



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

سراسری تجربی ۹۶

معادله خط مماس بر منحنی به معادله $\sqrt[3]{y} + x\sqrt{x} = 9$ در نقطه $(4, 1)$ ، کدام است ؟

(۱) $y + 9x = 37$ (۲) $y + 6x = 25$ (۳) $2y + 3x = 14$ (۴) $y + 3x = 13$

نکته: شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه برابر است با مقدار مشتق تابع به ازای طول آن نقطه .

$$\sqrt[3]{y} + \sqrt{x^3} - 9 = 0 \quad f'(x, y) = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{\frac{3}{2\sqrt{x^{-1}}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}} = -\frac{\frac{3\sqrt{x}}{2}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}} = -\frac{9\sqrt{x}\sqrt[3]{y^2}}{2}$$

$$m = f'(4, 1) = -\frac{9(2)(1)}{2} = -9 \xrightarrow{(4,1)} y - 1 = -9(x - 4) \longrightarrow y + 9x = 37$$

سراسری تجربی ۹۶ - خارج از کشور

معادله خط مماس بر منحنی به معادله $x^2y - 2x\sqrt{y} = 8$ در نقطه $(2, 4)$ ، کدام است ؟

(۱) $y - 2x = 0$ (۲) $y + 2x = 8$ (۳) $2y + x = 10$ (۴) $y + 4x = 12$

$$x^2y - 2x\sqrt{y} - 8 = 0 \quad f'(x, y) = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2xy - 2\sqrt{y}}{x^2 - \frac{2x}{2\sqrt{y}}}$$

$$m = f'(2, 4) = -4 \longrightarrow y - 4 = -4(x - 2) \longrightarrow y + 4x = 12$$

سراسری تجربی ۹۵

در نقطه ای از منحنی به معادله $x + \sqrt{xy} + y = 12$ ، خط مماس بر منحنی ، عمود بر نیمساز ربع اول است . طول نقطه تماس ، کدام است ؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

$$x + \sqrt{xy} + y - 12 = 0 \longrightarrow f'(x, y) = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{1 + \frac{y}{2\sqrt{xy}}}{\frac{x}{2\sqrt{xy}} + 1} \xrightarrow[y=x \rightarrow m=1]{m'=-1} -\frac{1 + \frac{y}{2\sqrt{xy}}}{\frac{x}{2\sqrt{xy}} + 1} = -1$$

$$1 + \frac{y}{2\sqrt{xy}} = \frac{x}{2\sqrt{xy}} + 1 \longrightarrow \frac{y}{2\sqrt{xy}} = \frac{x}{2\sqrt{xy}} \xrightarrow{x > 0} y = x$$

$$x + \sqrt{x^2} + x = 12 \longrightarrow 2x + |x| = 12 \longrightarrow \begin{cases} \text{if } x > 0 \longrightarrow x = 4 \longrightarrow \text{True} \\ \text{if } x < 0 \longrightarrow x = 12 \longrightarrow \text{false} \end{cases}$$

سراسری تجربی ۹۵

از نقطه $A(0, 4/5)$ ، خطی بر منحنی $y = x^2$ عمود شده است . طول پای عمود با علامت مثبت ، کدام است ؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) $2/5$

نکته: شیب خط مماس بر منحنی در هر نقطه واقع بر آن ، برابر است با مقدار مشتق تابع به ازای طول نقطه تماس .
نکته: اگر دو خط بر هم عمود باشند ، حاصل ضرب شیب آن ها برابر (-1) می شود .

روش اول:

$$A \left| \begin{matrix} 0 \\ 4/5 \end{matrix} \right. \quad B \left| \begin{matrix} \alpha \\ \alpha^2 \end{matrix} \right. \longrightarrow \begin{cases} m_{AB} = \frac{\alpha^2 - 4/5}{\alpha - 0} \\ y'(\alpha) = 2\alpha \longrightarrow m' = -\frac{1}{2\alpha} \end{cases} \longrightarrow \frac{\alpha^2 - 4/5}{\alpha} = \frac{-1}{2\alpha} \longrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha = -2 \end{cases}$$

روش دوم:

$$B \left| \begin{matrix} \alpha \\ \alpha^2 \end{matrix} \right. \longrightarrow y'(\alpha) = 2\alpha \longrightarrow m' = -\frac{1}{2\alpha} \quad y - \alpha^2 = -\frac{1}{2\alpha}(x - \alpha)$$

$$\xrightarrow{A(0, 4/5)} 4/5 - \alpha^2 = -\frac{1}{2\alpha}(0 - \alpha) \xrightarrow{\times 2} 9 - 2\alpha^2 = 1 \longrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha = -2 \end{cases}$$

سراسری تجربی ۹۵ - خارج از کشور

در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{1 + \cos x} & , x > 0 \\ \sin 2x & , x \leq 0 \end{cases}$ ، مقدار $f'_-(0) - f'_+(0)$ ، کدام است ؟

- (۱) $0/75$ (۲) ۱ (۳) $1/25$ (۴) $1/5$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin x}{1 + \cos x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x(1 + \cos x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(1 + \cos x)} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2x}{x} = 2$$

$$f'_-(0) - f'_+(0) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

سراسری تجربی ۹۵ - خارج از کشور

در نقاطی از منحنی به معادله $x^2 - 4xy + 3y^2 + 1 = 0$ ، خط مماس بر منحنی موازی محور X ها است . طول نقاط تماس ، کدام است ؟

- (۱) $-2, 1$ (۲) $-2, 2$ (۳) $-1, 1$ (۴) $-1, 2$

نکته: چون مماس بر نمودار تابع موازی محور X ها است، پس شیب خط مماس برابر صفر است و چون شیب خط مماس برابر است با مقدار مشتق تابع در نقطه تماس پس معادله $y' = 0$ ، تعداد نقاط تماس را مشخص می کند.

