrow \boxed{x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2}$$

$$2(t^2 - 2) - t - 6 = 0 \longrightarrow 2t^2 - t - 10 = 0 \longrightarrow t = \frac{5}{2} \wedge t = -2$$

$$t = \frac{5}{2} \longrightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \xrightarrow{x \neq 0} 2x^2 - 5x + 2 = 0 \xrightarrow{\Delta=9} \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$t = -2 \longrightarrow x + \frac{1}{x} = -2 \xrightarrow{x \neq 0} x^2 + 2x + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} \begin{cases} x = -1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$2 + \frac{1}{2} - 1 - 1 = \frac{1}{2}$$

۱۰۴

به ازای کدام مقدار m ، معادله درجه دوم $m(x^2 + 1) + 2x^2 + 4x = 1$ دارای دو ریشه منفی می باشد ؟

$$-2 < m < 1 \quad (2) \qquad -3 < m < -2 \quad (1)$$

$$-3 < m < 1 \quad (4) \qquad 1 < m < 2 \quad (3)$$

۱۰۵

$$\underline{mx^2} + m + \underline{2x^2} + 4x - 1 = 0 \longrightarrow \boxed{(m+2)x^2 + 4x + m - 1 = 0}$$

$$I) \Delta > 0 \longrightarrow 16 - 4(m+2)(m-1) > 0 \longrightarrow m^2 + m - 6 > 0 \longrightarrow (m+3)(m-2) > 0$$

$$\boxed{-3 < m < 2}$$

$$II) P = \frac{c}{a} > 0 \longrightarrow \frac{m-1}{m+2} > 0 \longrightarrow \boxed{m < -2 \vee m > 1}$$

$$III) S = -\frac{b}{a} < 0 \longrightarrow \frac{-4}{m+2} < 0 \longrightarrow m+2 > 0 \longrightarrow \boxed{m > -2}$$

$$\underline{(I) \cap (II) \cap (III)} \longrightarrow 1 < m < 2$$

نمودار تابع $f(x) = (m-1)x^2 + 2mx + m + 3$ از هر چهار ناحیه محورهای مختصات می گذرد، حدود m کدام است؟

(۱) $-3 < m < 1$ (۲) $-4 < m < 0$

(۳) $m > 1 \vee m < -3$ (۴) $m < -4 \vee m > 0$

۱۰۶

نکته: اگر معادله $f(x) = 0$ دارای دو ریشه حقیقی، یکی مثبت و دیگری منفی باشد، آن گاه نمودار تابع f از هر

چهار ناحیه می گذرد. شرط آن که معادله دارای دو ریشه مختلف علامت باشد آن است که $P = \frac{c}{a} < 0$ باشد.

$$P = \frac{c}{a} < 0 \longrightarrow \frac{m+3}{2(m-1)} < 0 \longrightarrow \frac{m+3}{m-1} < 0 \longrightarrow -3 < m < 1$$

اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند، معادله درجه دومی که ریشه های آن -2α و -2β باشد، کدام است؟

(۱) $x^2 + 6x + 2 = 0$ (۲) $x^2 + 6x + 4 = 0$

(۳) $x^2 - 6x + 4 = 0$ (۴) $x^2 - 6x + 6 = 0$

۱۰۷

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \longrightarrow S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 3 \qquad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = 1$$

$$S' = -2\alpha - 2\beta = -2(\alpha + \beta) = -6$$

$$P' = (-2\alpha)(-2\beta) = 4 \qquad x^2 - S'x + P' = 0 \longrightarrow \boxed{x^2 + 6x + 4 = 0}$$

به ازای کدام مقادیر m ، سهمی به معادله $y = (m+3)x^2 + 4x + m$ ، همواره در زیر محور x ها است؟

(۱) $m < -4$ (۲) $m < -3$ (۳) $m < -2$ (۴) $m < 0$

نکته: در صورتی منحنی محور x ها را قطع نمی کند که: I) $\Delta < 0$ II) $a < 0$

۱۰۸

$$I) \Delta' < 0 \longrightarrow (2)^2 - m(m+3) < 0 \longrightarrow m^2 + 3m - 4 > 0 \longrightarrow (m+4)(m-1) > 0$$

$$m < -4 \vee m > 1$$

$$II) a < 0 \longrightarrow m+3 < 0 \longrightarrow m < -3 \qquad (I) \cap (II) \longrightarrow \boxed{m < -4}$$

