



سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

۱- یکی از جواب های کلی معادله ی مثلثاتی  $\cos^2 x + 2 \sin^2 x = 1$  کدام است.

$$\frac{k\pi}{3} \quad (4)$$

$$\frac{k\pi}{5} \quad (3)$$

$$\frac{2k\pi}{7} \quad (2)$$

$$\frac{2k\pi}{9} \quad (1)$$

۲- یکی از جواب های کلی معادله ی مثلثاتی  $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi + \frac{x}{3}\right)$  کدام است.

$$3k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (4)$$

$$\frac{3k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (3)$$

$$3k\pi - \frac{5\pi}{8} \quad (2)$$

$$\frac{3k\pi}{2} - \frac{5\pi}{8} \quad (1)$$

۳- معادله ی مثلثاتی  $\cos^2 x = \sin^2 x + \sin^2 3x$  چند جواب در بازه ی  $[0, \pi]$  دارد.

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

۴- تعداد جواب های معادله ی  $\sin^2 x \cos x = \tan x + \sin x \cos^2 x$  در بازه ی  $[0, 2\pi]$  چند تا است؟

$$7 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

$$5 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

۵- معادله ی مثلثاتی  $\cos^2 x = 7 \cos x - 4$  در بازه ی  $[-\pi, 3\pi]$  چند جواب دارد.

$$5 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

۶- جواب کلی معادله ی مثلثاتی  $2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin(\pi - x) + 3 \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \sin(\pi + x) = 0$  کدام است.

$$k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (4)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (3)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (2)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (1)$$

۷- انتهای کمان های جواب های معادله ی  $2 \sin^2 x = 1 + \cos x$  روی دایره ی مثلثاتی رأس های کدام چند ضلعی هستند.

$$(4) \text{ مربع}$$

$$(3) \text{ مثلث قائم الزویه}$$

$$(2) \text{ مثلث متساوی الاضلاع}$$

$$(1) \text{ مثلث متساوی الساقین}$$

۸- از معادله ی  $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = \sqrt{8}$  مقدار  $\sin x + \cos x$  کدام است.

$$-\frac{\sqrt{2}}{4} \quad (4)$$

$$-2\sqrt{2} \quad (3)$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$-\sqrt{2} \quad (1)$$

۹- معادله ی  $\sqrt{1 + \sin x} = \cos x$  چند جواب در بازه ی  $[0, 2\pi]$  دارد.

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

۱۰- از معادله ی  $\tan^2 x = \frac{1}{3}(16 \sin^2 x - 3)$  مقدار  $\tan^2 x$  کدام است.

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

۱۱- اگر  $\cos^2 a \neq 0$  آنگاه جواب کلی معادله ی  $\cos^2(x+a) + \cos^2(x-a) = 1$  کدام است.

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

۱۲- اگر  $\sin \alpha = \frac{1}{8}$  باشد آنگاه مقدار  $x$  از معادله  $\tan \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} = 3 \sin 4x$  کدام است. ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ )

- (۱)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{8}$  (۳)  $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$  (۴)  $2k\pi + \frac{\pi}{8}$

۱۳- از معادله مثلثاتی  $2 + \cos 12x = 6 \cos^3 3x$  حاصل  $\cos^3 3x$  چند است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $\frac{1}{9}$

۱۴- اگر  $x, y$  دو زاویه مکمل باشند که  $\tan x = \frac{3k-1}{k+2}$  و  $\cot y = \frac{k+1}{k-4}$  در این صورت  $\cos 8x$  کدام است.

- (۱)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۳)  $-1$  (۴)  $1$

۱۵- معادله  $\sin \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x}{3} = 2$  چند جواب در بازه  $(-\pi, 14\pi)$  دارد.

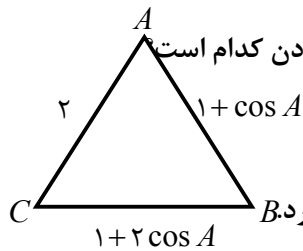
- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۱۶- کدام گزینه می تواند جواب معادله مثلثاتی  $\log_{\frac{5}{25}}^{\sin x} + \log_{\frac{5}{25}}^{\cos x} = 1$  باشد. ( $k \in N$ )

- (۱)  $k\pi + \frac{\pi}{12}$  (۲)  $k\pi + \frac{5\pi}{12}$  (۳)  $2k\pi + \frac{\pi}{12}$  (۴)  $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$

۱۷- معادله مثلثاتی  $(1 + \tan^2 x) \sin 2x + \cot x = 3$  در بازه  $(0, 2\pi)$  چند جواب دارد.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) صفر



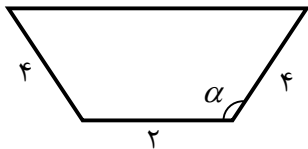
۱۸- اگر  $\sin x \cos x + \cos^2 x = \sin^2 \frac{3\pi}{4}$  باشد مقدار  $\tan 2x$  در صورت معین بودن کدام است

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) ۲

۱۹- معادله  $k + |x| = k \cos x$  به ازای مقادیر مختلف  $k$  همواره ..... جواب دارد.

- (۱) فقط یک (۲) یک، دو یا سه (۳) فقط دو (۴) به تعداد فرد

۲۰- تابعی که مساحت ذوزنقه شکل مقابل را بر حسب  $\alpha$  مشخص می کند کدام است.



$$S(\alpha) = 8(\sin \alpha + \sin 2\alpha) \quad (1)$$

$$S(\alpha) = 8(\sin \alpha - \sin 2\alpha) \quad (2)$$

$$S(\alpha) = 16 \left( \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right) \quad (3)$$

$$S(\alpha) = 8 \sin \alpha - 16 \cos \alpha \quad (4)$$

۲۱- معادله  $4 \sin 3x + 3 \cos 4x = 7 + \cos^2 x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) هیچ (۴) ۳

۲۲- معادله  $\cos x \tan x + \cos^2 x = 1$  در بازه  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$  چند جواب دارد.