$$x^2 - 4xy + 3y^2 + 1 = 0 \longrightarrow f'(x, y) = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2x - 4y}{-4x + 6y} \xrightarrow{y'=0} x = 2y$$

$$4y^2 - 8y^2 + 3y^2 + 1 = 0 \longrightarrow y^2 = 1 \longrightarrow y = \pm 1 \xrightarrow{x=2y} x = \pm 2$$

سراسری تجربی ۹۴

خط مماس بر منحنی به معادله $y = \sqrt{2x}e^{2-x}$ ، در نقطه ای به طول ۲ واقع بر آن، محور y ها را با کدام عرض قطع می کند؟

۶ (۴)

۵ (۲)

۴ (۲)

۳ (۱)

۷

$$y = \sqrt{2x}e^{2-x} \xrightarrow{x=2} y = 2 \longrightarrow A(2, 2) \quad y' = \frac{2}{2\sqrt{2x}}e^{2-x} - \sqrt{2x}e^{2-x}$$

$$m = f'(2) = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \quad y - 2 = -\frac{3}{2}(x - 2) \xrightarrow{x=0} y = 5$$

سراسری تجربی ۹۴

اگر $f(x) = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}|x|$ و $g(x) = 4x + |x|$ باشند، مشتق تابع fog، کدام است؟

۴ (مشتق ندارد)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۸

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{5}x, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 5x, & x \geq 0 \\ 3x, & x < 0 \end{cases} \quad fog(x) = \begin{cases} 3x, & x \geq 0 \\ 3x, & x < 0 \end{cases}$$

$$fog(x) = 3x \longrightarrow (fog)'(x) = 3$$

سراسری تجربی ۹۴ - خارج از کشور

عرض از مبدا خط مماس بر منحنی به معادله $y = \ln \frac{\sqrt{4x+1}}{x^2 - 2x + 3}$ ، در نقطه ای به طول ۲ واقع بر آن کدام است؟

$\frac{10}{3}$ (۴)

$\frac{5}{3}$ (۳)

$\frac{8}{9}$ (۲)

$\frac{5}{9}$ (۱)

۹

$$y = \ln \frac{\sqrt{4x+1}}{x^2 - 2x + 3} \xrightarrow{x=2} y = \ln 1 = 0 \longrightarrow A(2, 0) \quad y = \ln u \longrightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

$$y = \ln \frac{\sqrt{4x+1}}{x^2 - 2x + 3} = \ln(\sqrt{4x+1}) - \ln(x^2 - 2x + 3) = \frac{1}{2} \ln(4x+1) - \ln(x^2 - 2x + 3)$$

$$y' = \frac{1}{2} \times \frac{4}{4x+1} - \frac{2x-2}{x^2-2x+3} \quad m = f'(2) = \frac{2}{9} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{9} \rightarrow$$

$$y - 0 = -\frac{4}{9}(x-2) \xrightarrow{x=0} y = \frac{8}{9}$$

سراسری تجربی ۹۴ - خارج از کشور

اگر $f(x) = x^3 - [2x^2]x$ باشد، مقدار $f'_+(\sqrt{2}) - f'_-(\sqrt{2})$ ، کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

$$f(x) = x^3 - [2x^2]x \quad \begin{cases} x \rightarrow (\sqrt{2})^+ \rightarrow [2x^2] = 4 \\ x \rightarrow (\sqrt{2})^- \rightarrow [2x^2] = 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x, & x \geq \sqrt{2} \\ x^3 - 3x, & x < \sqrt{2} \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4, & x > \sqrt{2} \\ 3x^2 - 3, & x < \sqrt{2} \end{cases}$$

$$f'_+(\sqrt{2}) - f'_-(\sqrt{2}) = -4 - (-3) = -1$$

تذکر: این تابع در نقطه $\sqrt{2}$ پیوسته نیست زیرا شرط لازم برای مشتق پذیری تابع در یک نقطه، پیوسته بودن تابع در آن نقطه است. احتمالاً طراح بدون در نظر گرفتن شرط پیوستگی، از تابع با دو ضابطه مشتق گرفته است.

سراسری تجربی ۹۳

در تابع ضمنی $4\sqrt{xy} + \frac{1}{y} - 2x = 1$ ، تابع y بر حسب x منظور شده است. معادله خط مماس بر منحنی آن در نقطه $(4, 1)$ کدام است؟

- (۱) $y + 2x = 9$ (۲) $2y - x = -2$ (۳) $3y + x = 7$ (۴) $3y - x = -1$

نکته: شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه برابر است با مقدار مشتق تابع در آن نقطه.

$$4\sqrt{xy} + \frac{1}{y} - 2x - 1 = 0 \rightarrow f'(x, y) = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{\frac{2y}{\sqrt{xy}} - 2}{\frac{2x}{\sqrt{xy}} - \frac{1}{y^2}}$$

$$m = f'(4, 1) = -\frac{1-2}{4-1} = \frac{1}{3} \rightarrow y-1 = \frac{1}{3}(x-4) \rightarrow 3y-3 = x-4 \rightarrow 3y-x = -1$$

۱۰

۱۱

سراسری تجربی ۹۳

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2 x - \cos^2 x & , 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \\ a \tan x + b \sin^2 x & , \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

تابع با ضابطه

۱۲

است؟

(۱) -۱ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

نکته: برای آن که تابع f در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ مشتق پذیر باشد، باید **اولاً:** در این نقطه پیوسته باشد.