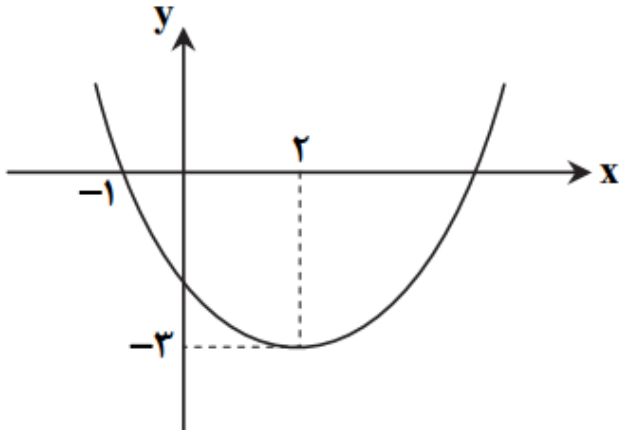
نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر است، مقدار $f(\lambda)$ کدام است؟

۸ (۴)

۹ (۳)

۷ (۲)

۱۰ (۱)



$$S(2, -3) \rightarrow x = -\frac{b}{2a} \rightarrow 2 = -\frac{b}{2a} \rightarrow \boxed{b = -4a}$$

$$S(2, -3) \rightarrow -3 = 4a + 2b + c \rightarrow -3 = 4a - 8a + c \rightarrow \boxed{4a - c = 3}$$

$$(-1, 0) \rightarrow 0 = a - b + c \rightarrow 5a + c = 0 \rightarrow \boxed{c = -5a}$$

$$4a + 5a = 3 \rightarrow \boxed{a = \frac{1}{3}} \rightarrow \boxed{b = -\frac{4}{3}} \rightarrow \boxed{c = -\frac{5}{3}}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{5}{3} \rightarrow f(\lambda) = \frac{64}{3} - \frac{32}{3} - \frac{5}{3} = \frac{27}{3} = 9$$

۱۰۹

اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشند، کدام معادله ریشه هایش $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ است؟

$$\boxed{x^2 - x - 2 = 0} \quad (2)$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \quad (1)$$

$$2x^2 - 2x - 1 = 0 \quad (4)$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \quad (3)$$

۱۱۰

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 2 \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$$

$$S' = (\alpha + \beta) + (\alpha\beta) = 2 - 1 = 1$$

$$P' = (\alpha + \beta)(\alpha\beta) = -2 \quad x^2 - S'x + P' = 0 \rightarrow \boxed{x^2 - x - 2 = 0}$$

اگر یکی از ریشه های معادله $x^2 + \frac{1}{k}x + 27 = 0$ ، مربع ریشه دیگر باشد، آن گاه $12k$ کدام است؟

۲ (۱) -۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴)

$$x^2 + \frac{1}{k}x + 27 = 0 \xrightarrow[\beta = \alpha^2]{\alpha, \beta} P = \alpha\beta = 27 \xrightarrow{\beta = \alpha^2} \alpha^3 = 27 \longrightarrow \boxed{\alpha = 3} \wedge \boxed{\beta = 9}$$

۱۱۱

$$S = \alpha + \beta = -\frac{1}{k} \longrightarrow 12 = -\frac{1}{k} \longrightarrow k = -\frac{1}{12} \longrightarrow 12k = 12\left(-\frac{1}{12}\right) = -1$$

اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - x = 3$ باشند، حاصل $(\alpha - \beta)^2$ کدام است؟

۱۱ (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴)

$$x^2 - x - 3 = 0 \longrightarrow S = \alpha + \beta = 1 \wedge P = \alpha\beta = -3$$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1 + 12 = 13$$

۱۱۲

ریشه های کدام معادله از معکوس ریشه های معادله $3x^2 + 5x + 1 = 0$ یک واحد بیشتر است؟

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \quad (۲) \qquad x^2 + 3x - 1 = 0 \quad (۱)$$

$$x^2 - 3x - 1 = 0 \quad (۴) \qquad x^2 + 3x + 1 = 0 \quad (۳)$$

$$3x^2 + 5x + 1 = 0 \longrightarrow S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{3} \qquad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$$

$$S' = \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) + \left(\frac{1}{\beta} + 1\right) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 2 = -\frac{5}{3} + 2 = \frac{1}{3}$$

$$P' = \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 1 = \frac{1}{3} - \frac{5}{3} + 1 = -\frac{1}{3}$$

$$x^2 - S'x + P' = 0 \longrightarrow \boxed{x^2 + 3x - 1 = 0}$$

۱۱۳

اگر α و β ریشه های معادله $3x^2 - 21x + 8 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$ کدام است؟

