



سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی**

**سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور**

**نمونه سوالات امتحانات ریاضی**

**نرم افزارهای ریاضیات**

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

۱- یکی از جواب های کلی معادله ی مثلثاتی  $\cos \sqrt{x} + 2 \sin^2 x = 1$  کدام است.

$$\frac{k\pi}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{k\pi}{5} \quad (۳)$$

$$\frac{2k\pi}{7} \quad (۲)$$

$$\frac{2k\pi}{9} \quad (۱)$$

۲- یکی از جواب های کلی معادله ی مثلثاتی  $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi + \frac{x}{3}\right)$  کدام است.

$$3k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{3k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (۳)$$

$$3k\pi - \frac{5\pi}{8} \quad (۲)$$

$$\frac{3k\pi}{2} - \frac{5\pi}{8} \quad (۱)$$

۳- معادله ی مثلثاتی  $\cos^2 x = \sin^2 x + \sin 3x$  چند جواب در بازه ی  $[0, \pi]$  دارد.

$$4 \quad (۴)$$

$$3 \quad (۳)$$

$$2 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

۴- تعداد جواب های معادله ی  $\sin 3x \cos x = \tan x + \sin x \cos 3x$  در بازه ی  $[0, 2\pi]$  چند تا است؟

$$7 \quad (۴)$$

$$6 \quad (۳)$$

$$5 \quad (۲)$$

$$4 \quad (۱)$$

۵- معادله ی مثلثاتی  $\cos 2x = 4 \cos x - 4$  در بازه ی  $[-\pi, 3\pi]$  چند جواب دارد.

$$5 \quad (۴)$$

$$4 \quad (۳)$$

$$3 \quad (۲)$$

$$2 \quad (۱)$$

۶- معادله ی  $\sin 2\theta + \sqrt{2} \cos \theta = 0$  چند جواب در بازه ی  $[-\pi, \pi]$  دارد.

$$4 \quad (۴)$$

$$3 \quad (۳)$$

$$2 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

۷- کدام گزینه یک جواب کلی معادله ی مثلثاتی  $\sin^2 x = 0 / 75 \sin x - 0 / 25 \sin 5x$  است.

$$\frac{2k-1}{2} \pi \quad (۴)$$

$$\frac{2k+1}{8} \pi \quad (۳)$$

$$\frac{2k-1}{8} \pi \quad (۲)$$

$$\frac{2k+1}{2} \pi \quad (۱)$$

۸- جواب کلی معادله ی مثلثاتی  $\sin x = \sqrt{2} + \cos x$  کدام است.

$$3k\pi + \frac{3\pi}{4} \quad (۴)$$

$$2k\pi + \frac{3\pi}{4} \quad (۳)$$

$$k\pi + \frac{3\pi}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} \quad (۱)$$

۹- جواب کلی معادله ی مثلثاتی  $2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin(\pi - x) + 3 \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \sin(\pi + x) = 0$  کدام است.

$$k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (۴)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۳)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (۲)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۱)$$

۱۰- انتهای کمان های جواب های معادله ی  $2 \sin^2 x = 1 + \cos x$  روی دایره ی مثلثاتی رأس های کدام چند ضلعی هستند.

$$(۴) \text{ مربع}$$

$$(۳) \text{ مثلث قائم الزاویه}$$

$$(۲) \text{ مثلث متساوی الاضلاع}$$

$$(۱) \text{ مثلث متساوی الساقین}$$

۱۱- جواب کلی معادله ی مثلثاتی  $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2$  کدام است.

$$2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (۴)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (۳)$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{12} \quad (۲)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{12} \quad (۱)$$

۱۲- اگر زاویه ای حاده باشد که  $\sin \theta = \frac{3}{5}$  کلیه جواب های معادله  $8 \sin x + 6 \cos x = 5$  به کدام صورت است.

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} - \theta \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} - \theta \end{cases} \quad (۲)$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} - \theta \\ x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} - \theta \end{cases} \quad (۱)$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{8} - \theta \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{8} - \theta \end{cases} \quad (۴)$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} - \theta \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} - \theta \end{cases} \quad (۳)$$

۱۳- کلیه جواب های معادله  $\frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 4$  کدام است.

$$\begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \frac{2\pi}{9} \end{cases} \quad (۲)$$

$$\begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{k\pi}{3} + \frac{2\pi}{9} \end{cases} \quad (۱)$$

$$\begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ x = k\pi + \frac{2\pi}{9} \end{cases} \quad (۴)$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{2\pi}{9} \end{cases} \quad (۳)$$

۱۴- کلیه جواب های معادله  $\tan x - \cot x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$  کدام است.

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \quad (۲)$$

$$\begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \quad (۱)$$

$$\begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = k\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (۴)$$

$$\begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \quad (۳)$$

۱۵- جواب کلی معادله مثلثاتی  $\tan\left(x + \frac{\pi}{7}\right) + \tan\left(\frac{5\pi}{14} - x\right) = 2$  کدام است.

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{28} \quad (۴)$$

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{28} \quad (۳)$$

$$k\pi + \frac{3\pi}{28} \quad (۲)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{28} \quad (۱)$$

۱۶- معادله مثلثاتی  $\sin^2 x - 2 \cos^2 x + 3 \sin x \cos x = 1$  چند جواب در بازه  $[0, 2\pi]$  دارد.

$$۴ \quad (۴)$$

$$۳ \quad (۳)$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

۱۷- معادله‌ی مثلثاتی  $\sin x + \cos x - \sin x \cos x = 1$  چند جواب در بازه‌ی  $[0, 2\pi]$  دارد.

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۴ (۳)      ۴ (۴)

۱۸- از معادله‌ی  $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = \sqrt{8}$  مقدار  $\sin x + \cos x$  کدام است.

- ۱ (۱)  $-\sqrt{2}$       ۲ (۲)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$       ۳ (۳)  $-2\sqrt{2}$       ۴ (۴)  $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

۱۹- معادله‌ی مثلثاتی  $\tan\left(3x + \frac{\pi}{12}\right) \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$  چند جواب در بازه‌ی  $[0, \pi]$  دارد.

- ۳ (۱)      ۴ (۲)      ۵ (۳)      ۶ (۴)

۲۰- معادله‌ی مثلثاتی  $\tan^2 x = \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$  چند جواب در بازه‌ی  $[0, 2\pi]$  دارد.

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۴ (۳)      ۴ (۴)

۲۱- از معادله‌ی مثلثاتی  $\tan 2x = \tan x \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  کدام مقدار برای  $\tan x$  بدست می‌آید.

- ۱ (۱)  $\pm 1$       ۲ (۲)  $\pm\sqrt{3}$       ۳ (۳)  $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$       ۴ (۴)  $\pm\frac{1}{3}$

۲۲- مجموع جواب‌های متمایز معادله‌ی  $\sin x + \cos x + \tan x = \frac{1}{\cos x}$  در بازه‌ی  $[0, 2\pi]$  کدام است.

- ۱ (۱)  $\frac{9\pi}{2}$       ۲ (۲)  $\frac{7\pi}{2}$       ۳ (۳)  $3\pi$       ۴ (۴)  $4\pi$

۲۳- معادله‌ی  $\cot x = \frac{1}{1 + \tan x}$  چند جواب در بازه‌ی  $[0, 2\pi]$  دارد.

- ۱ (۱) صفر      ۲ (۲) ۱      ۳ (۳) ۲      ۴ (۴) ۳

۲۴- معادله‌ی  $\sqrt{1 + \sin x} = \cos x$  چند جواب در بازه‌ی  $[0, 2\pi]$  دارد.

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

۲۵- از معادله‌ی  $\tan^2 x = \frac{1}{3}(16 \sin^2 x - 3)$  مقدار  $\tan^2 x$  کدام است.

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

۲۶- اگر  $\cos 2a \neq 0$  آنگاه جواب کلی معادله‌ی  $\cos^2(x+a) + \cos^2(x-a) = 1$  کدام است.

- ۱ (۱)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$       ۲ (۲)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$       ۳ (۳)  $k\pi + \frac{\pi}{2}$       ۴ (۴)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$

۲۷- معادله‌ی مثلثاتی  $\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} = \cot x$  در بازه‌ی  $(0, \pi)$  چند جواب دارد.

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۲۸- اگر  $\sin \alpha = \frac{1}{8}$  باشد آنگاه مقدار  $x$  از معادله‌ی  $\tan \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} = 3 \sin 4x$  کدام است.  $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$

- (۱)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{8}$  (۳)  $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$  (۴)  $2k\pi + \frac{\pi}{8}$

۲۹- معادله‌ی مثلثاتی  $\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x} = 2$  چند جواب در بازه‌ی  $(-\pi, \pi)$  دارد.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۰- از معادله‌ی مثلثاتی  $2 + \cos 12x = 6 \cos^2 3x$  حاصل  $\cos^2 3x$  چند است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $\frac{1}{9}$

۳۱- اگر  $x, y$  دو زاویه‌ی مکمل باشند که  $\tan x = \frac{2k-1}{k+2}$  و  $\cot y = \frac{k+1}{k-4}$  در این صورت  $\cos \lambda x$  کدام است.

- (۱)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۳)  $-1$  (۴) ۱

۳۲- معادله‌ی  $\sin \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x}{3} = 2$  چند جواب در بازه‌ی  $(-\pi, 14\pi)$  دارد.

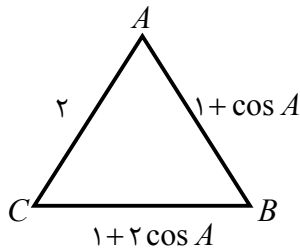
- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۳۳- کدام گزینه می‌تواند جواب معادله‌ی مثلثاتی  $\log_{\frac{5}{25}}^{\sin x} + \log_{\frac{5}{25}}^{\cos x} = 1$  باشد.  $(k \in N)$

- (۱)  $k\pi + \frac{\pi}{12}$  (۲)  $k\pi + \frac{5\pi}{12}$  (۳)  $2k\pi + \frac{\pi}{12}$  (۴)  $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$

۳۴- معادله‌ی مثلثاتی  $(1 + \tan^2 x) \sin 2x + \cot x = 3$  در بازه‌ی  $(0, 2\pi)$  چند جواب دارد.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) صفر



۳۵- در مثلث مقابل مقدار  $\cos A$  کدام است.

- (۱)  $\frac{\sqrt{35}-3}{7}$  (۲)  $\frac{\sqrt{37}-3}{7}$  (۳)  $\frac{\sqrt{28}-1}{14}$  (۴)  $\frac{\sqrt{28}-2}{7}$

۳۶- اگر  $5 = 3 \sin \theta + 4 \cos \theta$  آنگاه  $\tan \theta$  کدام است.

- (۱)  $\frac{3}{4}$  (۲)  $\frac{4}{3}$  (۳)  $\frac{5}{4}$  (۴)  $\frac{4}{5}$

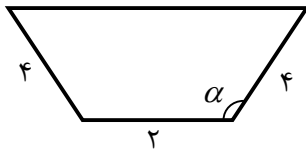
۳۷- اگر  $\sin x \cos x + \cos^2 x = \sin^2 \frac{3\pi}{4}$  باشد مقدار  $\tan 2x$  در صورت معین بودن کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) ۲

۳۸- معادله  $k + |x| = k \cos x$  به ازای مقادیر مختلف  $k$  همواره ..... جواب دارد.

- (۱) فقط یک (۲) یک، دو یا سه (۳) فقط دو (۴) به تعداد فرد

۳۹- تابعی که مساحت ذوزنقه شکل مقابل را بر حسب  $\alpha$  مشخص می کند کدام است.



$$S(\alpha) = 8(\sin \alpha + \sin 2\alpha) \quad (1)$$

$$S(\alpha) = 8(\sin \alpha - \sin 2\alpha) \quad (2)$$

$$S(\alpha) = 16 \left( \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right) \quad (3)$$

$$S(\alpha) = 8 \sin \alpha - 16 \cos \alpha \quad (4)$$

۴۰- معادله  $4 \sin^3 x + 3 \cos^4 x = 7 + \cos^2 x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) هیچ (۴) ۳

۴۱- معادله  $\tan x + \tan 2x = \tan 3x$  در فاصله  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد.

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۴۲- معادله  $2 \cos x \tan x + \cos 2x = 1$  در بازه  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$  چند جواب دارد.

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۴۳- کمترین مقدار  $f(x) = -4 \sin\left(3\pi x - \frac{\pi}{4}\right)$  به ازای کدام  $x$  بدست می آید.

- (۱)  $-\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{11}{12}$  (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴)  $\frac{7}{12}$

۴۴- مجموع جواب های معادله  $1 + \cos^6 x = \sin^2 x$  در بازه  $(0, 3\pi)$  کدام است.

- (۱)  $3\pi$  (۲)  $2\pi$  (۳)  $\frac{5\pi}{2}$  (۴)  $\frac{3\pi}{2}$

۴۵- جواب های معادله  $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 8$  بر روی دایره ی مثلثاتی رئوس کدام چند ضلعی می باشند.

- (۱) هشت ضلعی منتظم (۲) هشت ضلعی غیرمنتظم  
(۳) شش ضلعی منتظم (۴) شش ضلعی غیرمنتظم

۴۶- یکی از جواب های  $8 \cos^2 x = 6 \cos x + k \sin 3x$  برابر  $\frac{\pi}{24}$  می باشد.  $k$  کدام است.