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۲۳- کمترین مقدار  $f(x) = -4 \sin\left(3\pi x - \frac{\pi}{4}\right)$  به ازای کدام  $x$  بدست می آید.

- (۱)  $-\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{11}{12}$  (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴)  $\frac{7}{12}$

۲۴- مجموع جواب های معادله  $\sin^2 x = 1 + \cos^2 x$  در بازه  $(0, 3\pi)$  کدام است.

- (۱)  $3\pi$  (۲)  $2\pi$  (۳)  $\frac{5\pi}{2}$  (۴)  $\frac{3\pi}{2}$

۲۵- جواب های معادله  $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 8$  بر روی دایره ی مثلثاتی رئوس کدام چند ضلعی می باشند.

- (۱) هشت ضلعی منتظم (۲) هشت ضلعی غیرمنتظم  
(۳) شش ضلعی منتظم (۴) شش ضلعی غیرمنتظم

۲۶- در معادله  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$  جواب ها روی دایره ی مثلثاتی نمایش رئوس کدام چند ضلعی است.

- (۱) لوزی (۲) مربع (۳) مستطیل غیرمربع (۴) شش ضلعی منتظم

۲۷- حدود  $a$  کدام باشد تا معادله ی مثلثاتی  $\cos^2 x + a \sin^2 x = 4$  ریشه نداشته باشد.

- (۱)  $|a| < 4$  (۲)  $|a| < 2\sqrt{3}$  (۳)  $|a| < 3\sqrt{2}$  (۴)  $|a| < 4\sqrt{3}$

۲۸- مجموع جواب های معادله  $\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos^2 x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin^2 x\right) = 1$  در بازه  $(0, 2\pi)$  کدام است.

- (۱)  $\pi$  (۲)  $2\pi$  (۳)  $3\pi$  (۴)  $4\pi$

۲۹- نقاط انتهایی جواب های معادله  $2 \sin^2 x + \sin 2x = 2 - \cos^2 x$  روی دایره ی مثلثاتی، رأس های کدام چند ضلعی است.

- (۱) مربع (۲) مستطیل (۳) دوزنقه (۴) مثلث متساوی الاضلاع

۳۰- به ازای چه مقادیری از  $m$  معادله  $2 \tan x - m \cot x = 5$  جواب دارد.

- (۱)  $m \geq -\frac{25}{8}$  (۲)  $m \leq -\frac{8}{25}$  (۳)  $m \leq -\frac{5}{2}$  (۴)  $m \geq -5$

۳۱- بزرگترین عدد صحیح  $m$  که به ازای آن معادله  $\sin^2 x - m \cos^2 x + 3 \sin x \cos x = 7$  دارای جواب باشد کدام است؟

- (۱) -۶ (۲) -۷ (۳) -۸ (۴) -۵

۳۲- معادله‌ی  $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} = \sin \Delta x \cos x \Delta x$  در  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  چند جواب دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۳- مجموع جواب های بین صفر و  $2\pi$  در معادله‌ی  $5 = 2 \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 3 \cos \left(x - \frac{5\pi}{8}\right)$  کدام است.

- (۱)  $\frac{3\pi}{4}$  (۲)  $\frac{5\pi}{4}$  (۳)  $\frac{5\pi}{8}$  (۴)  $\frac{7\pi}{8}$

۳۴- انتهای کمان های  $x$  از معادله‌ی  $\cos 2x(1 - \sin x) = 0$  بر روی دایره‌ی مثلثاتی رئوس یک ..... ضلعی ..... را معین می کند.

- (۱) ۵- منتظم (۲) ۴- منتظم (۳) ۵- غیرمنتظم (۴) ۴- غیرمنتظم

۳۵- معادله‌ی  $\tan x \tan 2x = \sin x \sin 2x$  در فاصله  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$  چند جواب است.

- (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) صفر

۳۶- معادله‌ی  $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 3 + \sin^2 x$  در بازه‌ی  $[\pi, 5\pi]$  چند جواب دارد.

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۲

۳۷- برای کدام مقادیر  $a$ ، معادله‌ی  $\sin^2 x - 2(1+a)\sin x + 4a = 0$  در فاصله‌ی  $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$  دارای جواب است.

- (۱)  $|a| < \frac{1}{4}$  (۲)  $a \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$  (۳)  $a \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$  (۴)  $a \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

۳۸- معادله‌ی  $\tan x + \cot x = 2\sqrt{2}$  چند ریشه در فاصله  $[0, 2\pi]$  دارد.

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۹- معادله‌ی  $\cos^4 x + \cos^2 x - 2 = 0$  در بازه‌ی  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$  چند جواب دارد.

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۴

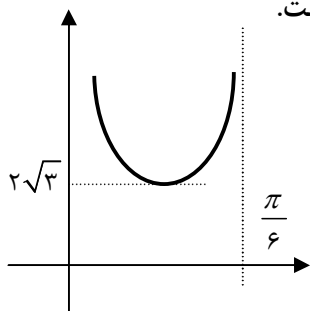
۴۰- معادله‌ی  $\sin 2x \cos 2x \cos 4x = 2 \sin x$  در بازه‌ی  $[0, 2\pi]$  چند ریشه دارد.

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۵

۴۱- معادله‌ی  $\cos^2 x = 1 + \sqrt{\sin x}$  چند ریشه در بازه‌ی  $\left(\frac{\pi}{2}, 3\pi\right)$  دارد.

- (۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) ۲

۴۲- نمودار تابع  $y = \tan^2 x + a \cot^2 x$  به صورت شکل زیر است. مقدار  $a$  کدام است.