ثانیاً: مشتق راست و چپ تابع در این نقطه موجود و با هم برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin^2 \frac{\pi}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

اولاً:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) = a \tan \frac{\pi}{4} + b \sin^2 \frac{\pi}{4} = a + b \quad (2) \quad (1), (2) \longrightarrow a + b = \frac{1}{2} \quad (I)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2 \sin 2x & , 0 < x < \frac{\pi}{4} \\ a(1 + \tan^2 x) + 2b \cos 2x & , \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f'_-\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{2} = 2 \\ f'_+\left(\frac{\pi}{4}\right) = a(1+1) + 0 = 2a \end{cases}$$

ثانیاً:

$$f'_+\left(\frac{\pi}{4}\right) = f'_-\left(\frac{\pi}{4}\right) \longrightarrow a = \frac{2}{2} \xrightarrow{(I)} \frac{2}{2} + b = \frac{1}{2} \longrightarrow b = -1$$

نکته: هنگام مشتق گیری، تساوی را برای نقطه مرزی بر می داریم.

سراسری تجربی ۹۳ - خارج از کشور

خط قائم بر منحنی $y = xe^{x^2-4}$ ، در نقطه ای به طول ۲ واقع بر آن، محور X ها را با کدام طول قطع می کند؟

(۱) ۱۰ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴) ۲۰

۱۳

$$y = xe^{x^2-4} \xrightarrow{x=2} y = 2(e^0) = 2 \longrightarrow A(2, 2)$$

$$y = e^u \longrightarrow y' = u'e^u$$

$$y' = e^{x^2-4} + 2x^2 e^{x^2-4} = e^{x^2-4} (1 + 2x^2)$$

$$m = f'(2) = 9 \xrightarrow{\perp} m' = -\frac{1}{9}$$

$$y - 2 = -\frac{1}{9}(x - 2) \xrightarrow{y=0} x = 20$$

سراسری تجربی ۹۳ - خارج از کشور

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} - 5 & , x \geq 1 \\ x^2 + ax + b & , x < 1 \end{cases}$ ، در نقطه $x = 1$ مشتق پذیر است ، b کدام است ؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۴

نکته: برای آن که تابع f در نقطه $x = 1$ مشتق پذیر باشد ، باید اولاً: در این نقطه پیوسته باشد .
ثانیاً: مشتق راست و چپ تابع در این نقطه موجود و با هم برابر باشند .

اولاً:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 3 - 5 = -2 & (1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 + a + b & (2) \end{cases} \xrightarrow{(1),(2)} a + b = -3 \quad (I)$$

ثانیاً:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{3}{x^2} & , x > 1 \\ 2x + a & , x < 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f'_+(1) = -3 \\ f'_-(1) = 2 + a \end{cases} \xrightarrow{f'_+(1) = f'_-(1)} a = -5 \xrightarrow{(I)} b = 2$$

سراسری تجربی ۹۲

عرض از مبدا خط مماس بر منحنی به معادله $y = \ln \sqrt{\frac{\sin x}{1 + \cos x}}$ در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ واقع بر آن ، کدام است ؟

- ۱ (۱) $-\frac{\pi}{4}$ ۲ (۲) $-\frac{\pi}{2}$ ۳ (۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴ (۴) $\frac{\pi}{2}$

۱۵

$$y = \ln \sqrt{\frac{\sin x}{1 + \cos x}} \xrightarrow{x = \frac{\pi}{2}} y = \ln 1 = 0 \longrightarrow A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \quad y = \ln u \longrightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

$$y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\sin x}{1 + \cos x}\right) = \frac{1}{2} \ln(\sin x) - \frac{1}{2} \ln(1 + \cos x)$$

$$y' = \frac{1}{2} \times \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{2} \times \frac{-\sin x}{1 + \cos x} \longrightarrow m = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y - 0 = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{x=0} y = -\frac{\pi}{4}$$

سراسری تجربی ۹۲ - خارج از کشور

اندازه مشتق تابع $y = \ln e^{\sqrt{\sin x}}$ در نقطه ای به طول $x = \frac{\pi}{6}$ واقع بر آن ، کدام است ؟

- ۱ (۱) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ ۲ (۲) $\frac{\sqrt{6}}{8}$ ۳ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۴ (۴) $\frac{\sqrt{6}}{4}$

۱۶

$$y = \ln e^{\sqrt{\sin x}} \longrightarrow y = \sqrt{\sin x} \ln e \xrightarrow{\ln e=1} y = \sqrt{\sin x} \longrightarrow y' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

$$f'(\frac{\pi}{6}) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

سراسری تجربی ۹۰

در تابع با ضابطه $f(x) = x\sqrt{x} + |x-1|$ ، مقدار $f'_+(1) + 3f'_-(1)$ ، کدام است ؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

$$f(x) = x\sqrt{x} + |x-1| \longrightarrow f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^3} + x - 1, & x \geq 1 \\ \sqrt{x^3} - x + 1, & x < 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3\sqrt{x} + 1, & x > 1 \\ 3\sqrt{x} - 1, & x < 1 \end{cases} \longrightarrow f'_+(1) + 3f'_-(1) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4$$

نکته: هنگام مشتق گیری ، تساوی را برای نقطه مرزی بر می داریم .