- (۱)  $2\sqrt{2} + 2$  (۲)  $\sqrt{2} + 1$  (۳)  $2\sqrt{2} + 1$  (۴)  $\sqrt{2} + 2$

۴۷- جواب های  $1 = \frac{\sin^3 x \cos x}{\cos^3 x \sin x}$  چند نقطه را بر روی دایره ی مثلثاتی نمایش می دهند.

- (۱) هیچ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

۴۸- نقاط انتهایی جواب های معادله ی  $\sin x(1 - \cos x) = \cos x - \sin^2 x$  بر روی دایره ی مثلثاتی رئوس یک چند ضلعی است. مساحت این چند ضلعی کدام است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۲)  $\sqrt{2}$  (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۴)  $\sqrt{3}$

۴۹- کوچکترین ریشه ی مثلث معادله ی  $2 \cos x + \frac{\sin 7x}{\sin x} = 0$  بر حسب درجه کدام است؟

- (۱)  $10^\circ$  (۲)  $20^\circ$  (۳)  $36^\circ$  (۴)  $40^\circ$

۵۰- معادله ی  $1 = \tan 2x \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$  چند ریشه در بازه ی  $[0, \pi]$  دارد.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ

۵۱- به ازای چند مقدار صحیح  $k$ ، معادله ی  $3 \sin x - 5 \cos x = k$  جواب دارد.

- (۱) ۱۰ مقدار (۲) ۱۱ مقدار (۳) ۱۲ مقدار (۴) ۱۳ مقدار

۵۲- جواب های معادله ی  $2\sqrt{2} = \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\cos 2x}$  در بازه ی  $(0, \pi)$  تشکیل کدام شکل را می دهند.

- (۱) مربع (۲) مستطیل (۳) دوزنقه (۴) مثلث متساوی الاضلاع

۵۳- جمع جواب های معادله  $1 = a \sin^2 x + b \sin 2x = f(x)$  برابر  $\frac{3\pi}{4}$  است. جمع جواب های آن در بازه ی  $[\pi, 2\pi]$

کدام است.

- (۱)  $3\pi$  (۲)  $\frac{3\pi}{2}$  (۳)  $\frac{7\pi}{4}$  (۴)  $\frac{11\pi}{4}$

۵۴- در معادله ی  $\sqrt{2}(\sin x - \cos x) = 1 - 2 \sin x \cos x$  کدام عدد صدق می کند.

- (۱)  $\frac{15\pi}{4}$  (۲)  $\frac{10\pi}{3}$  (۳)  $\frac{11\pi}{4}$  (۴)  $\frac{11\pi}{3}$

۵۵- جمع زوایای حاده ی معادله ی  $4 = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sqrt{3}}{\sin x}$  کدام است.

- (۱)  $\frac{4\pi}{9}$  (۲)  $\frac{5\pi}{9}$  (۳)  $\frac{\pi}{3}$  (۴)  $\frac{2\pi}{3}$

۵۶- در معادله ی  $1 = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$  جواب ها روی دایره ی مثلثاتی نمایش رئوس کدام چند ضلعی است.

- (۱) لوزی (۲) مربع (۳) مستطیل غیرمربع (۴) شش ضلعی منتظم

۵۷- جواب های معادله  $\tan x + \tan 3x = \cot x + \cot 3x$  چند نقطه را روی دایره ی مثلثاتی مشخص می کنند.

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶

۵۸- حدود  $a$  کدام باشد تا معادله ی مثلثاتی  $\cos^2 x + a \sin 2x = 4$  ریشه نداشته باشد.

- (۱)  $|a| < 4$  (۲)  $|a| < 2\sqrt{3}$  (۳)  $|a| < 3\sqrt{2}$  (۴)  $|a| < 4\sqrt{3}$

۵۹- مجموع جواب های معادله ی  $1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos^2 x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin^2 x\right)$  در بازه ی  $(0, 2\pi)$  کدام است.

- (۱)  $\pi$  (۲)  $2\pi$  (۳)  $3\pi$  (۴)  $4\pi$

۶۰- نقاط انتهایی جواب های معادله ی  $2 - \cos^2 x = \sin 2x + 2 \sin^2 x$  روی دایره ی مثلثاتی، رأس های کدام چند ضلعی است.

- (۱) مربع (۲) مستطیل (۳) ذوزنقه (۴) مثلث متساوی الاضلاع

۶۱- مجموع جواب های معادله ی  $\sin 3x = (1 - \sqrt{3}) \sin x$  در بازه ی  $(0, 2\pi)$  کدام است.

- (۱)  $2\pi$  (۲)  $4\pi$  (۳)  $5\pi$  (۴)  $9\pi$

۶۲- جواب کلی معادله مثلثاتی  $\log_2(\sin x) - \log_2(\cos x) = \frac{1}{2} \log_2$  کدام است.

- (۱)  $k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{6}$  (۳)  $2k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۴)  $2k\pi + \frac{\pi}{6}$

۶۳- به ازای چه مقادیری از  $m$  معادله ی  $2 \tan x - m \cot x = 5$  جواب دارد.

- (۱)  $m \geq -\frac{25}{8}$  (۲)  $m \leq -\frac{8}{25}$  (۳)  $m \leq -\frac{5}{2}$  (۴)  $m \geq -5$

۶۴- بزرگترین عدد صحیح  $m$  که به ازای آن معادله ی  $\sin^2 x - m \cos^2 x + 3 \sin x \cos x = 7$  دارای جواب باشد کدام است؟

- (۱) -۶ (۲) -۷ (۳) -۸ (۴) -۵

۶۵- معادله ی  $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} = \sin 5x \cos 5x$  در  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  چند جواب دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۶- مجموع جواب های بین صفر و  $2\pi$  در معادله ی  $5 = 2 \sin^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 3 \cos\left(x - \frac{5\pi}{8}\right)$  کدام است.

- (۱)  $\frac{3\pi}{4}$  (۲)  $\frac{5\pi}{4}$  (۳)  $\frac{5\pi}{8}$  (۴)  $\frac{7\pi}{8}$



۶۷- انتهای کمان های  $x$  از معادله  $\cos 2x(1 - \sin x) = 0$  بر روی دایره ی مثلثاتی رئوس یک ..... ضلعی ..... را معین می کند.

- (۱) ۵- منتظم (۲) ۴- منتظم (۳) ۵- غیر منتظم (۴) ۴- غیر منتظم

۶۸- معادله ی  $\tan x \tan 2x = \sin x \sin 2x$  در فاصله  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$  چند جواب است.

- (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) صفر

۶۹- معادله ی  $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 3 + \sin^2 x$  در بازه ی  $[\pi, 5\pi]$  چند جواب دارد.

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۲

۷۰- جواب عمومی  $\tan^2 x - \cos 2x = 1$  کدام است.

- (۱)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۲)  $2k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۳)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$  (۴)  $\frac{(k+1)\pi}{4}$

۷۱- برای کدام مقادیر  $a$ ، معادله ی  $\sin^2 x - 2(1+a)\sin x + 4a = 0$  در فاصله ی  $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$  دارای جواب است.

- (۱)  $|a| < \frac{1}{4}$  (۲)  $a \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$  (۳)  $a \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$  (۴)  $a \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$

۷۲- اگر  $\tan(x+\alpha) \tan\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) = 1$  حاصل  $\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$  کدام است.

- (۱)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۴)  $\frac{1}{2}$

۷۳- معادله ی  $\tan x + \cot x = 2\sqrt{2}$  چند ریشه در فاصله  $[0, 2\pi]$  دارد.

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۷۴- معادله ی  $\cos^4 x + \cos^2 x - 2 = 0$  در بازه ی  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$  چند جواب دارد.

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۴

۷۵- معادله ی  $\sin 2x \cos 2x \cos 4x = 2 \sin x$  در بازه ی  $[0, 2\pi]$  چند ریشه دارد.

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۵

۷۶- معادله ی  $\sin^3 x + \cos^3 x + 3 \sin^2 x \cos x + 3 \cos^2 x \sin x = \frac{1}{3}$  در بازه ی  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$  چند جواب دارد؟ (آزاد ۸۷)

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) صفر (۴) ۱

۷۷- معادله ی  $\cos^6 x = 1 + \sqrt{\sin x}$  چند ریشه در بازه ی  $\left(\frac{\pi}{2}, 3\pi\right)$  دارد.

- (۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) ۲

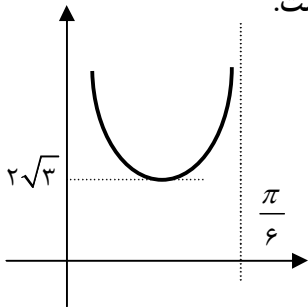
۷۸- معادله  $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \tan \theta$  برای هر  $\theta \in [a, b]$  جواب دارد. با فرض  $-\frac{\pi}{2} < a < b < \frac{\pi}{2}$  حاصل  $b - a$  کدام است.

$$\frac{3\pi}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{2\pi}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{\pi}{3} \quad (۱)$$



۷۹- نمودار تابع  $y = \tan 3x + a \cot 3x$  به صورت شکل زیر است. مقدار  $a$  کدام است.

$$-\sqrt{3} \quad (۱)$$

$$-۳ \quad (۲)$$

$$۳ \quad (۳)$$

$$\sqrt{3} \quad (۴)$$

۸۰- ریشه های معادله  $\sin x - \cos x = 1$  به صورت  $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$  است. مجموعه ای اعدادی که به جای  $i$  می توان قرار داد کدام است.

$$\{0, 6\} \quad (۴)$$

$$\{0, 3, 6\} \quad (۳)$$

$$\{3, 6\} \quad (۲)$$

$$\{0, 3\} \quad (۱)$$

۸۱- اگر ریشه های  $\sin 2x + \sqrt{2} \cos x = 0$  به صورت  $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{4}$  باشد مجموعه ای اعداد  $i$  کدام می تواند باشد.

$$\{2, 3, 5, 7\} \quad (۴)$$

$$\{1, 2, 3, 4\} \quad (۳)$$

$$\{1, 3, 5, 7\} \quad (۲)$$

$$\{2, 5, 6, 7\} \quad (۱)$$

۸۲- معادله  $\cos^4 x = 1 + \sqrt{\sin x}$  چند ریشه در بازه  $\left[\frac{\pi}{2}, 3\pi\right]$  دارد.

$$۲ \quad (۴)$$

$$۱ \quad (۳)$$

$$۳ \quad (۲)$$

$$\text{صفر} \quad (۱)$$

۸۳- جواب کلی معادله  $\cos x \cdot \cos 2x = 0$  به صورت  $k\pi + \frac{i\pi}{4}$  می باشد. مقادیر  $i$  کدام است.

$$\{2, 4, 6\} \quad (۴)$$

$$\{1, 3, 6\} \quad (۳)$$

$$\{1, 2, 5\} \quad (۲)$$

$$\{2, 3, 4\} \quad (۱)$$

۸۴- اگر  $(1 + \tan^2 a)^7 = 8 \tan a (1 - \tan^2 a)$  مجموع دو زاویه ای حاده  $a$  چند درجه است.

$$۶۰ \quad (۴)$$

$$۴۵ \quad (۳)$$

$$۷۵ \quad (۲)$$

$$۳۰ \quad (۱)$$

۸۵- مجموع جواب های معادله  $\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1$  در بازه  $(0, 2\pi)$  کدام است.

$$2\pi \quad (۴)$$

$$\frac{5\pi}{3} \quad (۳)$$

$$\pi \quad (۲)$$

$$\text{صفر} \quad (۱)$$

۸۶- در معادله  $\cos 2x = 1 + 6 \tan^2 x$  جواب ها به کدام صورت است.

$$\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3} \quad (۴)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (۳)$$

$$\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6} \quad (۲)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۱)$$

۸۷- معادله  $[\sin x + \cos x] = [\tan x + \cot x]$  در فاصله  $(0, \pi)$  چند ریشه دارد.

- (۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۲

۸۸- مجموعه جواب های معادله  $(\sqrt{6} + 2) \tan x + (\sqrt{6} - 2) \cot x = 4$  با مجموعه جواب کدام معادله برابر است.

$$\begin{array}{ll} \sin x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2} & (۱) \\ \sin 2x + \cos 2x = \frac{\sqrt{6}}{3} & (۲) \\ \sin x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{3} & (۴) \\ \sin 2x + \cos 2x = \frac{\sqrt{6}}{2} & (۳) \end{array}$$

۸۹- در معادله مثلثاتی  $\lambda \sin^2 x + k \sin 2x = 1$  مجموع جواب های متمایز در فاصله  $[0, \pi]$  برابر  $\frac{3\pi}{4}$  است  $k$  کدام است.

- (۱) -۲ (۲) -۴ (۳) ۲ (۴) ۲

۹۰- معادله مثلثاتی  $\sin^2 2x - \cos^2 2x = \sqrt{2}m$  به ازای چه مقدار  $m$  دارای جواب است.