(۱)  $-\sqrt{3}$

(۲)  $-3$

(۳)  $2$

(۴)  $\sqrt{3}$

۴۳- اگر ریشه های  $\sin 2x + \sqrt{2} \cos x = 0$  به صورت  $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{4}$  باشد مجموعه ی اعداد  $i$  کدام می تواند باشد.

(۴)  $\{2, 3, 5, 7\}$

(۳)  $\{1, 2, 3, 4\}$

(۲)  $\{1, 3, 5, 7\}$

(۱)  $\{2, 5, 6, 7\}$

۴۴- معادله ی  $\cos^2 x = 1 + \sqrt{\sin x}$  چند ریشه در بازه ی  $[\frac{\pi}{2}, 3\pi]$  دارد.

(۴) ۲

(۳) ۱

(۲) ۳

(۱) صفر

۴۵- جواب کلی معادله ی مثلثاتی  $\cos x \cdot \cos 2x = 0$  به صورت  $k\pi + \frac{i\pi}{4}$  می باشد. مقادیر  $i$  کدام است.

(۴)  $\{2, 4, 6\}$

(۳)  $\{1, 3, 6\}$

(۲)  $\{1, 2, 5\}$

(۱)  $\{2, 3, 4\}$

۴۶- اگر  $(1 + \tan^2 a)^2 = 8 \tan a (1 - \tan^2 a)$  مجموع دو زاویه ی حاده ی  $a$  چند درجه است.

(۴) ۶۰

(۳) ۴۵

(۲) ۷۵

(۱) ۳۰

۴۷- مجموع جواب های معادله ی مثلثاتی  $\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1$  در بازه ی  $(0, 2\pi)$  کدام است.

(۴)  $2\pi$

(۳)  $\frac{5\pi}{3}$

(۲)  $\pi$

(۱) صفر

۴۸- معادله ی  $[\sin x + \cos x] = [\tan x + \cot x]$  در فاصله ی  $(0, 5\pi)$  چند ریشه دارد.

(۴) ۲

(۳) ۵

(۲) ۳

(۱) صفر

۴۹- مجموعه جواب های معادله ی  $(\sqrt{6} + 2) \tan x + (\sqrt{6} - 2) \cot x = 4$  با مجموعه جواب کدام معادله برابر است.

(۲)  $\sin 2x + \cos 2x = \frac{\sqrt{6}}{3}$

(۱)  $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$

(۴)  $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{3}$

(۳)  $\sin 2x + \cos 2x = \frac{\sqrt{6}}{2}$

۵۰- اگر  $\Delta(\sin x + \cos x) = 2\sqrt{10}$  باشد مقدار  $\tan x$  کدام است.

(۴) ۳

(۳)  $\frac{2}{3}$

(۲)  $\frac{3}{2}$

(۱)  $-3$

## حل تست های معادلات مثلثاتی

۱- گزینه (۱)

$$\cos 7x = 1 - 2 \sin^2 x = \cos 2x \Rightarrow \cos 7x = \cos 2x \Rightarrow 7x = 2k\pi \pm 2x \Rightarrow \begin{cases} \Delta x = 2k\pi \\ 9x = 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{5} \\ x = \frac{2k\pi}{9} \end{cases}$$

۲- گزینه (۱)

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi + \frac{x}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\pi + \frac{x}{3}\right)\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}\right)$$

$$\xrightarrow{\cos(-\alpha) = \cos \alpha} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{x}{3} \\ x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{x}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2x}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\times \frac{3}{2}} x = 3k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \frac{4x}{3} = 2k\pi - \frac{5\pi}{6} \xrightarrow{\times \frac{3}{4}} x = \frac{3k\pi}{2} - \frac{5\pi}{8} \end{cases}$$

۳- گزینه (۳)

$$\cos^2 x = \sin^2 x + \sin 2x \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \sin 2x$$

$$\boxed{\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x} \Rightarrow \cos 2x = \sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + 2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ -x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{10} \\ k=1 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{10} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ k=2 \Rightarrow x = \frac{4\pi}{5} + \frac{\pi}{10} \Rightarrow x = \frac{9\pi}{10} \end{cases}$$

برای  $k \geq 3, k < 0$  جواب ها، خارج از بازه  $[0, \pi]$  هستند.

۴- گزینه (۴)

$$\sin 2x \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} + \sin x \cos 2x \Rightarrow \sin 2x \cos x - \sin x \cos 2x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \sin(2x - x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi & (1) \\ 2 \cos x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

$$(1) \begin{cases} k=0 \Rightarrow x=0 \\ k=1 \Rightarrow x=\pi \\ k=2 \Rightarrow 2\pi \end{cases} \quad (2) \begin{cases} k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \\ k=1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \\ k=2 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \\ k=3 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

۵- گزینه (۳)

$$\Rightarrow \cos 2x = 7 \cos x - 4 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 = 7 \cos x - 4 = 1 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 7 \cos x + 3 = 0 \Rightarrow (\cos x - 3)(2 \cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 3 & \text{غ ق ق} \\ \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \rightarrow \left\{ -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3} \right\} \end{cases}$$

۶- گزینه (۱)

$$(2 \sin x)(\sin x) + 3(\cot x)(-\sin x) = 0 \Rightarrow 2 \sin^2 x + \frac{3 \cos x}{\sin x}(-\sin x) = 0$$

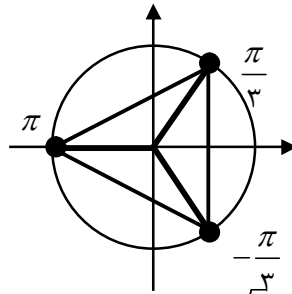
$$\Rightarrow 2 \sin^2 x - 3 \cos x = 0 \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) - 3 \cos x = 0 \Rightarrow -2 \cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0 \Rightarrow (2 \cos x - 1)(\cos x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -2 & \text{غ ق ق} \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

۷- گزینه (۲)

$$2 \sin^2 x = 1 + \cos x \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) = 1 + \cos x \Rightarrow 2(1 - \cos x)(1 + \cos x) = 1 + \cos x \Rightarrow \begin{cases} 1 + \cos x = 0 \\ 2(1 - \cos x) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos x = +\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \pi \\ x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$



مثلث تشکیل شده متساوی الاضلاع است.