۷ (۴) $\frac{64}{9}$ (۳) ۴۹ (۲) $\frac{8}{3}$ (۱)

$$3x^2 - 21x + 8 = 0 \longrightarrow S = \alpha + \beta = 7 \wedge P = \alpha\beta = \frac{8}{3}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 = 49$$

۱۱۴

اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشند، کدام معادله ریشه هایش $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta - 1$ است؟

$$(1) \quad x^2 - 4x - 4 = 0 \quad (2) \quad -2x^2 + 4 = 0$$

$$(3) \quad x^2 - 4 = 0 \quad (4) \quad x^2 + 4x - 4 = 0$$

۱۱۵

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \longrightarrow S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 2 \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$$

$$S' = (\alpha + \beta) + (\alpha\beta - 1) = 2 + (-1 - 1) = 0$$

$$P' = (\alpha + \beta)(\alpha\beta - 1) = (2)(-2) = -4 \quad x^2 - S'x + P' = 0 \longrightarrow \boxed{x^2 - 4 = 0}$$

اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، حاصل $(\alpha + 2)(\beta + 2)$ کدام است؟

$$(1) \quad 12 \quad (2) \quad 20 \quad (3) \quad 24 \quad (4) \quad 16$$

$$x^2 - 5x + 2 = 0 \longrightarrow S = \alpha + \beta = 5 \quad \wedge \quad P = \alpha\beta = 2$$

$$(\alpha + 2)(\beta + 2) = \alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 4 = \alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 4 = 2 + 10 + 4 = 16$$

۱۱۶

در مورد معادله $5x^2 + 13x - 7 = 0$ ، کدام گزینه درست است؟

(۱) دارای دو ریشه حقیقی مثبت متمایز است (۲) دارای دو ریشه حقیقی منفی متمایز است

(۳) دارای دو ریشه حقیقی مختلف علامت است (۴) فاقد ریشه حقیقی است

۱۱۷

نکته: در معادله درجه دوم، اگر a و c مختلف علامت باشند، آن گاه Δ مثبت است و معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز است. از طرفی اگر حاصل ضرب ریشه ها منفی باشد، ریشه ها مختلف علامت هستند.

$$5x^2 + 13x - 7 = 0 \longrightarrow \Delta > 0 \quad \wedge \quad P = -\frac{7}{5} < 0$$

اگر $x = -2$ ، ریشه ای از معادله $x^2 + 3x + k + 1 = 0$ باشد، ریشه دیگر کدام است؟

$$(1) \quad -k \quad (2) \quad k \quad (3) \quad 2k \quad (4) \quad -2k$$

$$x^2 + 3x + k + 1 = 0 \xrightarrow{x=-2} 4 - 6 + k + 1 = 0 \longrightarrow \boxed{k=1}$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \longrightarrow (x+2)(x+1) = 0 \longrightarrow x = -2 \quad \wedge \quad \boxed{x=-1} \longrightarrow x = -k$$

۱۱۸

اگر α و β ریشه های معادله $x^2 + 3x - 1 = 0$ باشند، ریشه های کدام معادله، $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ است؟

$x^2 + 3x - 1 = 0$ (۲) $x^2 - 3x - 1 = 0$ (۱)

$x^2 - 3x + 1 = 0$ (۴) $x^2 + 3x + 1 = 0$ (۳)

۱۱۹

$x^2 + 3x - 1 = 0 \rightarrow S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -3$ $P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$

$S' = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = 3$ $P' = \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = -1$

$x^2 - S'x + P' = 0 \rightarrow x^2 - 3x - 1 = 0$

ریشه های کدام معادله، دو برابر ریشه های معادله $(x+1)^2 = 3x + 2$ می باشد؟

$x^2 + 2x - 2 = 0$ (۲) $x^2 - 2x + 2 = 0$ (۱)

$x^2 - 2x - 2 = 0$ (۴) $x^2 - 2x - 4 = 0$ (۳)

۱۲۰

$x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 1$ $P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$

$S' = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 2$ $P' = 2\alpha \times 2\beta = 4(\alpha\beta) = -4$

$x^2 - S'x + P' = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 4 = 0$

مستطیل طلائی، مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل، برابر با نسبت طول به عرض آن می باشد. نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟

$\frac{\sqrt{5}-2}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}+2}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (۱)

۱۲۱

$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} \rightarrow 1 + \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \xrightarrow{\frac{x}{y}=t} 1 + \frac{1}{t} = t \rightarrow t+1 = t^2 \rightarrow t^2 - t - 1 = 0$

$\Delta=5 \rightarrow t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \rightarrow t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \xrightarrow{x,y>0} \frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