- (۱)  $-1 \leq m \leq 1$  (۲)  $m < -1$  (۳)  $m > 1$  (۴)  $|m| > 1$

۹۱- اگر  $x', x''$  ریشه های معادله  $2 \tan x + \cot x = k - 1$  در بازه  $[0, \pi]$  باشند به ازای کدام مقدار  $k$  ،  $\tan(x' + x'') = 2$  است.

- (۱) -۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۹۲- اگر معادله  $m \sin x + m \cos x = 1$  یکی از جواب هایش  $x = \frac{\pi}{12}$  باشد،  $m$  کدام است.

$$\begin{array}{ll} \frac{\sqrt{6}}{3} & (۱) \\ 1 & (۲) \\ \sqrt{6} + \sqrt{2} & (۳) \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & (۴) \end{array}$$

۹۳- اگر  $\Delta(\sin x + \cos x) = 2\sqrt{10}$  باشد مقدار  $\tan x$  کدام است.

- (۱) -۳ (۲)  $\frac{3}{2}$  (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴) ۳

۹۴- تعداد جواب های متمایز معادله  $\tan x + \cot x + 2 = 0$  در فاصله  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  کدام است.

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۹۵- حدود تغییرات  $\alpha$  در فاصله  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  برای اینکه معادله  $\sqrt{2} \cos x + \sin x = \tan \alpha$  دارای جواب باشد برابر کدام است.

$$\begin{array}{ll} -\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4} & (۱) \\ -\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{6} & (۲) \\ -\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3} & (۳) \\ 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3} & (۴) \end{array}$$

۹۶- اگر معادله  $2\sin^2 x - \cos^2 x - 2k \sin x \cos x = -4$  دارای جواب باشد آنگاه حدود تغییرات  $k$  کدام است.

(۱)  $|k| \leq 3\sqrt{2}$  (۲)  $|k| \leq 2$  (۳)  $|k| \geq 2$  (۴)  $|k| \geq 3\sqrt{2}$

۹۷- از معادله مثلثاتی  $1 = \sin 2x + (\sin x - \cos x) \frac{\sqrt{2}}{2}$  مقدار  $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  کدام است.

(۱) ۱ و صفر (۲)  $\frac{1}{2}$  و صفر (۳) ۱ و  $\frac{1}{2}$  (۴)  $-\frac{1}{2}$  و ۱

۹۸- جواب کلی معادله  $1 = \sin 2x - \sqrt{3}(\sin x + \cos x)$  کدام است.

(۱)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۲)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۳)  $2k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۴)  $2k\pi - \frac{\pi}{4}$

۹۹- جواب کلی معادله مثلثاتی  $0 = \sin 2x + 5 + 3\sqrt{2}(\sin x + \cos x)$  به کدام صورت است.

(۱)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۲)  $2k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۳)  $k\pi + \frac{5\pi}{4}$  (۴)  $2k\pi - \frac{3\pi}{4}$

۱۰۰- اگر معادله  $m = 2\cos^2 x + 2m \sin x \cos x = m$  دارای جواب باشد حدود تغییرات  $m$  کدام است.

(۱)  $-\frac{1}{2} < m \leq \frac{3}{2}$  (۲)  $-1 \leq m \leq 1$  (۳)  $m \leq 0$  (۴)  $m \geq 0$

۱۰۱- حدود  $k$  برای آنکه معادله  $2 = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x + k \sin x \cos x$  دارای ریشه باشد کدام است.

(۱)  $|k| \leq 2\sqrt{2}$  (۲)  $|k| \geq 2\sqrt{2}$  (۳)  $-4 < k \leq 4$  (۴)  $k > 2$

۱۰۲- نقاط پایانی جواب های معادله  $\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})\sin^2 x + (1 - \sqrt{3})\sin x \cos x$  بر روی دایره مثلثاتی رأس های

کدام چند ضلعی است؟

(۱) مربع (۲) مستطیل (۳) دوزنقه (۴) چهارضلعی غیرمستطیل

۱۰۳- جواب عمومی معادله  $\frac{1}{4} = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$  کدام است.

(۱)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۲)  $\frac{k\pi}{2}$  (۳)  $k\pi$  (۴)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

۱۰۴- جواب های کلی معادله مثلثاتی  $\sin \Delta x \sin 2x = \cos 7x \cos 4x$  کدام است.

(۱)  $\begin{cases} x = \frac{k\pi}{6} + \frac{\pi}{12} \\ x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$  (۲)  $\begin{cases} x = \frac{k\pi}{9} + \frac{\pi}{18} \\ x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$  (۳)  $\begin{cases} x = \frac{k\pi}{9} + \frac{\pi}{18} \\ x = \frac{k\pi}{6} + \frac{\pi}{12} \end{cases}$  (۴)  $\begin{cases} x = \frac{k\pi}{6} + \frac{\pi}{18} \\ x = \frac{k\pi}{9} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$

۱۰۵- انتهای کمان جواب های معادله  $\cos^2 \frac{3x}{2} = \cos 4x \cos x$  روی دایره مثلثاتی، رأس های کدام چند ضلعی

هستند.

(۱) چهارضلعی منظم (۲) پنج ضلعی منظم (۳) چهارضلعی غیرمنتظم (۴) پنج ضلعی غیرمنتظم

۱۰۶- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $\cot \frac{x}{2} = \frac{2 \sin 2x - 1}{2 \cos 2x + \sqrt{3}}$  کدام است.

$$\frac{2k\pi}{3} + \frac{7\pi}{18} \quad (۴) \quad 4k\pi + \frac{7\pi}{6} \quad (۳) \quad \frac{3k\pi}{2} + \frac{7\pi}{8} \quad (۲) \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{7\pi}{12} \quad (۱)$$

۱۰۷- معادله‌ی  $\sin \frac{x}{6} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} = 1$  چند جواب متمایز در بازه‌ی  $[0, 5\pi]$  دارد.

$$5 \quad (۴) \quad 3 \quad (۳) \quad 2 \quad (۲) \quad 1 \quad (۱)$$

۱۰۸- مجموع زوایای حاده‌ای که در معادله‌ی  $\frac{\sin x + \sin 9x}{\cos x - \cos 9x} = \sqrt{3}$  صدق می‌کنند کدام است.

$$\frac{13\pi}{12} \quad (۴) \quad \frac{\pi}{3} \quad (۳) \quad \frac{\pi}{4} \quad (۲) \quad \frac{\pi}{6} \quad (۱)$$

۱۰۹- اختلاف بزرگترین و کوچکترین ریشه‌ی معادله  $\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}$  در بازه‌ی  $(0, \frac{3\pi}{2})$  کدام است.

$$\frac{13\pi}{12} \quad (۴) \quad \frac{7\pi}{6} \quad (۳) \quad \pi \quad (۲) \quad \frac{11\pi}{12} \quad (۱)$$

۱۱۰- جواب کلی معادله‌ی  $\frac{\sin x \cos 3x + \sin 3x \cos 7x}{\sin 4x} = 1$  کدام است.

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \quad (۴) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (۳) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۲) \quad \frac{k\pi}{3} \quad (۱)$$

۱۱۱- جمع جواب های معادله‌ی  $\cos \Delta x \cos 3x = \cos^2 x$  در بازه‌ی  $[0, k]$  برابر  $\frac{5\pi}{2}$  شده است. حداقل مقدار  $k$  کدام

است.

$$\frac{7\pi}{4} \quad (۴) \quad \frac{3\pi}{2} \quad (۳) \quad \pi \quad (۲) \quad \frac{3\pi}{4} \quad (۱)$$

۱۱۲- یکی از جواب های معادله‌ی  $\frac{\cos^2 2x - \cos^2 7x}{\sin 5x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  کدام است.

$$\frac{\pi}{6} \quad (۴) \quad \frac{\pi}{9} \quad (۳) \quad \frac{\pi}{36} \quad (۲) \quad \frac{\pi}{18} \quad (۱)$$

۱۱۳- معادله‌ی  $2 \sin x \cos 3x + \cos 4x = (\sin x - \cos x)^2$  در بازه‌ی  $[0, 2\pi]$  چند ریشه دارد.

$$10 \quad (۴) \quad 9 \quad (۳) \quad 8 \quad (۲) \quad 7 \quad (۱)$$

۱۱۴- از به هم وصل کردن جواب های معادله‌ی  $\sin 2x - 2 \cos x \sin 3x = 1$  روی دایره‌ی مثلثاتی، یک چند ضلعی به دست می‌آید. مساحت این چندضلعی کدام است.

$$4 \quad (۴) \quad 3 \quad (۳) \quad 2 \quad (۲) \quad 1 \quad (۱)$$

۱۱۵- معادله‌ی  $\sin 4x \sin 2x + \sin^2 x = 0$  در بازه‌ی  $(0, \pi)$  چند ریشه دارد.

$$4 \quad (۴) \quad 3 \quad (۳) \quad 2 \quad (۲) \quad 1 \quad (۱)$$

## حل تست های معادلات مثلثاتی

۱- گزینه (۱)

$$\cos 7x = 1 - 2 \sin^2 x = \cos 2x \Rightarrow \cos 7x = \cos 2x \Rightarrow 7x = 2k\pi \pm 2x \Rightarrow \begin{cases} \Delta x = 2k\pi \\ 9x = 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{5} \\ x = \frac{2k\pi}{9} \end{cases}$$

۲- گزینه (۱)

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi + \frac{x}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\pi + \frac{x}{3}\right)\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}\right)$$

$$\xrightarrow{\cos(-\alpha) = \cos \alpha} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{x}{3} \\ x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{x}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2x}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\times \frac{3}{2}} x = 3k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \frac{4x}{3} = 2k\pi - \frac{5\pi}{6} \xrightarrow{\times \frac{3}{4}} x = \frac{3k\pi}{2} - \frac{5\pi}{8} \end{cases}$$

۳- گزینه (۳)

$$\cos^2 x = \sin^2 x + \sin 2x \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \sin 2x$$

$$\boxed{\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x} \Rightarrow \cos 2x = \sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + 2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ -x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{10} \\ k=1 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{10} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ k=2 \Rightarrow x = \frac{4\pi}{5} + \frac{\pi}{10} \Rightarrow x = \frac{9\pi}{10} \end{cases}$$

برای  $k < 0, k \geq 3$  جواب ها، خارج از بازه  $[0, \pi]$  هستند.

۴- گزینه (۴)

$$\sin 2x \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} + \sin x \cos 2x \Rightarrow \sin 2x \cos x - \sin x \cos 2x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \sin(2x - x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi & (1) \\ 2 \cos x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

$$(1) \begin{cases} k=0 \Rightarrow x=0 \\ k=1 \Rightarrow x=\pi \\ k=2 \Rightarrow 2\pi \end{cases} \quad (2) \begin{cases} k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \\ k=1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \\ k=2 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \\ k=3 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

۵- گزینه (۳)

$$\Rightarrow \cos 2x = 7 \cos x - 4 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 = 7 \cos x - 4 = 1 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 7 \cos x + 3 = 0 \Rightarrow (\cos x - 3)(2 \cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 3 & \text{غ ق ق} \\ \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \rightarrow \left\{ -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3} \right\} \end{cases}$$

۶- گزینه (۴)

$$\sin 2\theta + \sqrt{2} \cos \theta = 0 \Rightarrow 2 \sin \theta \cos \theta + \sqrt{2} \cos \theta = 0 \Rightarrow \cos \theta (2 \sin \theta + \sqrt{2}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \theta = \begin{cases} 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ 2k\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ \theta = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \end{cases} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x \in [-\pi, \pi]} \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} \right\}$$

۷- گزینه (۳)

$$\sin^2 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 5x \xrightarrow{\times 4} 4 \sin^2 x = 3 \sin x - \sin 5x \Rightarrow \sin 5x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x = \sin 3x$$

$$\Rightarrow \sin 5x = \sin 3x \Rightarrow \begin{cases} 5x = 2k\pi + 3x \\ 5x = 2k\pi + \pi - 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi \\ 8x = (2k+1)\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{(2k+1)\pi}{8} \end{cases}$$

۸- گزینه (۳)

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \rightarrow x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$$

۹- گزینه (۱)

$$(2 \sin x)(\sin x) + 3(\cot x)(-\sin x) = 0 \Rightarrow 2 \sin^2 x + \frac{3 \cos x}{\sin x}(-\sin x) = 0$$

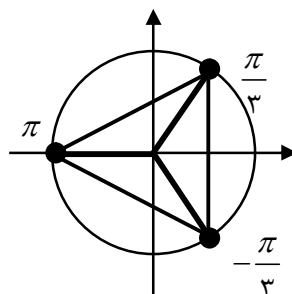
$$\Rightarrow 2 \sin^2 x - 3 \cos x = 0 \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) - 3 \cos x = 0 \Rightarrow -2 \cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0 \Rightarrow (2 \cos x - 1)(\cos x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -2 & \text{غ ق ق} \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

۱۰- گزینه (۲)

$$2 \sin^2 x = 1 + \cos x \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) = 1 + \cos x \Rightarrow 2(1 - \cos x)(1 + \cos x) = 1 + \cos x \Rightarrow \begin{cases} 1 + \cos x = 0 \\ 2(1 - \cos x) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos x = +\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \pi \\ x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$



مثلث تشکیل شده متساوی الاضلاع است.