۸- گزینه (۲)

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = \sqrt{2} \Rightarrow \sin x + \cos x = 2\sqrt{2} \sin x \cos x$$

با فرض  $\sin x + \cos x = y$  داریم:

$$(\sin x + \cos x)^2 = y^2 \Rightarrow 1 + 2 \sin x \cos x = y^2 \Rightarrow 2 \sin x \cos x = y^2 - 1$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{2}(y^2 - 1) \Rightarrow \sqrt{2}y^2 - y - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1 \pm 3}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

۹- گزینه (۳)

$$\sqrt{1 + \sin x} = \cos x \longrightarrow 1 + \sin x = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \sin x + \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x(1 + \sin x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in \left\{ 0, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right\}$$

اما توجه کنید که  $x = \pi$  در معادله اصلی صدق نمی کند پس معادله جواب های  $\left\{ 0, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right\}$  را دارد.



۱۰- گزینه (۳)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tan^r x &= \frac{1}{3}(16 \sin^r x - 3) \Rightarrow 3 \tan^r x = 16 \sin^r x - 3 \Rightarrow 3 \tan^r x = \frac{16 \tan^r x}{1 + \tan^r x} - 3 \\ &= \frac{16 \tan^r x - 3 - 3 \tan^r x}{1 + \tan^r x} \Rightarrow 3 \tan^r x = \frac{13 \tan^r x - 3}{1 + \tan^r x} \Rightarrow 3 \tan^r x + 3 \tan^r x = 13 \tan^r x - 3 \\ \Rightarrow 3 \tan^r x - 10 \tan^r x + 3 &= 0 \Rightarrow (3 \tan^r x - 1)(\tan^r x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan^r x = \frac{1}{3} \\ \tan^r x = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

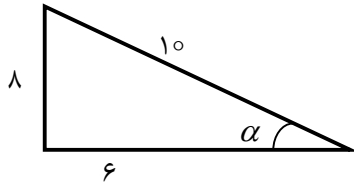
۱۱- گزینه (۲)

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos 2(x+a)}{2} + \frac{1 + \cos 2(x-a)}{2} &= 1 \xrightarrow{x} 1 + \cos(2x+2a) + 1 + \cos(2x-2a) = 2 \\ \Rightarrow \cos(2x+2a) + \cos(2x-2a) &= 0 \end{aligned}$$

پس باید مجموع دو کمان مضرب فردی از  $\pi$  باشد یعنی:

$$2x+2a+2x-2a = (2k+1)\pi \Rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

۱۲- گزینه (۱)



$$\Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \\ \cos \alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 3 = 3 \sin 4x \Rightarrow \sin 4x = 1$$

$$\Rightarrow 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

۱۳- گزینه (۱)

$$2 + \cos 12x = 6 \cos^r 3x$$

$$\Rightarrow 2 + (2 \cos^r 6x - 1) = 6 \left( \frac{1 + \cos 6x}{2} \right) = 3(1 + \cos 6x)$$

$$\Rightarrow 2 \cos^r 6x - 3 \cos 6x - 2 = 0 \Rightarrow (\cos 6x - 2)(2 \cos 6x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos 6x = 2 \text{ غ ق} \\ \cos 6x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos^r 3x = \frac{1 + \cos 6x}{2} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

۱۴- گزینه (۴)

می دانیم دو زاویه  $x$ ,  $y$  در صورتی مکمل اند که  $x + y = \pi$  باشد. بنابراین:

$$y = \pi - x \Rightarrow \cot y = \cot(\pi - x) \Rightarrow \cot y = -\cot x = -\frac{1}{\tan x} \Rightarrow \frac{k+1}{k-4} = -\frac{k+2}{3k-1}$$

$$\Rightarrow (3k-1)(k+1) = (k-4)(-k-2) \Rightarrow 3k^r + 3k - k - 1 = -k^r - 2k + 4k + 8$$

$$\Rightarrow 4k^r = 9 \Rightarrow k = \pm \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{3}{2} \rightarrow \tan x = 1 \\ k = -\frac{3}{2} \rightarrow \tan x = -1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos 8x = \cos 2\pi = 1$$

۱۵- گزینه (۳)

$$x = 6y \Rightarrow \sin 3y + 2 \cos 2y = 2 \Rightarrow (3 \sin y - 4 \sin^3 y) + 2(1 - 2 \sin^2 y) = 2$$

$$\Rightarrow -4 \sin^3 y - 4 \sin^2 y + 3 \sin y = 0 \Rightarrow -\sin y(4 \sin^2 y + 4 \sin y - 3) = 0$$

$$\Rightarrow -\sin y(2 \sin y - 1)(2 \sin y + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin y = 0 \\ \sin y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = k\pi \\ y = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ y = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

همواره مثبت  
و مخالف صفر

$$\xrightarrow{x=6y} \begin{cases} x = 6k\pi \\ x = 12k\pi + \pi \\ x = 12k\pi + 5\pi \end{cases} \xrightarrow{x \in (-8\pi, 14\pi)} \{0, \pi, 5\pi, 6\pi, 13\pi, -6\pi, -7\pi, 12\pi\}$$

۱۶- گزینه (۳)

$$\log_{\frac{\circ}{25}}^{\sin x} + \log_{\frac{\circ}{25}}^{\cos x} = 1 \Rightarrow \log_{\frac{\circ}{25}}^{\sin x \cos x} = 1 \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{\circ}{25} \Rightarrow 4 \sin x \cos x = 1 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{12} \quad (1) \\ x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \quad (2) \end{cases}$$

در عبارات لگاریتمی مانند  $\log^M$  باید  $M > 0$  باشد پس باید  $\cos x, \sin x$  هر دو مثبت باشند یعنی  $x$  در ربع اول باشد. بنابراین در

(۱) باید  $k$  زوج باشد تا  $x$  در ناحیه‌ی اول مثلثاتی باشد در ضمن اگر در (۲)  $k = 0$  باشد، نیز جواب است.