۱۷

سراسری تجربی ۹۰

خط مماس بر منحنی به معادله $\ln(x^2 - y) = \sqrt{y+1} - x$ ، در نقطه $(2, 3)$ ، نیمساز ناحیه اول را با کدام طول قطع می کند ؟

$\frac{5}{3}$ (۴)

$\frac{4}{3}$ (۳)

$\frac{5}{4}$ (۲)

$\frac{3}{4}$ (۱)

$$\ln(x^2 - y) - \sqrt{y+1} + x = 0 \longrightarrow f'(x, y) = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{\frac{2x}{x^2 - y} + 1}{\frac{-1}{x^2 - y} - \frac{1}{2\sqrt{y+1}}}$$

$$m = f'(2, 3) = -\frac{4+1}{-1-\frac{1}{4}} = 4 \quad y-3 = 4(x-2) \longrightarrow \begin{cases} y = 4x - 5 \\ y = x \end{cases} \longrightarrow x = \frac{5}{3}$$

۱۸

سراسری تجربی ۹۰ - خارج از کشور

در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(2x+6)^2} & , x > 1 \\ ax + b & , x \leq 1 \end{cases}$ مقدار $f'(1)$ موجود است. b کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{7}{3}$ (۳) $\frac{8}{3}$ (۴) $\frac{10}{3}$

نکته: برای آن که $f'(1)$ موجود باشد:

اولاً: باید تابع f در $x=1$ پیوسته باشد.

۱۹

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \sqrt[3]{6^2} = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = a + b \end{cases} \longrightarrow a + b = 4 \quad (I)$$

ثانیاً: باید مشتق چپ و راست تابع f در $x=1$ با هم برابر باشند.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2(2)}{3\sqrt[3]{(2x+6)^2}} & , x > 1 \\ a & , x < 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f'_+(x) = \frac{2}{3} \\ f'_-(x) = a \end{cases} \longrightarrow a = \frac{2}{3} \quad (I) \longrightarrow b = \frac{10}{3}$$

نکته: هنگام مشتق گیری، تساوی را برای نقطه مرزی بر می داریم.

سراسری تجربی ۹۰ - خارج از کشور

عرض از مبدا خط قائم بر منحنی به معادله $y^2 = y \ln(x^2 - 3) + 2x$ ، در نقطه $(2, -2)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

$$y \ln(x^2 - 3) + 2x - y^2 = 0 \longrightarrow f'(x, y) = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{\frac{2xy}{x^2 - 3} + 2}{\ln(x^2 - 3) - 2y}$$

$$m = f'(2, -2) = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{-8 + 2}{0 + 4} = \frac{3}{2} \perp \longrightarrow m' = -\frac{2}{3}$$

$$y + 2 = -\frac{2}{3}(x - 2) \xrightarrow{x=0} y = \frac{4}{3} - 2 \longrightarrow y = -\frac{2}{3}$$

۲۰

سراسری تجربی ۸۹

خط مماس بر منحنی به معادله $y = x^3 + 3x^2 + 1$ ، بر خط به معادله $x - 3y = 2$ عمود است. این خط مماس

از نقطه ای با کدام مختصات می گذرد؟

- (۱) $(1, 3)$ (۲) $(1, 4)$ (۳) $(2, -6)$ (۴) $(2, -4)$

۲۱

$$x - 3y = 2 \longrightarrow m = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\perp} m' = -3 \longrightarrow y' = -3$$

$$y = x^3 + 3x^2 + 1 \longrightarrow y' = 3x^2 + 6x \xrightarrow{y' = -3} 3x^2 + 6x = -3 \longrightarrow (x+1)^2 = 0$$

$$x = -1 \longrightarrow y = -1 + 3 + 1 = 3 \longrightarrow A(-1, 3)$$

$$y - 3 = -3(x + 1) \longrightarrow y = -3x$$

با توجه به معادله به دست آمده ، فقط گزینه (۳) در معادله فوق صدق می کند .

نکته: شیب خط مماس همان مشتق تابع در نقطه طول تماس است .

سراسری تجربی ۸۹ - خارج از کشور

خط مماس بر منحنی به معادله $y = \frac{1}{\sqrt[3]{4x}}$ ، در نقطه $(2, \frac{1}{2})$ محور y ها را با کدام عرض ، قطع می کند ؟

$$\frac{4}{3} \quad (4) \quad \frac{7}{6} \quad (3) \quad \frac{5}{6} \quad (2) \quad \frac{2}{3} \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{4x}} = (4x)^{-\frac{1}{3}} \longrightarrow y' = -\frac{1}{3}(4)(4x)^{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{4}{3}(4x)^{-\frac{4}{3}} = -\frac{4}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{(4x)^4}} = \frac{-1}{3x^{\frac{4}{3}}\sqrt[3]{4x}}$$

$$m = f'(2) = \frac{-1}{12} \xrightarrow{(2, \frac{1}{2})} y - \frac{1}{2} = \frac{-1}{12}(x - 2) \xrightarrow{x=0} y = \frac{2}{3}$$

$$\text{or } y = \frac{1}{\sqrt[3]{4x}} \longrightarrow y' = \frac{-\frac{1}{3}\sqrt[3]{(4x)^2}}{\sqrt[3]{(4x)^3}} = \frac{-4}{3\sqrt[3]{(4x)^4}} = \frac{-4}{3(4x)\sqrt[3]{4x}} = \frac{-1}{3x\sqrt[3]{4x}}$$

سراسری تجربی ۸۸

معادله خط قائم بر منحنی $y = \ln(2x - 5)$ ، در نقطه تلاقی آن با محور x ها ، کدام است ؟

$$2x - y = 6 \quad (4) \quad 2x + y = 6 \quad (3) \quad x - 2y = 3 \quad (2) \quad x + 2y = 3 \quad (1)$$

$$y = \ln(2x - 5) \xrightarrow{y=0} \ln(2x - 5) = 0 \xrightarrow{\ln 1=0} 2x - 5 = 1 \longrightarrow x = 3 \longrightarrow A(3, 0)$$

$$y = \ln u \longrightarrow y' = \frac{u'}{u} \quad y' = \frac{2}{2x - 5} \longrightarrow m = f'(3) = 2 \xrightarrow{\perp} m' = -\frac{1}{2}$$

$$y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 3) \xrightarrow{\times 2} 2y + x = 3$$