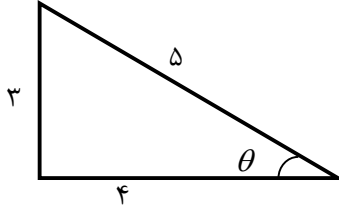
۱۱- گزینه (۱)

$$\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2 \Rightarrow \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} \sin \left( 2x + \frac{\pi}{3} \right) = 2 \Rightarrow 2 \sin \left( 2x + \frac{\pi}{3} \right) = 2 \Rightarrow \sin \left( 2x + \frac{\pi}{3} \right) = 1$$

$$\Rightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12}$$

۱۲- گزینه (۲)

$$\lambda \sin x + \epsilon \cos x = \delta \xrightarrow{+\theta} \sin x + \frac{\epsilon}{\lambda} \cos x = \frac{\delta}{\lambda}$$

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{\epsilon}{\delta} \\ \tan \theta = \frac{\epsilon}{\lambda} \\ \cos \theta = \frac{\lambda}{\delta} \end{cases}$$


$$\Rightarrow \sin x + \tan \theta \cos x = \frac{\delta}{\lambda} \Rightarrow \frac{1}{\cos \theta} \sin(x + \theta) = \frac{\delta}{\lambda} \Rightarrow \frac{\delta}{\epsilon} \sin(x + \theta) = \frac{\delta}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \sin(x + \theta) = \frac{1}{\epsilon} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x + \theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x + \theta = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} - \theta \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} - \theta \end{cases}$$

۱۳- گزینه (۳)

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3} \cos x + \sin x}{\sin x \cos x} = 4 \Rightarrow \sin x + \sqrt{3} \cos x = 4 \sin x \cos x \Rightarrow \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = 2(2 \sin x \cos x)$$

$$\Rightarrow 2 \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = 2 \sin 2x \Rightarrow \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = \sin 2x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x + \frac{\pi}{3} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \left( x + \frac{\pi}{3} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{2\pi}{9} \end{cases}$$

۱۴- گزینه (۱)

$$\Rightarrow \tan x - \cot x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{\times \tan x} \tan^2 x - 1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \tan x - 1 = 0 \Rightarrow \tan^2 x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \tan x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan x = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3} \\ \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$



۱۵- گزینه (۲)

$$\Rightarrow \tan\left(x + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) + \tan\left(\frac{5\pi}{14} - x\right) = 2 \Rightarrow \tan\left(x + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{5\pi}{14} - x\right)\right) = 2$$

$$\Rightarrow \tan\left(x + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) + \cot\left(x + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = 2 \xrightarrow{\tan\left(x + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = a} a + \frac{1}{a} = 2 \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow \tan\left(x + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = 1 \Rightarrow x + \frac{\pi}{\sqrt{2}} = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}$$

۱۶- گزینه (۴)

طرفین را بر  $\sin^2 x$  تقسیم می کنیم در ضمن:  $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$

$$\Rightarrow 1 - 2\cot^2 x + 3\cot x = 1 + \cot^2 x \Rightarrow 3\cot^2 x - 3\cot x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cot(\cot x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cot x = 0 = \cot \frac{\pi}{2} \\ \cot x = 1 = \cot \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

۱۷- گزینه (۳)

$$\sin x + \cos x = y \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 1 + 2\sin x \cos x = y^2 \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{y^2 - 1}{2} \Rightarrow y - \frac{y^2 - 1}{2} = 1 \xrightarrow{\times 2}$$

$$2y - y^2 + 1 = 2 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow (y - 1)^2 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \sin x + \cos x = 1 \Rightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} \left\{0, \frac{\pi}{2}, 2\pi\right\}$$

۱۸- گزینه (۲)

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = \sqrt{\lambda} \Rightarrow \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = \sqrt{\lambda} \Rightarrow \sin x + \cos x = \sqrt{\lambda} \sin x \cos x$$

با فرض  $\sin x + \cos x = y$  داریم:

$$(\sin x + \cos x)^2 = y^2 \Rightarrow 1 + 2\sin x \cos x = y^2 \Rightarrow 2\sin x \cos x = y^2 - 1$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{2}(y^2 - 1) \Rightarrow \sqrt{2}y^2 - y - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1 \pm 3}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

۱۹- گزینه (۳)

$$\tan\left(3x + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{\tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)} = \cot\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \tan\left(3x + \frac{\pi}{12}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \tan\left(\frac{3\pi}{4} - 2x\right)$$

$$\Rightarrow 3x + \frac{\pi}{12} = k\pi + \frac{3\pi}{4} - 2x \Rightarrow 5x = k\pi + \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{+\Delta} x = \frac{k\pi}{5} + \frac{2\pi}{15} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} \left\{\frac{2\pi}{15}, \frac{\pi}{3}, \frac{8\pi}{15}, \frac{11\pi}{15}, \frac{14\pi}{15}\right\}$$

$$\tan^{\sqrt{x}} = \frac{\tan x + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan \frac{\pi}{6} \tan x} \cdot \frac{\tan x - \tan \frac{\pi}{6}}{1 + \tan \frac{\pi}{6} \tan x} \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}$$

$$\tan^{\sqrt{x}} = \frac{\tan^{\sqrt{x}} x - \tan^{\sqrt{x}} \frac{\pi}{6}}{1 - \tan^{\sqrt{x}} \frac{\pi}{6} \tan^{\sqrt{x}} x} = \frac{\tan^{\sqrt{x}} x - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{\sqrt{x}} x} \xrightarrow{\tan^{\sqrt{x}} x = a} a = \frac{a - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} a}$$

$$\Rightarrow a \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} a \right) = a - \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow a - \frac{1}{\sqrt{3}} a^{\sqrt{x}} = a - \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow a^{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow \tan^{\sqrt{x}} x = 1 \Rightarrow \tan x = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$$

$$\frac{\sqrt{2} \tan x}{1 - \tan^{\sqrt{x}} x} = \tan x \cdot \frac{\tan x - 1}{1 + \tan x} \cdot \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} \Rightarrow \frac{\sqrt{2} \tan x}{1 - \tan^{\sqrt{x}} x} = -\tan x \Rightarrow \begin{cases} \tan x = 0 \\ \tan^{\sqrt{x}} x = \sqrt{3} \Rightarrow \tan x = \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\sin x + \cos x + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} \xrightarrow{\times \cos x} \sin x \cos x + \cos^{\sqrt{x}} x + \sin x = 1$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x + (1 - \sin^{\sqrt{x}} x) + \sin x = 1 \Rightarrow \sin x (\cos x - \sin x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x - \cos x = 1 \Rightarrow \sqrt{2} \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Rightarrow \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \left( \frac{\pi}{4} \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \pi \end{cases} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} \{0, \pi, 2\pi\}$$

توجه کنید که  $x = \frac{\pi}{2}$  مخرج کسر  $(\cos x)$  را صفر می کند پس قابل قبول نیست.

مجموع جواب ها:  $0 + \pi + 2\pi = 3\pi$

۲۳- گزینه (۱)

$$\cot x = \frac{1}{1 + \tan x} \Rightarrow \cot x(1 + \tan x) = 1 \Rightarrow \cot x + 1 = 1 \Rightarrow \cot x = 0 = \cot \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ k=1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

ظاهراً دو جواب دارد ولی هیچ کدام قابل قبول نیست زیرا هر دو  $\tan$  را بی معنی می کنند (در دامنه‌ی  $\tan$  قرار ندارند) پس معادله جواب ندارد.

۲۴- گزینه (۳)

$$\sqrt{1 + \sin x} = \cos x \xrightarrow{\text{به توان } 2} 1 + \sin x = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \sin x + \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x(1 + \sin x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in \left\{ 0, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right\}$$

اما توجه کنید که  $x = \pi$  در معادله‌ی اصلی صدق نمی کند پس معادله جواب های  $\left\{ 0, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right\}$  را دارد.

۲۵- گزینه (۳)

$$\Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3}(16 \sin^2 x - 3) \Rightarrow 3 \tan^2 x = 16 \sin^2 x - 3 \Rightarrow 3 \tan^2 x = \frac{16 \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} - 3$$

$$= \frac{16 \tan^2 x - 3 - 3 \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \Rightarrow 3 \tan^2 x = \frac{13 \tan^2 x - 3}{1 + \tan^2 x} \Rightarrow 3 \tan^2 x + 3 \tan^2 x = 13 \tan^2 x - 3$$

$$\Rightarrow 3 \tan^2 x - 10 \tan^2 x + 3 = 0 \Rightarrow (3 \tan^2 x - 1)(\tan^2 x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan^2 x = \frac{1}{3} \\ \tan^2 x = 3 \end{cases}$$

۲۶- گزینه (۲)

$$\frac{1 + \cos 2(x+a)}{2} + \frac{1 + \cos 2(x-a)}{2} = 1 \xrightarrow{\times 2} 1 + \cos(2x+2a) + 1 + \cos(2x-2a) = 2$$

$$\Rightarrow \cos(2x+2a) + \cos(2x-2a) = 0$$

پس باید مجموع دو کمان مضرب فردی از  $\pi$  باشد یعنی:

$$2x + 2a + 2x - 2a = (2k+1)\pi \Rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

۲۷- گزینه (۳)

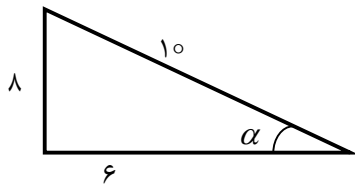
$$\cot \alpha - \cot 2\alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos 2\alpha}{\sin \alpha \sin 2\alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha \sin 2\alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cot \alpha - \cot 2\alpha = \frac{1}{\sin 2\alpha}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} = \cot x \Rightarrow (\cot x - \cot 2x) + (\cot 2x - \cot 4x) = \cot x \Rightarrow \cot 4x = 0 = \cot \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \xrightarrow{x \in (0, \pi)} \left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8} \right\}$$

۲۸- گزینه (۱)



$$\Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \\ \cos \alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 3 = 3 \sin 4x \Rightarrow \sin 4x = 1$$

$$\Rightarrow 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

۲۹- گزینه (۳)

$$\left( \frac{1}{\cos^2 x} \right)^2 - 3 \tan^2 x \left( \frac{1}{\cos^2 x} \right) = 2 \Rightarrow (1 + \tan^2 x)^2 - 3 \tan^2 x (1 + \tan^2 x) = 2$$

$$\Rightarrow 1 + 2 \tan^2 x + \tan^4 x - 3 \tan^2 x - 3 \tan^4 x = 2$$

$$\Rightarrow \tan^2 x = 1 \Rightarrow \tan x = \pm 1 \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4} \xrightarrow{x \in (-\pi, \pi)} \left\{ \pm \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$$

۳۰- گزینه (۱)

$$2 + \cos 12x = 6 \cos^2 3x$$

$$\Rightarrow 2 + (2 \cos^2 6x - 1) = 6 \left( \frac{1 + \cos 6x}{2} \right) = 3(1 + \cos 6x)$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 6x - 3 \cos 6x - 2 = 0 \Rightarrow (\cos 6x - 2)(2 \cos 6x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos 6x = 2 \text{ غ ق} \\ \cos 6x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos^2 3x = \frac{1 + \cos 6x}{2} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

۳۱- گزینه (۴)

می دانیم دو زاویه  $x$ ،  $y$  در صورتی مکمل اند که  $x + y = \pi$  باشد. بنابراین:

$$y = \pi - x \Rightarrow \cot y = \cot(\pi - x) \Rightarrow \cot y = -\cot x = -\frac{1}{\tan x} \Rightarrow \frac{k+1}{k-4} = -\frac{k+2}{3k-1}$$

$$\Rightarrow (3k-1)(k+1) = (k-4)(-k-2) \Rightarrow 3k^2 + 3k - k - 1 = -k^2 - 2k + 4k + 8$$

$$\Rightarrow 4k^2 = 9 \Rightarrow k = \pm \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{3}{2} \rightarrow \tan x = 1 \\ k = -\frac{3}{2} \rightarrow \tan x = -1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos \lambda x = \cos 2\pi = 1$$

۳۲- گزینه (۳)

$$x = 6y \Rightarrow \sin 3y + 2 \cos 2y = 2 \Rightarrow (3 \sin y - 4 \sin^2 y) + 2(1 - 2 \sin^2 y) = 2$$

$$\Rightarrow -4 \sin^2 y - 4 \sin^2 y + 3 \sin y = 0 \Rightarrow -\sin y(4 \sin^2 y + 4 \sin y - 3) = 0$$

$$\Rightarrow -\sin y(2 \sin y - 1)(2 \sin y + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin y = 0 \\ \sin y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = k\pi \\ y = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ y = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

همواره مثبت  
و مخالف صفر

$$\xrightarrow{x=6y} \begin{cases} x = 6k\pi \\ x = 12k\pi + \pi \\ x = 12k\pi + 5\pi \end{cases} \xrightarrow{x \in (-8\pi, 14\pi)} \{0, \pi, 5\pi, 6\pi, 13\pi, -6\pi, -7\pi, 12\pi\}$$

۳۳- گزینه (۳)

$$\log_{\frac{\sin x}{25}}^{\sin x} + \log_{\frac{\cos x}{25}}^{\cos x} = 1 \Rightarrow \log_{\frac{\sin x \cos x}{25}}^{\sin x \cos x} = 1 \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{25}{25} \Rightarrow 4 \sin x \cos x = 1 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{12} \quad (1) \\ x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \quad (2) \end{cases}$$

در عبارات لگاریتمی مانند  $\log^M$  باید  $M > 0$  باشد پس باید  $\cos x, \sin x$  هر دو مثبت باشند یعنی  $x$  در ربع اول باشد. بنابراین در(۱) باید  $k$  زوج باشد تا  $x$  در ناحیه اول مثلثاتی باشد در ضمن اگر در (۲)  $k = 0$  باشد، نیز جواب است.