۱۷- گزینه (۳)

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\Rightarrow (1 + \tan^2 x) \left( \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \right) + \cot x = 3 \Rightarrow 2 \tan x + \frac{1}{\tan x} = 3 \Rightarrow 2 \tan^2 x - 3 \tan x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2 \tan x - 1)(\tan x - 1) = 0 \xrightarrow{\tan x \neq 0} \begin{cases} \tan x = \frac{1}{2} = \tan \alpha \\ \tan x = 1 = \tan \frac{\pi}{4} \end{cases} \xrightarrow{0 < \alpha < \frac{\pi}{2}} \begin{cases} x = k\pi + \alpha \\ x = k\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

پس مجموعه جواب این معادله در بازه‌ی  $(0, 2\pi)$  به صورت  $\left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \alpha, \pi + \alpha \right\}$  است که ۴ عضو دارد.

۱۸- گزینه (۲)

$$\sin x \cos x + \cos^2 x = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2$$

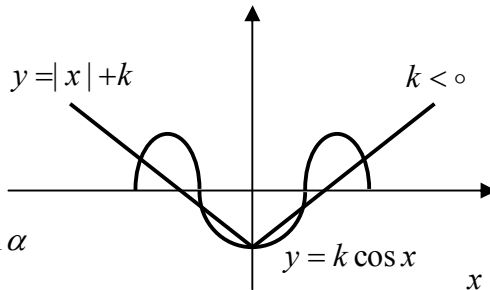
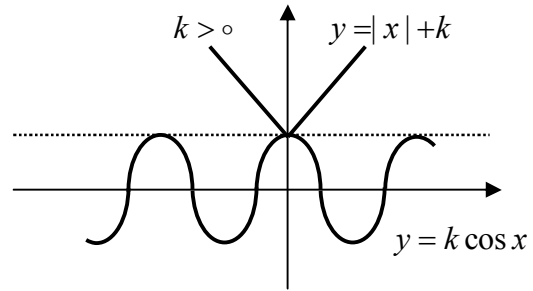
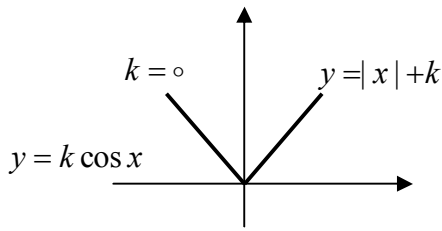
$$\frac{1}{2} \sin 2x + \cos^2 x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2} \sin 2x + 2 \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin 2x + 2 \cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \sin 2x + \cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow \sin 2x = -\cos 2x \xrightarrow{\div \cos 2x} \tan 2x = -1$$

۱۹- گزینه (۴)

واضح است که  $x = 0$  جواب معادله است. همچنین با توجه به زوج بودن توابع  $y = k \cos x, y = |x| + k$  نمودار هر دو تابع نسبت به محور  $y$  ها متقارن است پس تعداد نقاط برخورد در هر دو طرف محور  $y$  ها یکسان است. بنابراین معادله دارای تعداد فردی ریشه

است. توجه کنید در حالت  $k = 0, k > 0$  معادله دارای ۱ ریشه است و در حالت  $k < 0$  تعداد جواب های معادله هر تعداد فردی ممکن است باشد:



۲۰- گزینه (۲)

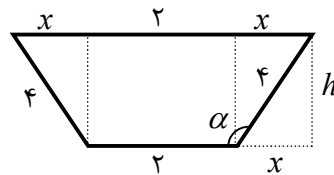
$$\sin(\pi - \alpha) = \frac{h}{4} \Rightarrow h = 4 \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = \frac{x}{4} - \cos \alpha = \frac{x}{4} \Rightarrow x = -4 \cos \alpha$$

$$S = \frac{(4 + 2x)h}{2} = (2 + x).h \Rightarrow S(\alpha)$$

$$= (2 - 4 \cos \alpha)4 \sin \alpha = 8 \sin \alpha - 16 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$= 8 \sin \alpha - 8 \sin 2\alpha = 8(\sin \alpha - \sin 2\alpha)$$



۲۱- گزینه (۱)

طرف راست تساوی بزرگتر یا مساوی ۷ است و سمت چپ کوچکتر یا مساوی ۷ است. پس تساوی زمانی برقرار است که هر دو طرف تساوی برابر ۷ باشند.

$$4 \sin 3x + 3 \cos 4x = 7 \Rightarrow \begin{cases} \sin 3x = 1 \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ \cos 4x = 1 \Rightarrow 4x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \boxed{x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}}$$

$$\text{طرف راست: } 7 + \cos^2 x = 7 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

و برای برابری دو طرف تساوی باید  $x = k\pi - \frac{\pi}{2}$  باشد که معادله یک جواب در بازه  $[0, 2\pi]$  دارد.  $(x = \frac{3\pi}{2})$

۲۲- گزینه (۱)

$$2 \cos x \tan x + \cos 2x = 1 \Rightarrow 2 \cos x \frac{\sin x}{\cos x} = 1 - \cos 2x \Rightarrow 2 \sin x = 1 - \cos 2x \xrightarrow{\cos x \neq 0} 2 \sin x = 2 \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \sin x - \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x(1 - \sin x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