۲۲

۲۳

سراسری تجربی ۸۸ - خارج از کشور

معادله خط مماس بر منحنی به معادله $y^2 + y = 2e^{2x-1}$ ، در نقطه $(\frac{1}{2}, 1)$ کدام است ؟

(۱) $y - 4x = -1$ (۲) $y + 2x = 2$ (۳) $3y - 4x = 1$ (۴) $3y + 4x = 5$

۲۴

$$2e^{2x-1} - y^2 - y = 0 \rightarrow f'(x, y) = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2e^{2x-1}}{-2y-1} \rightarrow m = f'(\frac{1}{2}, 1) = -\frac{4}{-3} = \frac{4}{3}$$

$$y - 1 = \frac{4}{3}(x - \frac{1}{2}) \rightarrow y - 1 = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} \xrightarrow{\times 3} 3y - 4x = 1$$

سراسری تجربی ۸۷

در تابع با ضابطه $f(x) = |x| \cdot [x]$ ، مقدار $f'(0^-) - f'(0^+)$ ، کدام است ؟

(۱) -1 (۲) 0 (۳) 1 (۴) 2

۲۵

$$f(x) = |x| \cdot [x] \xrightarrow{\begin{matrix} x \rightarrow 0^+ \\ x \rightarrow 0^- \end{matrix}} f(x) = \begin{cases} x(0) = 0 & , x \geq 0 \\ (-x)(-1) = x & , x < 0 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 0 & , x > 0 \\ 1 & , x < 0 \end{cases}$$

$$f'(0^-) - f'(0^+) = 1 - 0 = 1$$

سراسری تجربی ۸۷

عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادله $y = \sqrt{x^2 + 3x}$ در نقطه $x = 1$ واقع بر آن کدام است ؟

(۱) $-\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) 2

۲۶

ابتدا باید مختصات نقطه تماس را تکمیل کنیم .

$$y = \sqrt{x^2 + 3x} \xrightarrow{x=1} y = 2 \rightarrow A(1, 2) \quad y' = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}} \rightarrow m = f'(1) = \frac{5}{4}$$

$$y - 2 = \frac{5}{4}(x - 1) \rightarrow y = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4} \rightarrow d = \frac{3}{4}$$

سراسری تجربی ۸۷ - خارج از کشور

خط مماس بر منحنی به معادله $y = x^3 - x^2$ در نقطه $x = 1$ واقع بر آن ، منحنی را در نقطه دیگر A قطع می کند
عرض نقطه A کدام است ؟

(۱) -3 (۲) -2 (۳) 2 (۴) 3

۲۷

$$y = x^3 - x^2 \xrightarrow{x=1} A(1,0) \quad y' = 3x^2 - 2x \longrightarrow m = f'(1) = 1 \longrightarrow y = x - 1$$

$$\begin{cases} y = x^3 - x^2 \\ y = x - 1 \end{cases} \longrightarrow x^3 - x^2 = x - 1 \longrightarrow x^3 - x^2 - x + 1 = 0$$

$$x^2(x-1) - (x-1) = 0 \longrightarrow (x-1)(x^2-1) = 0 \longrightarrow (x-1)(x-1)(x+1) = 0$$

$$(x-1)^2(x+1) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x=1 \longrightarrow y=0 \\ x=-1 \longrightarrow y=-2 \end{cases}$$

سراسری تجربی ۸۷ - خارج از کشور

خط به معادله $y + x = 0$ ، خط قائم بر منحنی به معادله $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \ln(x-1)$ است . طول پای قائم کدام است ؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲۸

نکته: شیب خط مماس همان مشتق تابع در نقطه تماس است .

$$y + x = 0 \longrightarrow y = -x \longrightarrow m = -1 \xrightarrow{\perp} m' = y' = 1$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \ln(x-1) \longrightarrow y' = x - 2 + \frac{1}{x-1} \xrightarrow{y'=1} x - 2 + \frac{1}{x-1} = 1 \xrightarrow{x(x-1) \neq 0} (x-2)(x-1) + 1 = x-1 \longrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \longrightarrow (x-2)^2 = 0 \longrightarrow x = 2$$

سراسری تجربی ۸۶

خط به معادله $y = 2x - 5$ در نقطه ای به طول ۱ بر منحنی به معادله $y = ax^2 + bx + 1$ مماس است . a کدام است ؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶ (۶)

۲۹

نکته: اگر یک خط بر یک منحنی مماس باشد ، معادله تلاقی آن ها ریشه مضاعف می دهد .

$$\begin{cases} f(a) = g(a) \\ f'(a) = g'(a) \end{cases} \quad \text{نکته: اگر دو تابع } y = f(x) \text{ و } y = g(x) \text{ در نقطه } x = a \text{ بر هم مماس باشند آن گاه:}$$

روش اول:

اولاً: باید مقدار دو تابع به ازای $x = 1$ یکسان باشد .

$$\begin{cases} y_1 = ax^2 + bx + 1 \\ y_2 = 2x - 5 \end{cases} \longrightarrow f_1(1) = f_2(1) \longrightarrow a + b + 1 = -3 \longrightarrow a + b = -4 \quad (I)$$

ثانیاً: باید مقدار مشتق دو تابع به ازای $x = 1$ برابر باشد .

$$\begin{cases} y_1 = 2ax + b \\ y_2 = 2 \end{cases} \longrightarrow y'_1(1) = y'_2(1) \longrightarrow 2a + b = 2 \longrightarrow 2a + b = 2 \quad (\text{II})$$

$$\begin{cases} a + b = -4 \\ 2a + b = 2 \end{cases} \longrightarrow a = 6 \longrightarrow b = -10$$