۳۴- گزینه (۳)

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\Rightarrow (1 + \tan^2 x) \left( \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \right) + \cot x = 3 \Rightarrow 2 \tan x + \frac{1}{\tan x} = 3 \Rightarrow 2 \tan^2 x - 3 \tan x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2 \tan x - 1)(\tan x - 1) = 0 \xrightarrow{\tan x \neq 0} \begin{cases} \tan x = \frac{1}{2} = \tan \alpha \\ \tan x = 1 = \tan \frac{\pi}{4} \end{cases} \xrightarrow{0 < \alpha < \frac{\pi}{2}} \begin{cases} x = k\pi + \alpha \\ x = k\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

پس مجموعه جواب این معادله در بازه  $(0, 2\pi)$  به صورت  $\left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \alpha, \pi + \alpha \right\}$  است که ۴ عضو دارد.

۳۵- گزینه (۲)

$$(BC)^r = (AC)^r + (AB)^r - 2(AB)(AC) \cos A$$

$$(1 + 2 \cos A)^r = 2^r + (1 + \cos A)^r - 2 \times 2(1 + \cos A) \cos A \Rightarrow 7 \cos^r A + 6 \cos A - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 28}}{7} \xrightarrow{-1 \leq \cos A \leq 1} \cos A = \frac{\sqrt{37} - 3}{7}$$

۳۶- گزینه (۱)

عبارت را بر ۵ تقسیم می کنیم:

$$\frac{3}{5} \sin \theta + \frac{4}{5} \cos \theta = 1$$

اگر  $\alpha$  زاویه ای حاده باشد که  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$  آنگاه:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha \sin \theta + \sin \alpha \cos \theta = 1 \Rightarrow \sin(\alpha + \theta) = 1 \Rightarrow \alpha + \theta = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = 2k\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \tan\left(2k\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

۳۷- گزینه (۲)

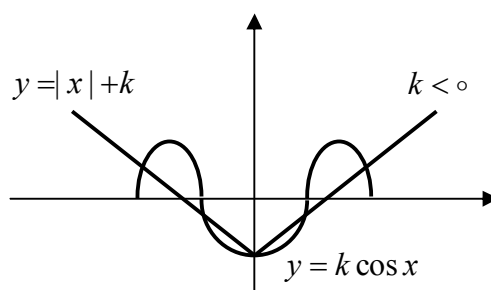
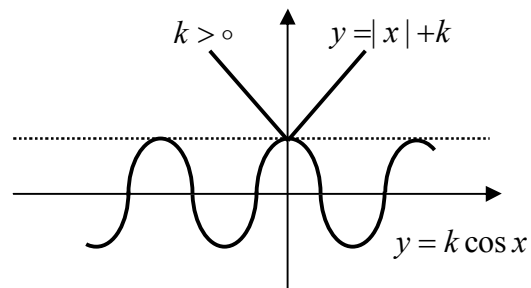
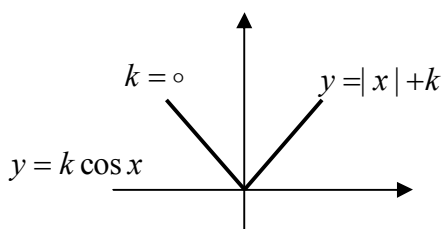
$$\sin x \cos x + \cos^r x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^r$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x + \cos^r x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2} \sin 2x + 2 \cos^r x = 1 \Rightarrow \sin 2x + 2 \cos^r x - 1 = 0 \Rightarrow \sin 2x + \cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow \sin 2x = -\cos 2x \xrightarrow{+\cos 2x} \tan 2x = -1$$

۳۸- گزینه (۴)

واضح است که  $x = 0$  جواب معادله است. همچنین با توجه به زوج بودن توابع  $y = k \cos x, y = |x| + k$  نمودار هر دو تابع نسبت به محور  $y$  ها متقارن است پس تعداد نقاط برخورد در هر دو طرف محور  $y$  ها یکسان است. بنابراین معادله دارای تعداد فردی ریشه است. توجه کنید در حالت  $k = 0, k > 0$  معادله دارای ۱ ریشه است و در حالت  $k < 0$  تعداد جواب های معادله هر تعداد فردی ممکن است باشد:



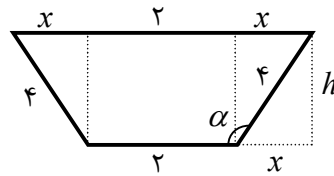
$$\sin(\pi - \alpha) = \frac{h}{4} \Rightarrow h = 4 \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = \frac{x}{4} - \cos \alpha = \frac{x}{4} \Rightarrow x = -4 \cos \alpha$$

$$S = \frac{(4+2x)h}{2} = (2+x).h \Rightarrow S(\alpha)$$

$$= (2 - 4 \cos \alpha) 4 \sin \alpha = 8 \sin \alpha - 16 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$= 8 \sin \alpha - 8 \sin 2\alpha = 8(\sin \alpha - \sin 2\alpha)$$



طرف راست تساوی بزرگتر یا مساوی ۷ است و سمت چپ کوچکتر یا مساوی ۷ است. پس تساوی زمانی برقرار است که هر دو طرف تساوی برابر ۷ باشند.

$$4 \sin 3x + 3 \cos 4x = 7 \Rightarrow \begin{cases} \sin 3x = 1 \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ \cos 4x = 1 \Rightarrow 4x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \boxed{x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}}$$

$$\text{طرف راست: } 7 + \cos^2 x = 7 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

و برای برابری دو طرف تساوی باید  $x = k\pi - \frac{\pi}{2}$  باشد که معادله یک جواب در بازه  $[0, 2\pi]$  دارد.  $(x = \frac{3\pi}{2})$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x}$$

$$\frac{\sin x \cos 2x + \sin 2x \cos x}{\cos x \cos 2x} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \Rightarrow \frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \Rightarrow \frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 0$$

$$\sin 3x \left( \frac{1}{\cos x \cos 2x} - \frac{1}{\cos 3x} \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \cos x \cos 2x = \cos 3x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \cos x \cos 2x = \cos(x+2x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x \Rightarrow \sin x \sin 2x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} \Rightarrow x = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi \\ \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi \\ \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \Rightarrow x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \end{cases}$$

توجه کنید که جواب های  $\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$  قابل قبول نیستند. بنابراین در بازه  $[0, 2\pi]$  دارای ۷ جواب است.

۴۲- گزینه (۱)

$$2 \cos x \tan x + \cos 2x = 1 \Rightarrow 2 \cos x \frac{\sin x}{\cos x} = 1 - \cos 2x \Rightarrow 2 \sin x = 1 - \cos 2x \xrightarrow{\cos x \neq 0} 2 \sin x = 2 \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \sin x - \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x(1 - \sin x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

با توجه به فرض  $\left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cos x \neq 0$

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \text{ پاسخ } x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ غیرقابل قبول است و تنها جواب } x = 2k\pi \text{ قابل قبول است. پس جواب های موجود در بازه ی}$$

برابر است با:  $\{0, \pi\}$

۴۳- گزینه (۲)

کمترین مقدار  $-4 \sin\left(3\pi x - \frac{\pi}{4}\right)$  زمانی بدست می آید که مقدار  $\sin$  برابر ۱ باشد بنابراین داریم:

$$\sin\left(3\pi x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow 3\pi x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 3\pi x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow 3x = 2k + \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{2k}{3} + \frac{1}{4}$$

به ازای  $k=1$  مقدار  $x = \frac{11}{12}$  بدست می آید.

۴۴- گزینه (۱)

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \sin^2 x \leq 1$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \cos^2 x + 1 \leq 2$$

بیشترین مقدار  $\sin^2 x$  برابر ۱ است و کمترین مقدار  $\cos^2 x + 1$  برابر ۱ است پس تساوی زمانی رخ می دهد که هر دو برابر ۱ شوند.

$$\begin{cases} \sin^2 x = 1 \rightarrow \sin x = 1 \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{0 < x < 2\pi} x = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \quad (1) \\ \cos^2 x + 1 = 1 \rightarrow \cos^2 x = 0 \rightarrow \cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{0 < x < 2\pi} x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \quad (2)$$

اشتراک (۱) و (۲):  $x = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$  که جمعشان برابر  $3\pi$  می شود.

۴۵- گزینه (۱)

$$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \lambda \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \lambda \Rightarrow \lambda \sin^2 x \cos^2 x = 1 \Rightarrow 2(4 \sin^2 x \cos^2 x) = 1$$

$$\Rightarrow 2(2 \sin x \cos x)^2 = 1 \Rightarrow 2(\sin 2x)^2 = 1 \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 2x = 0 \Rightarrow \cos 4x = 0 \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

جواب های معادله فوق در بازه ی  $(0, 2\pi)$  و با توجه به  $x \neq \frac{k\pi}{2}$  برابر است با:  $\left\{\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}\right\}$

این نقاط تشکیل هشت ضلعی منتظم می دهند.



$$\lambda \cos^2 x - \epsilon \cos x = k \sin 3x$$

$$2 \cos 3x = k \sin 3x \rightarrow \frac{2}{k} = \tan 3x \rightarrow \frac{2}{k} = \tan \frac{\pi}{\lambda}$$

$$1 = \tan \frac{\pi}{\lambda} = \frac{2 \tan \frac{\pi}{\lambda}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{\lambda}} = \frac{2 \left( \frac{2}{k} \right)}{1 - \left( \frac{2}{k} \right)^2} = \frac{\frac{4}{k}}{1 - \frac{4}{k^2}} \rightarrow \frac{4}{k} = 1 - \frac{4}{k^2} \xrightarrow{\times k^2} 4k = k^2 - 4$$

$$\rightarrow k^2 - 4k + 4 = 0 \rightarrow k = 2 \pm 2\sqrt{2}$$

با فرض های و  $\cos 3x \neq 0, \sin x \neq 0$  رابطه را طرفین وسطین می کنیم:

$$\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x = 0 \Rightarrow \sin(3x - x) = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

جواب های رابطه  $x = \frac{k\pi}{2}$  در بازه  $[0, 2\pi]$  برابر است با  $\left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right\}$

اما توجه کنید که به ازای  $\sin x, x = 0, \pi, 2\pi$  برابر صفر و به ازای  $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  مقدار  $\cos 3x$  برابر صفر می شود که خلاف فرض ابتدای حل می باشد (چون منخرج کسر را صفر می کند) بنابراین معادله جوابی ندارد.

$$\sin^2 x + \sin x - \sin x \cos x - \cos x = 0 \Rightarrow (1 + \sin x)(\sin x - \cos x) = 0$$

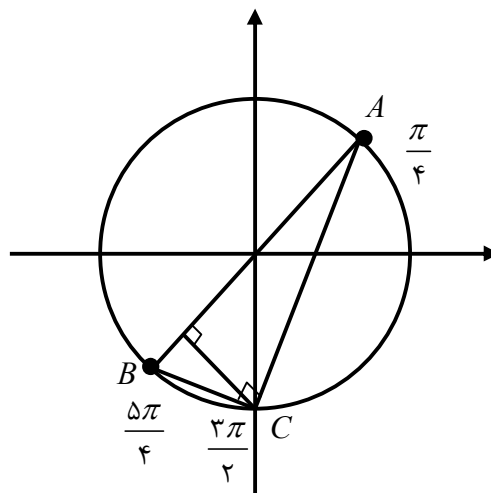
$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \xrightarrow{0 \leq x < 2\pi} x = \frac{3\pi}{2} \\ \sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{0 \leq x < 2\pi} x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

چنانچه در شکل ملاحظه می شود، نقاط انتهایی جواب های معادله روی دایره ی مثلثاتی تشکیل یک مثلث قائم الزاویه می دهند. برای محاسبه مساحت این مثلث کفایت که فاصله ی نقطه ی  $C(0, -1)$  را از خط واصل دو نقطه ی

$B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  یعنی خط  $y = x$  پیدا کنیم:

$$CH = d = \frac{|-1 - 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{CH \cdot AB}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



۴۹- گزینه (۳)

$$\frac{\sin 7x + 2 \sin x \cos x}{\sin x} = 0 \Rightarrow \frac{\sin 7x + \sin 2x}{\sin x} = 0 \xrightarrow{x \neq k\pi} \sin 7x = -\sin 2x \Rightarrow \sin 7x = \sin(-2x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7x = 2k\pi + (-2x) \\ 7x = 2k\pi + \pi - (-2x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{9} \\ 5x = (2k+1)\pi \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{5} \end{cases}$$

کوچکترین ریشه‌ی مثبت  $x = \frac{2k\pi}{9}$  به ازای  $k=1$  برابر  $\frac{2\pi}{9}$  و کوچکترین ریشه‌ی مثبت  $x = \frac{(2k+1)\pi}{5}$  به ازای  $k=0$

برابر  $\frac{\pi}{5}$  می شود با توجه به اینکه  $\frac{\pi}{5} < \frac{2\pi}{9}$ ، پس کوچکترین ریشه‌ی مثبت معادله برابر  $\frac{\pi}{5} = 36^\circ$  است.