با توجه به فرض  $(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}) \cos x \neq 0$

پاسخ  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$  غیرقابل قبول است و تنها جواب  $x = 2k\pi$  قابل قبول است. پس جواب های موجود در بازه  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

برابر است با:  $\{0, \pi\}$

۲۳- گزینه (۲)

کمترین مقدار  $-4 \sin\left(3\pi x - \frac{\pi}{4}\right)$  زمانی بدست می آید که مقدار  $\sin$  برابر ۱ باشد بنابراین داریم:

$$\sin\left(3\pi x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow 3\pi x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 3\pi x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow 3x = 2k + \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{2k}{3} + \frac{1}{4}$$

به ازای  $k=1$  مقدار  $x = \frac{11}{12}$  بدست می آید.

۲۴- گزینه (۱)

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \sin^2 x \leq 1$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \cos^2 x + 1 \leq 2$$

بیشترین مقدار  $\sin^2 x$  برابر ۱ است و کمترین مقدار  $\cos^2 x + 1$  برابر ۱ است پس تساوی زمانی رخ می دهد که هر دو برابر ۱ شوند.

$$\begin{cases} \sin^2 x = 1 \rightarrow \sin x = 1 \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{0 < x < 2\pi} x = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} & (1) \\ \cos^2 x + 1 = 1 \rightarrow \cos^2 x = 0 \rightarrow \cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{0 < x < 2\pi} x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \quad (2)$$

اشتراک (۱) و (۲):  $x = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$  که جمعشان برابر ۳π می شود.

۲۵- گزینه (۱)

$$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = 8 \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = 8 \Rightarrow 8 \sin^2 x \cos^2 x = 1 \Rightarrow 2(4 \sin^2 x \cos^2 x) = 1$$

$$\Rightarrow 2(2 \sin x \cos x)^2 = 1 \Rightarrow 2(\sin 2x)^2 = 1 \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 2x = 0 \Rightarrow \cos 4x = 0 \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

جواب های معادله فوق در بازه  $(0, 2\pi)$  و با توجه به  $x \neq \frac{k\pi}{2}$  برابر است با:  $\left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8} \right\}$

این نقاط تشکیل هشت ضلعی منتظم می دهند.

۲۶- گزینه (۲)

$$\cos \alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \pm 1 \Rightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

جواب هایی که در بازه  $[0, 2\pi]$  قرار دارند عبارتند از:  $\left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8} \right\}$

که روی دایره ی مثلثاتی تشکیل یک مربع می دهند زیرا: فاصله ی هر دو زاویه ی متوالی برابر  $\frac{\pi}{4}$  است.

۲۷- گزینه (۲)

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} + a \sin 2x = 4 \Rightarrow \frac{1}{2} \cos 2x + a \sin 2x = \frac{7}{2} \xrightarrow{\times 2} 2a \sin 2x + \cos 2x = 7$$

$$\Rightarrow -\sqrt{(2a)^2 + 1} \leq 2a \sin 2x + \cos 2x \leq \sqrt{(2a)^2 + 1}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{4a^2 + 1} \leq 2a \sin 2x + \cos 2x \leq \sqrt{4a^2 + 1}$$

پس عبارت  $2a \sin 2x + \cos 2x$  همواره در بازه  $[-\sqrt{4a^2 + 1}, \sqrt{4a^2 + 1}]$  قرار دارد چون می خواهیم که معادله فوق جواب نداشته باشد باید  $\sqrt{4a^2 + 1} < 7$  کوچکتر از ۷ باشد بنابراین:

$$\sqrt{4a^2 + 1} < 7 \Rightarrow 4a^2 + 1 < 49 \Rightarrow 4a^2 < 48 \Rightarrow a^2 < 12 \Rightarrow |a| < 2\sqrt{3}$$

۲۸- گزینه (۴)

با استفاده از رابطه  $\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$  می توان نوشت:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos^2 x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cos^2 x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(1 - \cos^2 x)\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos^2 x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin^2 x\right)$$

$$\text{معادله: } 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \sin^2 x\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin^2 x\right) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{0 < \frac{\pi}{2} \sin^2 x < \frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} \sin^2 x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{0 < x < 2\pi} x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

مجموع جواب های فوق برابر  $\frac{16\pi}{4} = 4\pi$  است.

۲۹- گزینه (۲)

عبارت  $2 \sin^2 x$  را به سمت راست تساوی می بریم:

$$\sin 2x = 2 - \cos^2 x - 2 \sin^2 x = 2 - \cos^2 x - \sin^2 x - \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \sin 2x = 2 - 1 - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \cos^2 x \Rightarrow 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$$

$$\Rightarrow \cos x (2 \sin x - \cos x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2 \sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

جواب های فوق روی دایره ی مثلثاتی ۴ نقطه را مشخص می کند که چون هر یک از زوایای این چهارضلعی، زاویه ی محاطی مقابل قطر دایره اند پس زوایا برابر  $90^\circ$  بوده و این چهارضلعی مستطیل می باشد.

۳۰- گزینه (۱)

با ضرب طرفین در  $\tan x$  داریم:

$$2 \tan^2 x - m = \Delta \tan x \Rightarrow 2 \tan^2 x - \Delta \tan x - m = 0$$

شرط جواب معادله ی اخیر آن است که  $\Delta \geq 0$  لذا باید:

$$\Delta = 2\Delta + \lambda m \geq 0 \Rightarrow m \geq -\frac{2\Delta}{\lambda}$$

۳۱- گزینه (۲)

چون  $\cos x = 0$  ریشه ی معادله نیست پس طرفین را بر  $\cos^2 x$  تقسیم می کنیم:

$$\tan^2 x - m + 3 \tan x = \frac{7}{\cos^2 x} = 7(1 + \tan^2 x) \Rightarrow -6 \tan^2 x + 3 \tan x - m - 7 = 0$$

شرط جواب معادله آن است که  $\Delta \geq 0$  لذا می توان نوشت:

$$\Delta = 9 + 24(-m - 7) \geq 0 \Rightarrow m \leq -\frac{159}{24} \Rightarrow m \leq -6/6 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \leq -7$$

در نتیجه بزرگترین مقدار صحیح  $m$  برابر  $-7$  است. بنابراین گزینه (۲) درست است.