روش دوم:

$$y = 2x - 5 \xrightarrow{x=1} A(1, -3) \quad y = 2x - 5 \longrightarrow m = 2$$

$$y = ax^2 + bx + 1 \xrightarrow{A(1, -3)} -3 = a + b + 1 \longrightarrow a + b = -4$$

$$y' = 2ax + b \longrightarrow y'(1) = 2 \longrightarrow 2a + b = 2$$

$$\begin{cases} a + b = -4 \\ 2a + b = 2 \end{cases} \longrightarrow a = 6$$

سراسری تجربی ۸۶ - خارج از کشور

اگر $f(x) = x |\sin \pi x|$ ، مقدار $f'(1^+)$ کدام است ؟

۱ (۳) ۲ (۲) ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۱)

$$f(x) = x |\sin \pi x| \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} f(x) = -x \sin \pi x \longrightarrow f'(x) = -\sin \pi x - \pi x \cos \pi x$$

$$f'(1^+) = -\sin \pi - \pi \cos \pi = -\pi(-1) = \pi$$

سراسری تجربی ۸۶

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax - a & , x < 1 \\ x^2 - x & , x \geq 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a ، در نقطه $x = 1$ مشتق پذیر است ؟

۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (هیچ مقدار a)

نکته: اگر تابع f در نقطه $x = a$ مشتق پذیر است آن گاه :

۱) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ ۲) $f'_+(a) = f'_-(a) =$ هر دو موجود

اولاً: تابع f در نقطه $x = 1$ پیوسته باشد .

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a - a = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{تابع } f \text{ همواره در نقطه } x = 1 \text{ پیوسته است .}$$

ثانیاً: در نقطه $x = 1$ ، مشتق راست و چپ موجود و برابر باشند .

$$f'(x) = \begin{cases} a & , x < 1 \\ 2x - 1 & , x > 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f'_-(1) = a \\ f'_+(1) = 1 \end{cases} \xrightarrow{f'_-(1) = f'_+(1)} a = 1$$

سراسری تجربی ۸۶

از رابطه $\frac{\sqrt{y}}{x} + y\sqrt{x} = 6$ ، مقدار $\frac{dy}{dx}$ در نقطه $(1, 4)$ ، کدام است ؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۰ (۴) $\frac{1}{2}$

۳۲

$$\frac{\sqrt{y}}{x} + y\sqrt{x} = 6 \rightarrow f'(x, y) = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{\sqrt{y}\left(\frac{-1}{x^2}\right) + y\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right) + \sqrt{x}} \rightarrow f'(1, 4) = -\frac{-\frac{2}{1} + \frac{4}{2\sqrt{1}}}{\frac{1}{1}\left(\frac{1}{2\sqrt{4}}\right) + \sqrt{1}} = 0$$

سراسری تجربی ۸۶ - خارج از کشور

خط قائم بر منحنی به معادله $e^{2y} + \ln x + \frac{y}{x} = 1$ در نقطه $(1, 0)$ ، محور y ها را با کدام عرض ، قطع می کند ؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) ۱

۳۳

$$e^{2y} + \ln x + \frac{y}{x} - 1 = 0 \rightarrow f'(x, y) = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}}{2e^{2y} + \frac{1}{x}} \rightarrow m = f'(1, 0) = -\frac{1}{3}$$

$$m' = 3 \quad y - 0 = 3(x - 1) \xrightarrow{x=0} y = -3$$

سراسری تجربی ۸۵ - خارج از کشور

منحنی های توابع با ضابطه $f(x) = -x^2 + bx + 3$ بر خط به معادله $y = 7$ مماس اند . فاصله دو نقطه تماس کدام است ؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۳۴

نکته: چون منحنی های تابع بر خط $y = 7$ مماس اند ، پس معادله تقاطع خط و منحنی ریشه مضاعف دارد . داریم :

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 + bx + 3 \\ y = 7 \end{cases} \rightarrow x^2 - bx + 4 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} b^2 - 16 = 0 \rightarrow b = \pm 4$$

$$\text{if } b = 4 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x - 2)^2 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$\text{if } b = -4 \rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \rightarrow (x + 2)^2 = 0 \rightarrow x = -2$$

نکته: چون $y = 7$ خط مماس بر منحنی ها است پس شیب خط مماس برابر صفر است .

$$f(x) = -x^2 + bx + 3 \longrightarrow f'(x) = -2x + b \xrightarrow[m=0]{y=7} -2x + b = 0 \longrightarrow x = \frac{b}{2}$$

$$7 = -\left(\frac{b}{2}\right)^2 + b\left(\frac{b}{2}\right) + 3 \longrightarrow b^2 = 16 \longrightarrow b = \pm 4 \longrightarrow x = \pm 2$$

$$A(2, 7) \quad B(-2, 7) \longrightarrow AB = |x_A - x_B| = |2 + 2| = 4$$

سراسری تجربی ۸۵

۳۵

معادله خط مماس بر منحنی به معادله $y = \frac{1}{2} \cos 2x - \cos x$ در نقطه $x = \frac{\pi}{3}$ واقع بر آن کدام است؟

$$y = x + \frac{\pi}{3} \quad (4) \quad y = -x + \frac{\pi}{3} - 1 \quad (3) \quad y = \frac{3}{4} \quad (2) \quad y = -\frac{3}{4} \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{2} \cos 2x - \cos x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{3}} y = \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} \longrightarrow y = -\frac{3}{4} \longrightarrow A\left(\frac{\pi}{3}, -\frac{3}{4}\right)$$

$$y' = -\sin 2x + \sin x \longrightarrow m = f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \longrightarrow m = 0 \longrightarrow y = -\frac{3}{4}$$

نکته: در نوشتن معادله خط مماس، اگر شیب مماس در نقطه $A(x_0, y_0)$ برابر صفر باشد، خط مماس افقی بوده و معادله آن به صورت $y = y_0$ است و اگر شیب مماس تعریف نشده یعنی ∞ باشد، خط مماس قائم بوده و معادله آن به صورت $x = x_0$ می باشد.