<p>معادله $4x^6 + 1 = 5x^3$ ، چند ریشه حقیقی دارد ؟</p> <p>۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶ (۴)</p> <p>$4x^6 + 1 = 5x^3 \longrightarrow 4x^6 - 5x^3 + 1 = 0 \xrightarrow{x^3=t} 4t^2 - 5t + 1 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0}$</p> <p>$t = 1 \longrightarrow x^3 = 1 \longrightarrow \boxed{x = 1} \quad \wedge \quad t = \frac{1}{4} \longrightarrow x^3 = \frac{1}{4} \longrightarrow \boxed{x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}}$</p>	۱۲۲
<p>اگر $y + 3x = 12$ باشد ، بیشترین مقدار xy کدام است ؟</p> <p>۱ (۱) ۲ (۲) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴)</p> <p>$y + 3x = 12 \longrightarrow y = 12 - 3x \longrightarrow xy = x(12 - 3x) = 12x - 3x^2$</p> <p>$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{-6} = 2 \longrightarrow y = 12 - 6 = 6 \quad \boxed{xy = 12}$</p>	۱۲۳
<p>اختلاف بزرگ ترین و کوچک ترین ریشه معادله $x^4 - 2 \cdot x^2 + 36 = 0$ ، چند برابر $\sqrt{2}$ است ؟</p> <p>۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶ (۴)</p> <p>$x^4 - 2 \cdot x^2 + 36 = 0 \xrightarrow{x^2=t} t^2 - 2 \cdot t + 36 = 0 \longrightarrow (t-2)(t-18) = 0$</p> <p>$t = 2 \longrightarrow x^2 = 2 \longrightarrow x = \pm\sqrt{2} \quad \wedge \quad t = 18 \longrightarrow x^2 = 18 \longrightarrow x = \pm 3\sqrt{2}$</p> <p>$3\sqrt{2} - (-3\sqrt{2}) = 6\sqrt{2}$</p>	۱۲۴
<p>صفرهای تابع درجه دوم f به صورت $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ و $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ می باشد ، اگر نمودار تابع f ، محور y ها را به عرض (-1) قطع کند ، حاصل $f(\frac{1}{2})$ کدام است ؟</p> <p>۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) $\frac{3-2\sqrt{3}}{2}$ (۱)</p> <p>$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \longrightarrow f(x) = a(x - \frac{1+\sqrt{3}}{2})(x - \frac{1-\sqrt{3}}{2})$</p> <p>$(0, -1) \longrightarrow a(-\frac{1+\sqrt{3}}{2})(-\frac{1-\sqrt{3}}{2}) = -1 \longrightarrow a(\frac{-2}{4}) = -1 \longrightarrow \boxed{a = 2}$</p> <p>$f(x) = 2(x - \frac{1+\sqrt{3}}{2})(x - \frac{1-\sqrt{3}}{2}) \longrightarrow f(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2})(\frac{1}{2} - \frac{1-\sqrt{3}}{2})$</p> <p>$= 2(\frac{-\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{3}{2}$</p>	۱۲۵

تعداد ریشه های معادله $(x^2 - 1)^2 - 3(x^2 - 1) - 4 = 0$ ، کدام است ؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

$$(x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) - 4 = 0 \xrightarrow{x^2 - 1 = t} t^2 + 3t - 4 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0}$$

$$t = 1 \longrightarrow x^2 - 1 = 1 \longrightarrow x^2 = 2 \longrightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{2}}$$

$$t = -4 \longrightarrow x^2 - 1 = -4 \longrightarrow x^2 = -3$$

۱۲۶

ضابطه تابع f با دامنه \mathbb{R} به صورت $f(x) = x^2 - 6x + 8$ است ، حاصل ضرب صفرهای تابع $y = f(x + 3)$ کدام است ؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

$$f(x) = x^2 - 6x + 8 \longrightarrow f(x + 3) = (x + 3)^2 - 6(x + 3) + 8 = x^2 - 1$$

$$y = 0 \longrightarrow x^2 - 1 = 0 \longrightarrow x^2 = 1 \longrightarrow \boxed{x = \pm 1} \longrightarrow 1 \times (-1) = -1$$

۱۲۷

معادله $mx^2 + (m + 1)x + m = 2$ دارای دو ریشه مختلف علامت است ، حدود m کدام است ؟۱ (۱) $0 < m < 2$ ۲ (۲) $-1 < m < 0$ ۳ (۳) $0 < m < 1$ ۴ (۴) $-2 < m < 0$

$$mx^2 + (m + 1)x + m - 2 = 0 \longrightarrow P = \frac{c}{a} < 0 \longrightarrow \frac{m - 2}{m} < 0 \longrightarrow \boxed{0 < m < 2}$$

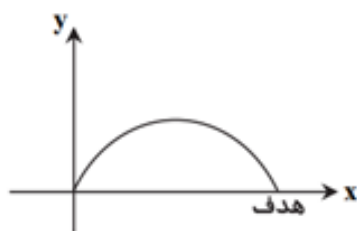
نکته: هرگاه $p < 0$ باشد ، چون ac منفی است ، Δ همواره مثبت می شود و نیازی به بررسی Δ نیست .