۵۰- گزینه (۴)

$$2 \cdot \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \cdot \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \frac{4 \tan x}{(1 + \tan x)^2} = 1 \Rightarrow 4 \tan x = 1 + \tan^2 x + 2 \tan x \Rightarrow \tan^2 x - 2 \tan x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (\tan x - 1)^2 \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} x = \frac{\pi}{4}$$

در دامنه  $\tan 2x$  قرار ندارند

۵۱- گزینه (۲)

$$-\sqrt{3^2 + 5^2} \leq 3 \sin x - 5 \cos x \leq \sqrt{3^2 + 5^2} \Rightarrow -\sqrt{34} \leq k \leq \sqrt{34}$$

$$\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

۵۲- گزینه (۳)

دو طرف تساوی را در  $\sin 2x \cos 2x$  (با فرض  $2x \neq \frac{k\pi}{2}$ ) ضرب می کنیم:

$$\cos 2x + \sin 2x = 2\sqrt{2} \sin 2x \cos 2x \Rightarrow \sqrt{2} \sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin 4x$$

$$\Rightarrow \sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin 4x \Rightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + 4x \\ 2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = -k\pi + \frac{\pi}{8} \\ 6x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

جواب های مورد نظر در بازه  $(0, \pi)$  عبارت است از:

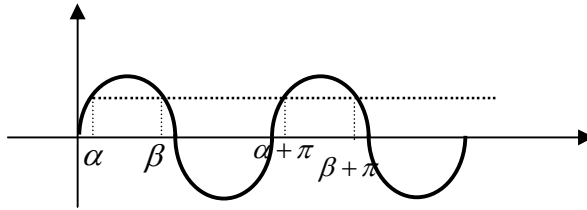
$$\left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{11\pi}{24}, \frac{19\pi}{24} \right\}$$

۵۳- گزینه (۴)

تابع  $f(x) = a \sin^2 x + b \sin 2x$ ، تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب  $\pi$  است لذا جواب های معادله‌ی  $f(x) = 1$  در بازه‌ی  $[0, \pi]$

هر چه باشد در بازه‌ی  $[\pi, 2\pi]$ ،  $\pi$  واحد به آنها اضافه خواهد شد لذا اگر مجموع جواب ها در بازه‌ی  $[0, \pi]$ ،  $\frac{3\pi}{4}$  باشد مجموع

جواب ها در بازه‌ی  $[\pi, 2\pi]$  برابر  $\frac{3\pi}{4} + \frac{11\pi}{4} = \frac{14\pi}{4}$  است.



$$\text{مجموع ریشه ها} = (\alpha + \pi) + (\beta + \pi) = (\alpha + \beta) + 2\pi$$

دقت کنید که با استفاده از اتحاد  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$  تابع  $f(x)$  به صورت  $\alpha \sin 2x + \beta \cos 2x$  در می آید و برای حل معادله

داریم:

$$\alpha \sin 2x + \beta \cos 2x = \gamma$$

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \left( \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sin 2x + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cos 2x \right) = \gamma$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\cos \theta}$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\sin \theta}$

$$\Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin(2x + \theta) = \gamma \Rightarrow \sin(2x + \theta) = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

که شرط وجود جواب آن این است که:  $\left| \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right| \leq 1$

پس:  $\gamma^2 \leq \alpha^2 + \beta^2$  یا  $|\gamma| \leq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

پس معادله  $a \sin^2 x + b \sin 2x = 1$  در بازه  $[0, \pi]$  دقیقاً دو جواب دارد.

۵۴- گزینه (۳)

$$\sqrt{2}(\sin x - \cos x) = (\sin x - \cos x)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = \cos x \\ \sin x - \cos x = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} \sin x \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

به ازای  $k=1$  در  $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$  مقدار  $\frac{11\pi}{4}$  برای  $x$  بدست می آید.

$$\frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{\sin x \cos x} = 4 \xrightarrow{x \neq \frac{k\pi}{2}} \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \times 2 \sin x \cos x$$

$$\Rightarrow 2 \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = 2 \sin 2x \Rightarrow \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = \sin 2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + 2x \Rightarrow x = -2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - 2x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \\ \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{2\pi}{9} \end{cases} \end{cases}$$

زاویه‌ی حاده‌ی که جواب معادله هستند عبارتند از:  $\left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{9} \right\}$  که مجموعی برابر  $\frac{5\pi}{9}$  دارند.

$$\boxed{\cos \alpha = \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right)}$$

$$\cos \left( 2x - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left( 2x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2 \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Rightarrow \sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = \pm 1 \Rightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

جواب‌هایی که در بازه‌ی  $[0, 2\pi]$  قرار دارند عبارتند از:  $\left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8} \right\}$

که روی دایره‌ی مثلثاتی تشکیل یک مربع می‌دهند زیرا: فاصله‌ی هر دو زاویه‌ی متوالی برابر  $\frac{\pi}{4}$  است.

$$\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$$

$$\Rightarrow \cot x - \tan x + \cot 3x - \tan 3x = 0 \Rightarrow 2 \cot 2x + 2 \cot 6x = 0 \Rightarrow \cot 2x + \cot 6x = 0$$

$$\Rightarrow \cot 6x = -\cot 2x = \cot(-2x) \Rightarrow 6x = k\pi - 2x \Rightarrow 8x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{8}$$

تعداد  $x = \frac{k\pi}{8}$   $2 \times 8 = 16$  نقطه را روی دایره‌ی مثلثاتی مشخص می‌کند اما باید جواب‌هایی که  $\cot 6x, \cot 2x$  نامعین

می‌شوند را از آنها کم کنیم:

$$\begin{cases} \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \\ \sin 6x = 0 \Rightarrow 6x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{6} \end{cases} \quad (4 \text{ جواب مشترک با } \frac{k\pi}{8} \text{ دارد})$$

جواب‌های این معادله  $(2 \times 6 = 12)$  نقطه را مشخص می‌کند که از میان آنها تنها جواب‌های به صورت  $x = \frac{k\pi}{8}$  با جواب‌های

معادله‌ی  $x = \frac{k\pi}{8}$  مشترک است که در قسمت قبل حساب کردیم. پس نهایتاً  $12 - 4 = 8$  نقطه روی دایره‌ی مثلثاتی خواهیم

داشت.

۵۸- گزینه (۲)

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} + a \sin 2x = 4 \Rightarrow \frac{1}{2} \cos 2x + a \sin 2x = \frac{7}{2} \xrightarrow{\times 2} 2a \sin 2x + \cos 2x = 7$$

$$\Rightarrow -\sqrt{(2a)^2 + 1} \leq 2a \sin 2x + \cos 2x \leq \sqrt{(2a)^2 + 1}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{4a^2 + 1} \leq 2a \sin 2x + \cos 2x \leq \sqrt{4a^2 + 1}$$

پس عبارت  $2a \sin 2x + \cos 2x$  همواره در بازه  $[-\sqrt{4a^2 + 1}, \sqrt{4a^2 + 1}]$  قرار دارد چون می خواهیم که معادله فوق جواب نداشته باشد باید  $\sqrt{4a^2 + 1} < 7$  کوچکتر از ۷ باشد بنابراین:

$$\sqrt{4a^2 + 1} < 7 \Rightarrow 4a^2 + 1 < 49 \Rightarrow 4a^2 < 48 \Rightarrow a^2 < 12 \Rightarrow |a| < 2\sqrt{3}$$

۵۹- گزینه (۴)

با استفاده از رابطه  $\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$  می توان نوشت:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos^2 x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cos^2 x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(1 - \cos^2 x)\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos^2 x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin^2 x\right)$$

$$\text{معادله: } 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \sin^2 x\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin^2 x\right) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{0 < \frac{\pi}{2} \sin^2 x < \frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} \sin^2 x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{0 < x < 2\pi} x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

مجموع جواب های فوق برابر  $\frac{16\pi}{4} = 4\pi$  است.

۶۰- گزینه (۲)

عبارت  $2 \sin^2 x$  را به سمت راست تساوی می بریم:

$$\sin 2x = 2 - \cos^2 x - 2 \sin^2 x = 2 - \cos^2 x - \sin^2 x - \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \sin 2x = 2 - 1 - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \cos^2 x \Rightarrow 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$$

$$\Rightarrow \cos x (2 \sin x - \cos x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2 \sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

جواب های فوق روی دایره ی مثلثاتی ۴ نقطه را مشخص می کند که چون هر یک از زوایای این چهارضلعی، زاویه ی محاطی مقابل قطر دایره اند پس زوایا برابر  $90^\circ$  بوده و این چهارضلعی مستطیل می باشد.

۶۱- گزینه (۳)

$$\sin 3x = (1 - \sqrt{3}) \sin x \Rightarrow 3 \sin x - 4 \sin^3 x = (1 - \sqrt{3}) \sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \xrightarrow{0 < x < 2\pi} x = \pi \\ 3 - 4 \sin^2 x = 1 - \sqrt{3} \Rightarrow -4 \sin^2 x = -2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(2 \sin^2 x) = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow 2(1 - \cos 2x) = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow 2 - 2 \cos 2x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow \cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{5\pi}{12} \xrightarrow{0 < x < 2\pi} x = \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}$$

$$\text{مجموع جواب ها: } \pi + \frac{5\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} + \frac{17\pi}{12} + \frac{19\pi}{12} = \pi + \frac{48\pi}{12} \Rightarrow \pi + 4\pi = 5\pi$$

۶۲- گزینه (۳)

$$\log_{\sqrt{r}}^{\frac{\sin x}{\cos x}} = \log_{\sqrt{r}}^{\sqrt{r}} \Rightarrow \log_{\sqrt{r}}^{\tan x} = \log_{\sqrt{r}}^{\sqrt{r}} \Rightarrow \tan x = \sqrt{r}$$

$$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

اما جواب نهایی باید طوری باشد که  $\cos x > 0, \sin x > 0$  یعنی  $x$  در ناحیه اول باشد پس:  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$

۶۳- گزینه (۱)

با ضرب طرفین در  $\tan x$  داریم:

$$2 \tan^2 x - m = \Delta \tan x \Rightarrow 2 \tan^2 x - \Delta \tan x - m = 0$$

شرط جواب معادله‌ی اخیر آن است که  $\Delta \geq 0$  لذا باید:

$$\Delta = 2\Delta + 4m \geq 0 \Rightarrow m \geq -\frac{2\Delta}{4}$$

۶۴- گزینه (۲)

چون  $\cos x = 0$  ریشه‌ی معادله نیست پس طرفین را بر  $\cos^2 x$  تقسیم می‌کنیم:

$$\tan^2 x - m + 3 \tan x = \frac{\Delta}{\cos^2 x} = \Delta(1 + \tan^2 x) \Rightarrow -\Delta \tan^2 x + 3 \tan x - m - \Delta = 0$$

شرط جواب معادله آن است که  $\Delta \geq 0$  لذا می‌توان نوشت:

$$\Delta = 9 + 24(-m - \Delta) \geq 0 \Rightarrow m \leq -\frac{159}{24} \Rightarrow m \leq -6 \frac{1}{6} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \leq -7$$

در نتیجه بزرگترین مقدار صحیح  $m$  برابر  $-7$  است. بنابراین گزینه (۲) درست است.

۶۵- گزینه (۱)

$$\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} = \sin \Delta x \cos \Delta x = \frac{1}{2} \sin 2\Delta x$$

$$\boxed{-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \sin 2\Delta x \leq \frac{1}{2}}$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\sin x} \geq \sin^2 x \\ \sqrt{\cos x} \geq \cos^2 x \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} \geq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}_{\geq 1} = \underbrace{\frac{1}{2} \sin 2\Delta x}_{\frac{1}{2} \leq < \frac{1}{2}}$$

معادله فاقد جواب است.

۶۶- گزینه (۳)

بیشترین مقدار عبارت سمت چپ معادله برابر ۵ است. چون در معادله عبارت برابر ۵ شده است. پس هر دو جز عبارت سمت چپ در بیشترین حالت خود قرار دارند. یعنی باید اشتراک جواب های دو معادله ی زیر را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = 1 \\ \cos\left(x - \frac{5\pi}{8}\right) = 1 \end{cases} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{5\pi}{8}$$

۶۷- گزینه (۳)

$$\begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{[0, 2\pi]} \left\{ \frac{\pi}{2} \right\} \\ \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\} \end{cases}$$

واضح است که این پنج ضلعی منتظم نیست.