سراسری تجربی - ۸۵

۳۶

از رابطه $y = \sin(x - 2y) + \sqrt{x - y}$ ، مقدار مشتق y نسبت به x در نقطه $(2, 1)$ کدام است؟

$$\frac{3}{5} \quad (4) \quad \frac{2}{5} \quad (3) \quad \frac{3}{7} \quad (2) \quad \frac{2}{7} \quad (1)$$

$$\sin(x - 2y) + \sqrt{x - y} - y = 0 \longrightarrow f'(x, y) = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{\cos(x - 2y) + \frac{1}{2\sqrt{x - y}}}{-2\cos(x - 2y) + \frac{-1}{2\sqrt{x - y}} - 1}$$

$$f'(2, 1) = -\frac{1 + \frac{1}{2}}{-2 - \frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{2}} = \frac{3}{7}$$

سراسری تجربی ۸۵ - خارج از کشور

معادله خط قائم بر منحنی به معادله $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + x$ در نقطه ای به طول ۱ واقع بر آن، کدام است؟

$$y + 2x = 4 \quad (4) \quad y + x = 3 \quad (3) \quad 2y - x = 3 \quad (2) \quad y - 2x = 0 \quad (1)$$

<p>ابتدا مختصات پای قائم را تکمیل می کنیم .</p> $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + x \xrightarrow{x=1} A(1, 2)$ $y' = \frac{-1}{2x\sqrt{x}} + 1 \longrightarrow m = f'(1) = \frac{1}{2} \perp \longrightarrow m' = -2$ $y - 2 = -2(x - 1) \longrightarrow y + 2x = 4$	<p>۳۷</p>
<p>سراسری تجربی ۸۵ - خارج از کشور</p> <p>از رابطه $y^2 = \sqrt{x+2y} + x - 2y$ ، مقدار مشتق y نسبت به x در نقطه $(5, 2)$ کدام است ؟</p> <p> $\frac{4}{15}$ (۴) $\frac{4}{17}$ (۳) $\frac{7}{34}$ (۲) $\frac{2}{15}$ (۱) </p> $\sqrt{x+2y} + x - 2y - y^2 = 0 \longrightarrow f'(x, y) = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+2y}} + 1}{\frac{2}{2\sqrt{x+2y}} - 2 - 2y}$ $f'(5, 2) = -\frac{\frac{1}{6} + 1}{\frac{1}{3} - 2 - 4} = \frac{7}{34}$	<p>۳۸</p>
<p>سراسری تجربی ۸۴</p> <p>معادله خط مماس بر نمودار تابع $y = \tan^2 x + \cos 2x$ در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است ؟</p> <p> $y - 2x = 1 - \frac{\pi}{4}$ (۴) $y + 2x = 1 - \frac{\pi}{4}$ (۳) $y + x = 1 - \frac{\pi}{4}$ (۲) $y + x = 1 + \frac{\pi}{4}$ (۱) </p> $x = \frac{\pi}{4} \longrightarrow y = 1 + 0 = 1 \longrightarrow A(\frac{\pi}{4}, 1)$ $y = \tan^2 x + \cos 2x \longrightarrow y' = 2(1)(1 + \tan^2 x)(\tan x) - 2 \sin 2x$ $m = y'(\frac{\pi}{4}) = 2(1+1)(1) - 2(1) = 2 \longrightarrow y - 1 = 2(x - \frac{\pi}{4}) \longrightarrow y - 2x = 1 - \frac{\pi}{2}$ <p>با توجه به گزینه ها ، شیب خط مماس تنها در معادله گزینه (۴) برابر ۲ است .</p>	<p>۳۹</p>
<p>سراسری تجربی - ۸۴</p> <p>اگر $f(x) = \begin{cases} xe^x & , x \leq 0 \\ \ln(x^2 + 1) & , x > 0 \end{cases}$ ، آنگاه $f'(0^+) - f'(0^-)$ ، کدام است ؟</p> <p> -2 (۴) -1 (۳) 1 (۲) 0 (۱) </p> <p>اولاً: تابع f در نقطه $x = 0$ پیوسته است . ثانیاً: ضابطه مشتق تابع برابر است با :</p>	<p>۴۰</p>

$$f'(x) = \begin{cases} e^x + xe^x, & x < 0 \\ \frac{2x}{x^2 + 1}, & x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = e^u \longrightarrow y' = u'e^u \\ y = \ln u \longrightarrow y' = \frac{u'}{u} \end{cases}$$

$$f'(0^+) - f'(0^-) = 0 - 1 = -1$$

سراسری تجربی ۸۴ - خارج از کشور

کدام خط مماس بر منحنی به معادله $e^{x+y} + x + y - 1 = 0$ در مبدأ مختصات است؟

(۱) $y = x$ (۲) $y = -x$ (۳) $y = 2x$ (۴) $y = -2x$ ۴۱

$$e^{x+y} + x + y - 1 = 0 \longrightarrow f'(x, y) = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{e^{x+y} + 1}{e^{x+y} + 1} \longrightarrow m = f'(0, 0) = -\frac{e^0 + 1}{e^0 + 1} = -1$$

$$\frac{m=-1}{O(0,0)} \longrightarrow y - 0 = -1(x - 0) \longrightarrow y = -x$$

سراسری تجربی ۸۳

معادله خط قائم بر منحنی به معادله $y = \frac{x+1}{2x-1}$ در نقطه ای به طول (-1) واقع بر آن کدام است؟