۱۲۸

تویی را همانند شکل ، به سمت هدفی پرتاب می کنیم ، معادله حرکت توپ به شکل یک تابع درجه دو با ضابطه

$$y = -\frac{1}{40}x^2 + x$$

(بر حسب متر) می باشد . بیشترین ارتفاعی که توپ از سطح زمین دارد ، چند متر است .



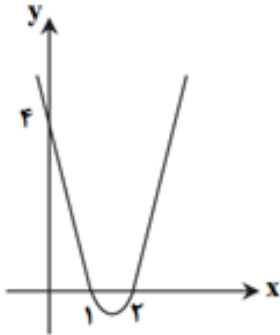
۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰ (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۴۰ (۴)

$$y = -\frac{1}{40}x^2 + x \longrightarrow x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2(-\frac{1}{40})} = 20 \longrightarrow y_{\max} = f(20) = 10$$

۱۲۹

شکل مقابل، نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است، مقدار $f(4)$ کدام است؟



۸ (۲)

۶ (۱)

۱۲ (۴)

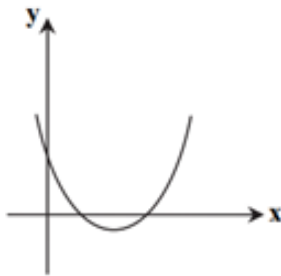
۱۰ (۳)

۱۳۰

$$f(x) = ax^2 + bx + c \xrightarrow[x=2]{x=1} f(x) = a(x-1)(x-2) \xrightarrow{(0,4)} f(0) = 4$$

$$a(-1)(-2) = 4 \longrightarrow \boxed{a = 2} \longrightarrow f(x) = 2(x-1)(x-2) \longrightarrow \boxed{f(4) = 12}$$

اگر شکل مقابل، نمودار تابع $f(x) = x^2 - mx + m + \frac{5}{4}$ باشد، حدود m کدام است؟



$-1 < m < 0$ (۲)

$m > 0$ (۱)

$m > -\frac{5}{4}$ (۴)

$m > 5$ (۳)

۱۳۱

نکته: تابع $y = ax^2 + bx + c$ در صورتی محور طول ها را در دو نقطه با طول های مثبت قطع می کند که سه شرط

۱) $\Delta > 0$ ۲) $P = \frac{c}{a} > 0$ ۳) $S = -\frac{b}{a} > 0$

زیر برقرار باشد:

$$f(x) = x^2 - mx + m + \frac{5}{4}$$

$$I) \Delta > 0 \longrightarrow (-m)^2 - 4(1)(m + \frac{5}{4}) > 0 \longrightarrow m^2 - 4m - 5 > 0$$

$$(m-5)(m+1) > 0 \longrightarrow \boxed{m < -1 \vee m > 5}$$

$$II) a > 0 \longrightarrow 1 > 0$$

$$III) b < 0 \longrightarrow -m < 0 \longrightarrow \boxed{m > 0}$$

$$IV) c > 0 \longrightarrow m + \frac{5}{4} > 0 \longrightarrow \boxed{m > -\frac{5}{4}} \quad \xrightarrow{\cap} \boxed{m > 5}$$



همکاران و دانش آموزان عزیز ، تست هایی که در اختیار شما قرار گرفته است ، زحمات چندین ساله بنده می باشد ، به همین خاطر قبل از مطالعه هزینه این جزوات را پرداخت کنید و هزینه آن یک صلوات و یک فاتحه برای روح پدر عزیزم است .
با تشکر : سید علی موسوی

همکاران و دانش آموزان عزیز اگر اشکال تایپی یا راه حل های بهتری داشتید بنده را
همراهی کنید و پیشنهادات و نظرات خود را به آدرس تلگرام (۰۹۱۵۳۲۱۵۶۱۴)
و یا به ایمیل seyedalimousavi48@gmail.com ارسال فرمائید .

با سپاس فراوان از شما عزیزان