۶۸- گزینه (۲)

$$\frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \sin x \sin 2x = 0$$

$$\sin x \sin 2x \left( \frac{1}{\cos x \cos 2x} - 1 \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x \cdot \sin 2x = 0 \\ \cos x \cos 2x = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \end{cases} \xrightarrow{x \in \left[ -\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4} \right]} x = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$$

برای حل معادله ی  $\cos x \cos 2x = 1$  دقت کنید که این تساوی تنها زمانی رخ می دهد که :

$$\begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos 2x = -1 \end{cases}$$

در ضمن اگر  $\cos x = -1$  آنگاه  $\cos x = -1$  و  $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1$  پس حالتی که هر دو برابر ۱- باشند امکان ندارد.

$$\begin{cases} \cos x = 1 \rightarrow x = 2k\pi \\ \cos 2x = 1 \rightarrow 2x = 2k\pi \rightarrow x = k\pi \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x = 2k\pi \xrightarrow{\left[ -\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4} \right]} x = 2\pi$$

پس معادله ۴ جواب دارد.

۶۹- گزینه (۴)

$$\begin{cases} \cos x + \cos 2x + \cos 3x \leq 3 \\ 3 \leq 3 + \sin^2 x \leq 4 \end{cases}$$

تنها در حالتی دو عبارت می توانند مساوی باشند که هم زمان داشته باشیم:

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \cos 2x = \cos 3x = 1 \end{cases} \longrightarrow x = 2k\pi \xrightarrow{x \in [\pi, 5\pi]} x = 2\pi, 4\pi$$

۷۰- گزینه (۳)

$$-\cos 2x = 1 - \tan^2 x$$

$$-\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = 1 - \tan^2 x \Rightarrow (1 - \tan^2 x) \underbrace{\left(1 + \frac{1}{1 + \tan^2 x}\right)}_{\text{همواره مثبت}} = 0$$

$$\Rightarrow \tan^2 x = 1 \Rightarrow \tan x = \pm 1 \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

۷۱- گزینه (۳)

$$\sin^2 x - 2(1+a)\sin x + 4a = 0 \Rightarrow \sin x = (1+a) \pm \sqrt{(a+1)^2 - 4a}$$

$$\Rightarrow \sin x = (1+a) \pm \sqrt{(a-1)^2} = (1+a) \pm |a-1|$$

اگر  $a \geq 1$ ، نتیجه می گیریم  $|a-1| = a-1$  بنابراین  $\sin x = 2$  یا  $\sin x = 2a$  که در هر حالت  $\sin x \geq 2$  و معادله ریشه ای ندارد.

اگر  $a < 1$ ، باز همان نتایج برای  $\sin x$  بدست می آید. ولی این بار معادله  $\sin x = 2a$  شاید جواب داشته باشد. با توجه به شرط مسأله داریم:

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} < \sin x \leq 1 \Rightarrow 1 < 2a \leq 1 \longrightarrow a \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$$

۷۲- گزینه (۲)

می دانیم  $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cot x$  بنابراین:

$$\tan(x + \alpha) \cot x = 1 \Rightarrow \tan(x + \alpha) = \tan x$$

$$\Rightarrow x + \alpha = k\pi + x \Rightarrow \alpha = k\pi$$

$$\Rightarrow \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2k\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

۷۳- گزینه (۳)

$$\tan x + \cot x = 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{2}{\sin 2x} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{8} \\ x = k\pi + \frac{3\pi}{8} \end{cases}$$

۷۴- گزینه (۳)

می دانیم همواره  $0 \leq \cos^2 x \leq 1$  و  $0 \leq \cos^4 x \leq 1$  بنابراین تساوی زمانی برقرار است که  $\cos^4 x = \cos^2 x = 1$  یعنی  $\cos x = \pm 1$ . تنها ریشه‌ی معادله در بازه  $x = \pi$  مفروض است.



۷۵- گزینه (۳)

$$2 \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x = 2 \sin x$$

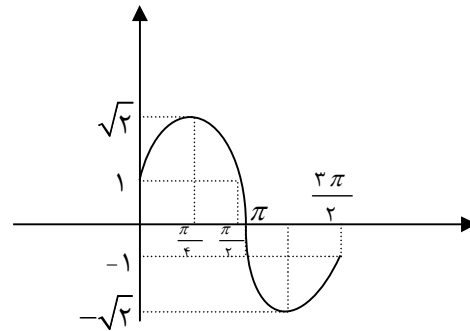
$$\Rightarrow 2 \sin x (\cos x \cos 2x \cos 4x - 1) = 0$$

اگر  $\sin x = 0$  که معادله دارای جواب های  $\{0, \pi, 2\pi\}$  است در غیر این صورت داریم  $\cos x \cos 2x \cos 4x = 1$  که طبق آن حاصل ضرب سه مقدار بین ۱ و -۱ برابر ۱ شده است. پس هر سه مقدار برابر ۱ یا -۱ باشند ولی می دانیم اگر  $\cos x = \pm 1$  آنگاه  $\sin x = 0$ ، پس ریشه های این حالت را پیش از این پیدا کرده ایم.

۷۶- گزینه (۴)

$$(\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



واضح است که خط  $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$  این نمودار را در فاصله  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$  تنها در یک نقطه قطع می کند.

۷۷- گزینه (۲)

می دانیم بیشترین مقدار  $\cos^2 x$  برابر ۱ و کمترین مقدار  $1 + \sqrt{\sin x}$  نیز برابر ۱ است. پس وقتی دو طرف با هم برابر می شوند که هر دو برابر ۱ باشند در این صورت  $\cos x = \pm 1, \sin x = 0$  در فاصله مورد نظر برای  $x = \pi$  و  $x = 2\pi$  و  $x = 3\pi$  این شرایط برقرار است.

۷۸- گزینه (۲)

شرط وجود جواب  $a \sin x + b \cos x = c$  آن است که  $a^2 + b^2 \geq c^2$  باشد. پس:

$$(\sqrt{2})^2 + 1^2 \geq \tan^2 \theta \Rightarrow \tan^2 \theta \leq 3 \Rightarrow -\sqrt{3} \leq \tan \theta \leq \sqrt{3} \Rightarrow -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow b - a = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

۷۹- گزینه (۳)

روش اول) خط  $y = 2\sqrt{3}$  نمودار تابع را در بازه  $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$  فقط یک بار قطع کرده است. معنای آن این است که معادله  $2\sqrt{3} = \tan 3x + a \cot 3x$  در بازه  $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$  فقط یک جواب دارد.

$$\tan 3x + \frac{a}{\tan 3x} = 2\sqrt{3}$$

$$\tan^2 3x - 2\sqrt{3} \tan 3x + a = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow 12 - 4a = 0 \Rightarrow a = 3$$

روش دوم) طبق نامساوی  $a+b \geq 2\sqrt{ab}$  داریم:

$$\tan 3x + a \cot 3x \geq 2\sqrt{\tan 3x \times a \cot 3x} = 2\sqrt{a}$$

پس  $2\sqrt{a} = 2\sqrt{3}$  یا  $a = 3$

۸۰- گزینه (۲)

$$\begin{aligned} \sin x - \cos x = 1 &\Rightarrow \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \end{cases} \\ \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{i\pi}{4}, i \in \{3, 5\} \end{aligned}$$

۸۱- گزینه (۱)

$$\begin{aligned} \sin 2x + \sqrt{2} \cos x = 0 &\Rightarrow \cos x (2 \sin x + \sqrt{2}) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \frac{6\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{4} \end{cases} \\ \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{i\pi}{4}, i \in \{2, 6, 5, 7\} \end{aligned}$$

۸۲- گزینه (۲)

$$\begin{aligned} \cos^2 x = 1 + \sqrt{\sin x} \\ 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 1 \\ 1 + \sqrt{\sin x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \pm 1 \\ \sin x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow x = \pi, 2\pi, 3\pi \end{array} \right\} \end{aligned}$$

۸۳- گزینه (۳)

$$\cos x \cos 2x = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k'\pi + \frac{\pi}{4} & (k = 2k') \\ x = k'\pi + \frac{3\pi}{4} & (k = 2k' + 1) \end{cases}$$

پس  $i \in \{1, 2, 3\}$ . اما با توجه به گزینه ها به جای  $i = 2$  می توان  $i = 6$  نیز قرار داد زیرا:  $k\pi + \frac{2\pi}{4} = (k-1)\pi + \frac{6\pi}{4}$

$$(1 + \tan^2 a)^2 = 8 \tan a (1 - \tan^2 a)$$

$$\Rightarrow 1 = 4 \times \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a} \cdot \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a} \Rightarrow 1 = 4 \sin 2a \cos 2a \Rightarrow 1 = 2(2 \sin 2a \cos 2a) = 2 \sin 4a$$

$$\Rightarrow \sin 4a = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 4a = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 4a = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{24} \xrightarrow{\text{حاده}} a = \frac{\pi}{24} \\ a = \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{24} \xrightarrow{\text{حاده}} a = \frac{5\pi}{24} \end{cases}$$

$$\text{مجموع جواب های حاده} = \frac{\pi}{24} + \frac{5\pi}{24} = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1 \Rightarrow \sin \frac{x}{2} = 1 - \cos x \Rightarrow \sin \frac{x}{2} = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi \\ \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \frac{x}{2} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 4k\pi + \frac{5\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{مجموع جواب ها} = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = 2\pi$$

$$6 \cos 2x = 1 + 6 \tan^2 x$$

$$\frac{6 - 6 \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = 1 + 6 \tan^2 x \Rightarrow 6 - 6 \tan^2 x = 1 + 7 \tan^2 x + 6 \tan^4 x$$

$$\Rightarrow 6 \tan^4 x + 13 \tan^2 x - 5 = 0 \Rightarrow \underbrace{(2 \tan^2 x + 5)}_{\text{همواره مثبت}} (3 \tan^2 x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3} = \tan^2 x \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

$$-\sqrt{2} \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2} \Rightarrow [\sin x + \cos x] \in \{\pm 1, 0, -2\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \tan x + \cot x \geq 2 \\ \tan x + \cot x \leq -2 \end{array} \right\} \Rightarrow [\tan x + \cot x] \in Z - \{0, \pm 1\}$$

پس  $[\sin x + \cos x]$  و  $[\tan x + \cot x]$  وقتی با یکدیگر برابر می شوند که هردو برابر ۲- باشند.

برای آنکه  $[\tan x + \cot x] = -2$  شود باید  $\tan x < 0$  باشد پس انتهای کمان  $x$  در ربع دوم یا چهارم قرار دارد. اما از طرفی دیگر

برای آن که  $[\sin x + \cos x] = -2$  باید  $x$  در ربع سوم باشد پس معادله جواب ندارد.

۸۸- گزینه (۳)

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{6} + 2) \tan x + (\sqrt{6} - 2) \cot x = 4 &\Rightarrow \sqrt{6}(\tan x + \cot x) + 2(\tan x - \cot x) = 4 \\
 \Rightarrow \frac{2\sqrt{6}}{\sin 2x} - 4 \cot 2x = 4 &\Rightarrow \frac{2\sqrt{6} - 4 \cos 2x}{\sin 2x} = 4 \Rightarrow 4 \sin 2x + 4 \cos 2x = 2\sqrt{6} \\
 \Rightarrow \sin 2x + \cos 2x = \frac{\sqrt{6}}{2}
 \end{aligned}$$

۸۹- گزینه (۴)

$$\begin{aligned}
 \lambda \sin^2 x + k \sin 2x = 1 &\Rightarrow \frac{\lambda \sin^2 x + 2k \sin x \cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \lambda \tan^2 x + 2k \tan x = 1 + \tan^2 x \\
 \Rightarrow \gamma \tan^2 x + 2k \tan x - 1 = 0
 \end{aligned}$$

اگر ریشه های معادله  $\tan \beta, \tan \alpha$  باشند آنگاه:

$$\begin{aligned}
 \alpha + \beta = \frac{3\pi}{4} &\Rightarrow \tan(\alpha + \beta) = \tan \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = -1 \\
 \Rightarrow \frac{-\frac{2k}{\gamma}}{1 + \frac{1}{\gamma}} = -1 &\Rightarrow \frac{k}{\gamma} = 1 \Rightarrow k = \gamma
 \end{aligned}$$

۹۰- گزینه (۱)

$$\begin{aligned}
 \sin 4x + \cos^2 2x - \sin^2 2x = \sqrt{2}m &\Rightarrow \sin 4x + \cos 4x = \sqrt{2}m \\
 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq \sin 4x + \cos 4x \leq \sqrt{2} &\Rightarrow -\sqrt{2} \leq \sqrt{2}m \leq \sqrt{2} \Rightarrow -1 \leq m \leq 1
 \end{aligned}$$

۹۱- گزینه (۲)

$$\begin{aligned}
 2 \tan x + \cot x = k - 1 &\Rightarrow 2 \tan^2 x + 1 = (k - 1) \tan x \Rightarrow 2 \tan^2 x - (k - 1) \tan x - 1 = 0 \\
 \Rightarrow \tan(x' + x'') = 2 &\Rightarrow \frac{\tan x' + \tan x''}{1 - \tan x' \tan x''} = 2 \Rightarrow \frac{\frac{k-1}{2}}{1} = 2 \Rightarrow \boxed{k=3}
 \end{aligned}$$

۹۲- گزینه (۱)

$$\begin{aligned}
 m \sin x + m \cos x = 1 &\Rightarrow m\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \xrightarrow{x=\frac{\pi}{12}} m\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \\
 \Rightarrow m\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 &\Rightarrow m = \frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow m = \frac{\sqrt{6}}{3}
 \end{aligned}$$

۹۳- گزینه (۴)