۳۲- گزینه (۱)

$$\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} = \sin \Delta x \cos \Delta x = \frac{1}{2} \sin 10x$$

$$\boxed{-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \sin 10x \leq \frac{1}{2}}$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\sin x} \geq \sin^2 x \\ \sqrt{\cos x} \geq \cos^2 x \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} \geq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}_{\geq 1} = \underbrace{\frac{1}{2} \sin 10x}_{\substack{< \frac{1}{2} \\ > \frac{1}{2}}} \text{ معادله فاقد جواب است.}$$

۳۳- گزینه (۳)

بیشترین مقدار عبارت سمت چپ معادله برابر ۵ است. چون در معادله عبارت برابر ۵ شده است. پس هر دو جز عبارت سمت چپ در بیشترین حالت خود قرار دارند. یعنی باید اشتراک جواب های دو معادله ی زیر را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = 1 \\ \cos\left(x - \frac{5\pi}{8}\right) = 1 \end{cases} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{5\pi}{8}$$

۳۴- گزینه (۳)

$$\begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{[0, 2\pi]} \left\{ \frac{\pi}{2} \right\} \\ \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\} \end{cases}$$

واضح است که این پنج ضلعی منتظم نیست.

۳۵- گزینه (۲)

$$\frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \sin x \sin 2x = 0$$

$$\sin x \sin 2x \left( \frac{1}{\cos x \cos 2x} - 1 \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x \cdot \sin 2x = 0 \\ \cos x \cos 2x = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \end{cases} \xrightarrow{x \in \left[ -\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4} \right]} x = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$$

$$\cdot \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos 2x = -1 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \text{ : برای حل معادله ی } \cos x \cos 2x = 1 \text{ دقت کنید که این تساوی تنها زمانی رخ می دهد که :}$$

در ضمن اگر  $\cos x = -1$  آنگاه  $\cos x = -1 = 1 - 2\cos^2 x = \cos 2x$  پس حالتی که هر دو برابر  $-1$  باشند امکان ندارد.

$$\begin{cases} \cos x = 1 \rightarrow x = 2k\pi \\ \cos 2x = 1 \rightarrow 2x = 2k\pi \rightarrow x = k\pi \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x = 2k\pi \xrightarrow{\left[ -\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4} \right]} x = 2\pi$$

پس معادله ۴ جواب دارد.

۳۶- گزینه (۴)

$$\begin{cases} \cos x + \cos 2x + \cos 3x \leq 3 \\ 3 \leq 3 + \sin^2 x \leq 4 \end{cases}$$

تنها در حالتی دو عبارت می توانند مساوی باشند که هم زمان داشته باشیم:

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \cos 2x = \cos 3x = 1 \end{cases} \longrightarrow x = 2k\pi \xrightarrow{x \in [\pi, 5\pi]} x = 2\pi, 4\pi$$

۳۷- گزینه (۳)

$$\sin^2 x - 2(1+a)\sin x + 4a = 0 \Rightarrow \sin x = (1+a) \pm \sqrt{(a+1)^2 - 4a}$$

$$\Rightarrow \sin x = (1+a) \pm \sqrt{(a-1)^2} = (1+a) \pm |a-1|$$

اگر  $a \geq 1$  ، نتیجه می گیریم  $|a-1| = a-1$  بنابراین  $\sin x = 2$  یا  $\sin x = 2a$  که در هر حالت  $\sin x \geq 2$  و معادله ریشه ای ندارد.

اگر  $a < 1$  ، باز همان نتایج برای  $\sin x$  بدست می آید. ولی این بار معادله  $\sin x = 2a$  شاید جواب داشته باشد. با توجه به شرط

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} < \sin x \leq 1 \Rightarrow 1 < 2a \leq 1 \longrightarrow a \in \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \quad \text{مسئله داریم:}$$

۳۸- گزینه (۳)

$$\tan x + \cot x = 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{2}{\sin 2x} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{8} \\ x = k\pi + \frac{3\pi}{8} \end{cases}$$

۳۹- گزینه (۳)

می دانیم همواره  $0 \leq \cos^4 x \leq 1$  و  $0 \leq \cos^2 x \leq 1$  بنابراین تساوی زمانی برقرار است که  $\cos^4 x = \cos^2 x = 1$  یعنی  $\cos x = \pm 1$ . تنها ریشه‌ی معادله در بازه‌ی  $x = \pi$  مفروض است.

۴۰- گزینه (۳)

$$2 \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x = 2 \sin x \\ \Rightarrow 2 \sin x (\cos x \cos 2x \cos 4x - 1) = 0$$

اگر  $\sin x = 0$  که معادله دارای جواب های  $\{0, \pi, 2\pi\}$  است در غیر این صورت داریم  $\cos x \cos 2x \cos 4x = 1$  که طبق آن حاصل ضرب سه مقدار بین ۱ و -۱ برابر ۱ شده است. پس هر سه مقدار برابر ۱ یا -۱ باشند ولی می دانیم اگر  $\cos x = \pm 1$  آنگاه  $\sin x = 0$  پس ریشه های این حالت را پیش از این پیدا کرده ایم.