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\Delta(\sin x + \cos x))^2 = (2\sqrt{10})^2 \Rightarrow 2\Delta(1 + 2\sin x \cos x) = 40$$

$$\Rightarrow 1 + 2\sin x \cos x = \frac{20}{\Delta} \Rightarrow \frac{1 + 2\sin x \cos x}{\cos^2 x} = \frac{20}{\Delta} \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + \tan^2 x + 2\tan x = \frac{20}{\Delta} + \frac{20}{\Delta} \tan^2 x$$

$$\Rightarrow 2\tan^2 x - 10\tan x + 20 = 0 \Rightarrow (\tan x - 3)(2\tan x - 1) = 0 \Rightarrow \tan x = 3, \frac{1}{2}$$

۹۴- گزینه (۲)

$$\tan x + \cot x + 2 = 0 \Rightarrow \tan x + \cot x = -2 \Rightarrow \tan x = \cot x = -1 \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4}$$

۹۵- گزینه (۳)

$$-\sqrt{3} \leq \sqrt{2} \cos x + \sin x \leq \sqrt{3} \Rightarrow -\sqrt{3} \leq \tan \alpha \leq \sqrt{3} \Rightarrow -\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$$

۹۶- گزینه (۴)

طرفین را بر  $\cos^2 x$  تقسیم می‌کنیم:

$$2\tan^2 x - 1 - 2\tan x = -4(1 + \tan^2 x) \Rightarrow 6\tan^2 x - 2k\tan x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta' \geq 0 \Rightarrow k^2 - 18 \geq 0 \Rightarrow |k| \geq 3\sqrt{2}$$

۹۷- گزینه (۲)

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x) = 1 - \sin 2x \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x) = (\sin x - \cos x)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x - \frac{\pi}{4} = k\pi \Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin x - \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

۹۸- گزینه (۲)

$$\sqrt{3}(\sin x + \cos x) = 1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \\ \sin x + \cos x = \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$3\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 5 = 0 \Rightarrow 3\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x)^2 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow u^2 + 3\sqrt{2}u + 4 = 0 \Rightarrow u = -2\sqrt{2}, -\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = -2\sqrt{2} \\ \sin x + \cos x = -\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} \sin x \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \\ \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = -1 \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$2\cos^2 x + 2m \sin x \cos x = m \Rightarrow 1 + \cos 2x + m \sin 2x = m$$

$$\Rightarrow \cos 2x + m \sin 2x = m - 1 \Rightarrow -\sqrt{m^2 + 1} \leq \cos 2x + m \sin 2x \leq \sqrt{1 + m^2}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{1 + m^2} \leq m - 1 \leq \sqrt{1 + m^2}$$

$$\Rightarrow |m - 1| \leq \sqrt{1 + m^2} \longrightarrow m^2 - 2m + 1 \leq 1 + m^2 \Rightarrow -2m \leq 0 \Rightarrow m \geq 0$$

طرفین را بر  $\cos^2 x$  تقسیم می کنیم.

$$3 \tan^2 x + 4 + k \tan x = 2 + 2 \tan^2 x \Rightarrow \tan^2 x + k \tan x + 2 = 0$$

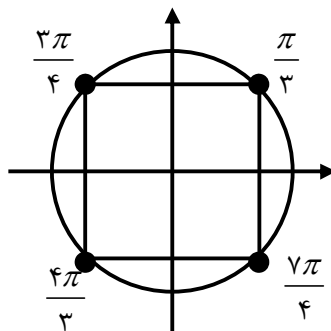
$$\Rightarrow \Delta \geq 0 \Rightarrow k^2 - 8 \geq 0 \Rightarrow |k| \geq 2\sqrt{2}$$

طرفین را بر  $\cos^2 x$  تقسیم می کنیم:

$$(1 + \sqrt{3}) \tan^2 x + (1 - \sqrt{3}) \tan x = \sqrt{3} + \sqrt{3} \tan^2 x \Rightarrow \tan^2 x + (1 - \sqrt{3}) \tan x - \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \\ \tan x = \sqrt{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

پس انتهای کمان های جواب یک مربع است.



۱۰۳- گزینه (۴)

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos 2x\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \cos 2x\right) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}}$$

۱۰۴- گزینه (۲)

$$\sin \Delta x \sin 2x = \cos 7x \cos 4x \Rightarrow \frac{1}{2}(\cos(\Delta x - 2x) - \cos(\Delta x + 2x)) = \frac{1}{2}(\cos(7x + 4x) + \cos(7x - 4x))$$

$$\Rightarrow \cos 3x - \cos 7x = \cos 11x + \cos 3x \Rightarrow \cos 11x + \cos 7x = 0$$

$$\boxed{\alpha + \beta = (2k+1)\pi \Leftrightarrow \cos \alpha + \cos \beta = 0}$$

$$\Rightarrow 11x + 7x = (2k+1)\pi \Rightarrow 18 = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{9} + \frac{\pi}{18}$$

۱۰۵- گزینه (۲)

$$\cos 4x \cos x = \cos^2 \frac{3x}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}(\cos(4x+x) + \cos(4x-x)) = \frac{1 + \cos 3x}{2}$$

$$\Rightarrow \cos 5x + \cos 3x = 1 + \cos 3x \Rightarrow \cos 5x = 1$$

$$\Rightarrow 5x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5}$$

واضح است که پنج ضلعی منتظم است

۱۰۶- گزینه (۴)

$$\frac{2\left(\sin 2x - \frac{1}{2}\right)}{2\left(\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\sin 2x - \sin \frac{\pi}{6}}{\cos 2x + \cos \frac{\pi}{6}} = \frac{2\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right)}{2\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right)} = \tan\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$$

$$\Rightarrow \cot \frac{x}{2} = \tan\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{12}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \cot \frac{x}{2} = \cot\left(\frac{7\pi}{12} - x\right) \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + \frac{7\pi}{12} - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{7\pi}{18}$$

۱۰۷- گزینه (۲)

$$\sin \frac{x}{6} - \left(\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{3}\right) + \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{3}\right)\right) = 1 \Rightarrow \sin \frac{x}{6} - \sin \frac{\Delta x}{6} - \sin \frac{x}{6} = 1$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\Delta x}{6} = -1 = \sin \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\Delta x}{6} = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{12k\pi}{6} + \frac{9\pi}{6} \xrightarrow{x \in [0, \Delta\pi]} x = \frac{9\pi}{6}, \frac{21\pi}{6}$$

پس معادله دو جواب متمایز در بازه‌ی  $[0, \Delta\pi]$  دارد.

۱۰۸- گزینه (۳)

$$\frac{\sin x + \sin 9x}{\cos x - \cos 9x} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{2 \sin 5x \cos 4x}{-2 \sin(-4x) \sin 5x} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\cos 4x}{\sin 4x} = \sqrt{3} \Rightarrow \cot 4x = \sqrt{3} = \cot \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{24} \xrightarrow{0 < x < \frac{\pi}{2}} x = \frac{\pi}{24}, \frac{7\pi}{24}$$

مجموع زوایای فوق برابر  $\frac{\pi}{3} = \frac{8\pi}{24}$  است.

۱۰۹- گزینه (۴)

$$\sin x \sin 3x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} [\cos 2x - \cos 4x] = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x - \cos 4x = 1 \Rightarrow \cos 2x = \cos 4x + 1$$

$$\Rightarrow \cos 2x = 2 \cos^2 2x \Rightarrow \cos 2x - 2 \cos^2 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x (1 - 2 \cos 2x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{0 < x < \frac{\pi}{2}} x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \\ x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \xrightarrow{0 < x < \frac{\pi}{2}} x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \end{cases}$$

بزرگترین ریشه برابر  $\frac{5\pi}{6}$  و کوچکترین ریشه مساوی  $\frac{\pi}{6}$  است. پس تفاضل آنها برابر است با:

$$\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

۱۱۰- گزینه (۲)

$$\frac{\sin x \cos 3x + \sin 3x \cos 7x}{\sin 4x} = 1 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} (\sin 4x + \sin(-2x)) + \frac{1}{2} (\sin 10x + \sin(-4x))}{\sin 4x} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2} (\sin 10x - \sin 2x)}{\sin 4x} = 1 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} (2 \sin 4x \cos 6x)}{\sin 4x} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin 4x \neq 0 \\ \cos 6x = 1 \Rightarrow 6x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} \end{cases}$$

اما باید توجه داشت با توجه به فرض  $\sin 4x \neq 0$  ممکن است بخشی از مقادیر فوق غیرقابل قبول باشند بنابراین:

$$\sin 4x = 0 \Rightarrow 4x = k'\pi \Rightarrow x = \frac{k'\pi}{4}$$

در واقع ما جواب هایی به فرم  $\frac{k\pi}{3}$  را می خواهیم که  $\frac{k'\pi}{4}$  نباشند، در واقع اولین باری که عددی هم ضریب  $\frac{\pi}{3}$  و هم ضریب  $\frac{\pi}{4}$ است،  $\pi$  است در واقع با تعریف جدیدی می توان گفت بین  $\frac{1}{4}$  و  $\frac{1}{3}$  ک.م.م می گیریم:  $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right] = 1$ لذا اگر  $k$  به صورت  $3q$  باشد نامطلوب است و فقط  $k$  هایی به صورت  $3q \pm 1$  مورد قبول است:  $x = \frac{(3q \pm 1)\pi}{4} = q\pi \pm \frac{\pi}{4}$



۱۱۱- گزینه (۲)

$$\cos \Delta x \cos 3x = \cos^2 x$$

$$\frac{1}{2}(\cos \Delta x + \cos 2x) = \frac{1 + \cos 2x}{2} \Rightarrow \frac{\cos \Delta x}{2} + \frac{\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \Delta x = 1 \Rightarrow \Delta x = 2n\pi \Rightarrow x = \frac{n\pi}{4}$$

جواب های معادله فوق در بازه  $[0, k]$  به شکل زیر هستند:

$$x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \dots, \frac{n\pi}{4}$$

برای محاسبه مجموع مقادیر فوق با استفاده از رابطه‌ی مجموع جملات دنباله‌ی حسابی  $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$  داریم:

$$0 + \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \dots + \frac{n\pi}{4} = \frac{n+1}{2} \left( 0 + \frac{n\pi}{4} \right) = \frac{n(n+1)\pi}{8}$$

طبق فرض می‌دانیم که مقدار فوق برابر  $\frac{5\pi}{2}$  است لذا:

$$\frac{n(n+1)\pi}{8} = \frac{5\pi}{2} \Rightarrow n(n+1) = 20 = 4 \times 5 \Rightarrow \boxed{n=4}$$

یعنی بزرگترین ریشه در بازه‌ی داده شده برابر  $n = \frac{4\pi}{4}$  است پس حداقل مقدار  $k$  برابر  $\pi$  خواهد بود.

۱۱۲- گزینه (۲)

$$\frac{\cos^2 2x - \cos^2 4x}{\sin \Delta x} = \frac{1 + \cos 4x}{2} - \frac{1 + \cos 14x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos 4x - \cos 14x}{2 \sin \Delta x} = \frac{-2 \sin 9x \sin(-\Delta x)}{2 \sin \Delta x} = \sin 9x \Rightarrow \sin 9x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 9x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{9} + \frac{\pi}{36} \\ x = \frac{2k\pi}{9} + \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

با توجه به گزینه ها  $x = \frac{\pi}{36}$

۱۱۳- گزینه (۳)

چپ سمت  $2 \times \frac{1}{4} [\sin 4x + \sin(-2x)] + \cos 4x = \sin 4x - \sin 2x + \cos 4x$

راست سمت  $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$

$$\Rightarrow \sin 4x - \sin 2x + \cos 4x = 1 - \sin 2x \Rightarrow \sin 4x + \cos 4x = 1 \Rightarrow \sqrt{2} \sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 4x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 4x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi} x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi} x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4} \end{cases}$$

پس مجموعاً ۹ جواب در بازه  $[0, 2\pi]$  دارد.

۱۱۴- گزینه (۲)

$$\sin 2x - 2 \cos x \sin 3x = 1$$

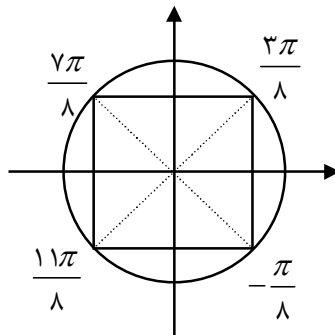
$$\sin 2x - 2 \sin 3x \cos x = 1$$

$$\sin 2x - 2 \times \frac{1}{2} [\sin 4x + \sin 2x] = 1$$

$$\sin 2x - \sin 4x - \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 4x = -1 \Rightarrow 4x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

جواب های معادله ی فوق ۴ نقطه در شکل روی دایره ی مثلثاتی خواهند بود که تشکیل یک مربع می دهند چون قطر این مربع برابر ۲

$$S = \frac{1}{2} d^2 = \frac{1}{2} (2)^2 = 2 \text{ است مساحت آن برابر است با:}$$



۱۱۵- گزینه (۲)

$$\sin 4x \sin 2x + \sin^2 x = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 6x) + \frac{1 - \cos 2x}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \cos 6x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 6x = 1 \Rightarrow 6x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}$$

$$\xrightarrow{0 < x < \pi} x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$$