۴۱- گزینه (۲)

می دانیم بیشترین مقدار  $\cos^2 x$  برابر ۱ و کمترین مقدار  $1 + \sqrt{\sin x}$  نیز برابر ۱ است. پس وقتی دو طرف با هم برابر می شوند که هر دو برابر ۱ باشند در این صورت  $\cos x = \pm 1, \sin x = 0$  در فاصله‌ی مورد نظر برای  $x = \pi$  و  $x = 2\pi$  و  $x = 3\pi$  این شرایط برقرار است.

۴۲- گزینه (۳)

روش اول) خط  $y = 2\sqrt{3}$  نمودار تابع را در بازه‌ی  $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$  فقط یک بار قطع کرده است. معنای آن این است که معادله‌ی  $2\sqrt{3} = \tan 3x + a \cot 3x$  در بازه‌ی  $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$  فقط یک جواب دارد.

$$\tan 3x + \frac{a}{\tan 3x} = 2\sqrt{3}$$

$$\tan^2 3x - 2\sqrt{3} \tan 3x + a = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow 12 - 4a = 0 \Rightarrow a = 3$$

روش دوم) طبق نامساوی  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$  داریم:

$$\tan 3x + a \cot 3x \geq 2\sqrt{\tan 3x \times a \cot 3x} = 2\sqrt{a}$$

$$a = 3 \text{ یا } 2\sqrt{a} = 2\sqrt{3} \text{ پس}$$

۴۳- گزینه (۱)

$$\sin 2x + \sqrt{2} \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (2 \sin x + \sqrt{2}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \frac{6\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi + \frac{i\pi}{4}, i \in \{2, 6, 5, 7\}$$

۴۴- گزینه (۲)

$$\cos^2 x = 1 + \sqrt{\sin x}$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \\ 1 \leq 1 + \sqrt{\sin x} \leq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 1 \\ 1 + \sqrt{\sin x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \pm 1 \\ \sin x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow x = \pi, 2\pi, 3\pi$$

۴۵- گزینه (۳)

$$\cos x \cos 2x = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k'\pi + \frac{\pi}{4} & (k = 2k') \\ x = k'\pi + \frac{3\pi}{4} & (k = 2k' + 1) \end{cases}$$

$$k\pi + \frac{2\pi}{4} = (k-1)\pi + \frac{6\pi}{4} \text{ : پس } i \in \{1, 2, 3\} \text{ اما با توجه به گزینه ها به جای } i = 2 \text{ می توان } i = 6 \text{ نیز قرار داد زیرا:}$$

۴۶- گزینه (۳)

$$(1 + \tan^2 a)^2 = 8 \tan a (1 - \tan^2 a)$$

$$\Rightarrow 1 = 4 \times \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a} \cdot \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a} \Rightarrow 1 = 4 \sin 2a \cos 2a \Rightarrow 1 = 2(2 \sin 2a \cos 2a) = 2 \sin 4a$$

$$\Rightarrow \sin 4a = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 4a = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 4a = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{24} \xrightarrow{\text{حاده}} a = \frac{\pi}{24} \\ a = \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{24} \xrightarrow{\text{حاده}} a = \frac{5\pi}{24} \end{cases}$$

$$\text{مجموع جواب های حاده} = \frac{\pi}{24} + \frac{5\pi}{24} = \frac{\pi}{4}$$



۴۷- گزینه (۴)

$$\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1 \Rightarrow \sin \frac{x}{2} = 1 - \cos x \Rightarrow \sin \frac{x}{2} = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi \\ \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \frac{x}{2} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 4k\pi + \frac{5\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{مجموع جواب ها} = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = 2\pi$$

۴۸- گزینه (۱)

$$-\sqrt{2} \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2} \Rightarrow [\sin x + \cos x] \in \{\pm 1, 0, -2\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \tan x + \cot x \geq 2 \\ \tan x + \cot x \leq -2 \end{array} \right\} \Rightarrow [\tan x + \cot x] \in Z - \{0, \pm 1\}$$

پس  $[\sin x + \cos x]$  و  $[\tan x + \cot x]$  وقتی با یکدیگر برابر می شوند که هردو برابر ۲- باشند.

برای آنکه  $[\tan x + \cot x] = -2$  شود باید  $\tan x < 0$  باشد پس انتهای کمان  $x$  در ربع دوم یا چهارم قرار دارد. اما از طرفی دیگر برای آن که  $[\sin x + \cos x] = -2$  باید  $x$  در ربع سوم باشد پس معادله جواب ندارد.

۴۹- گزینه (۳)

$$(\sqrt{6} + 2) \tan x + (\sqrt{6} - 2) \cot x = 4 \Rightarrow \sqrt{6}(\tan x + \cot x) + 2(\tan x - \cot x) = 4$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{6}}{\sin 2x} - 4 \cot 2x = 4 \Rightarrow \frac{2\sqrt{6} - 4 \cos 2x}{\sin 2x} = 4 \Rightarrow 4 \sin 2x + 4 \cos 2x = 2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \sin 2x + \cos 2x = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

۵۰- گزینه (۴)

طرفین را به توان ۲ می رسانیم:

$$(\Delta(\sin x + \cos x))^2 = (2\sqrt{10})^2 \Rightarrow 2\Delta(1 + 2 \sin x \cos x) = 40$$

$$\Rightarrow 1 + 2 \sin x \cos x = \frac{20}{\Delta} \Rightarrow \frac{1 + 2 \sin x \cos x}{\cos^2 x} = \frac{20}{\Delta} \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + \tan^2 x + 2 \tan x = \frac{20}{\Delta} + \frac{20}{\Delta} \tan^2 x$$

$$\Rightarrow 3 \tan^2 x - 10 \tan x + 3 = 0 \Rightarrow (\tan x - 3)(3 \tan x - 1) = 0 \Rightarrow \tan x = 3, \frac{1}{3}$$