(۱) $y - 2x = 3$ (۲) $y + 3x = -3$ (۳) $3y - x = 1$ (۴) $3y + x = -1$ ۴۲

$$y = \frac{x+1}{2x-1} \xrightarrow{x=-1} y = 0 \longrightarrow A(-1, 0) \quad y' = \frac{-1-2}{(2x-1)^2} = \frac{-3}{(2x-1)^2}$$

$$m = f'(-1) = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3} \xrightarrow{\perp} m' = 3 \quad y - 0 = 3(x + 1) \longrightarrow y - 3x = 3$$

سراسری تجربی - ۸۳

اگر $f(x) = |x-2| + \sqrt{2x}$ ، حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$ کدام است؟

(۱) -2 (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$ ۴۳

$$f(x) = |x-2| + \sqrt{2x} \longrightarrow f(x) = \begin{cases} x-2 + \sqrt{2x}, & x \geq 2 \\ -x+2 + \sqrt{2x}, & x < 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{2\sqrt{2x}}, & x > 2 \\ -1 + \frac{2}{2\sqrt{2x}}, & x < 2 \end{cases} \longrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = f'_-(2) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

نکته: هنگام مشتق گیری، تساوی را برای نقطه مرزی بر می داریم.

<p>سراسری تجربی - ۸۳</p> <p>در یک نقطه از منحنی به معادله $\sqrt{y} + yx\sqrt{x} - 6x = 0$ ، خط مماس بر منحنی موازی محور X ها است ، طول آن نقطه کدام است ؟</p> <p>۴ (۴) ۲ (۳) ۱ (۲) ۳ (۱)</p> <p>نکته: چون خط مماس بر منحنی موازی محور X ها است ، پس باید شیب مماس بر منحنی برابر صفر باشد .</p> $\sqrt{y} + yx\sqrt{x} - 6x = 0 \longrightarrow f'(x, y) = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{\frac{3}{2}y\sqrt{x} - 6}{\frac{1}{2\sqrt{y}} + x\sqrt{x}} \xrightarrow{m=0} \frac{3}{2}y\sqrt{x} - 6 = 0$ $y\sqrt{x} = 4 \longrightarrow \sqrt{y} + 4x - 6x = 0 \longrightarrow y = 4x^2 \longrightarrow 4x^2\sqrt{x} = 4 \longrightarrow x = 1$	<p>۴۴</p>
<p>سراسری تجربی - ۸۲</p> <p>معادله حرکت یک گلوله توپ که از زمین به طور قائم به طرف بالا پرتاب می شود به صورت $s = -5t^2 + 20t$ است . سرعت لحظه ای این گلوله در زمان برخورد به زمین چند متر بر ثانیه است ؟ (با صرف نظر کردن از مقاومت هوا)</p> <p>-۵ (۴) -۱۰ (۳) -۱۵ (۲) -۲۰ (۱)</p> $s = -5t^2 + 20t \xrightarrow{s=0} -5t^2 + 20t = 0 \longrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = 0 \end{cases}$ $s'_t = -10t + 20 \longrightarrow s'(4) = -40 + 20 = -20$	<p>۴۵</p>
<p>سراسری تجربی ۸۲</p> <p>معادله خط قائم بر نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{x+1}{2x-1}$ در نقطه ای به طول ۲ واقع بر آن ، کدام است ؟</p> <p>$y + 5 = 3x$ (۴) $y + 4x = 5$ (۳) $2x + y = 3$ (۲) $3y = x + 1$ (۱)</p> $y = \frac{x+1}{2x-1} \xrightarrow{x=2} y = \frac{2+1}{4-1} = 1 \longrightarrow A(2, 1) \qquad y' = \frac{-1-2}{(2x-1)^2} = \frac{-3}{(2x-1)^2}$ $m = f'(2) = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3} \xrightarrow{\perp} m' = 3 \qquad y - 1 = 3(x - 2) \longrightarrow y = 3x - 5$	<p>۴۶</p>
<p>سراسری تجربی - ۸۲</p> <p>از رابطه $y = y^2 e^{\sin 2x} + \sin x$ ، مقدار $\frac{dy}{dx}$ در نقطه $(0, 1)$ کدام است ؟</p> <p>۳ (۴) ۲ (۳) -۳ (۲) -۴ (۱)</p>	<p>۴۷</p>

$$y^2 e^{\sin 2x} + \sin x - y = 0 \rightarrow f'(x, y) = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2y^2 \cos 2x \cdot e^{\sin 2x} + \cos x}{2ye^{\sin 2x} - 1}$$

$$f'(0, 1) = -\frac{2(1)^2(1)(1) + (1)}{2(1)(1) - 1} = -\frac{2+1}{1} = -3$$

سراسری تجربی ۸۱

در تابع با ضابطه $y = \ln(1 + \sin x)$ ، آهنگ لحظه ای تغییر y در واحد تغییر x در نقطه $x = \frac{\pi}{6}$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\sqrt{3}$

۴۸

نکته: آهنگ لحظه ای در هر نقطه برابر است با مشتق تابع در همان نقطه.

$$y = \ln(1 + \sin x) \rightarrow y' = \frac{\cos x}{1 + \sin x} \rightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

سراسری تجربی - ۸۱

نمودارهای دو تابع $y = 2x^2 + ax + b$ و $y = 2x + b$ در نقطه ای به طول ۲ بر روی محور x ها متقاطع اند. $a - b$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۹

نکته: مختصات نقطه تقاطع یا تماس دو تابع، هم در ضابطه تک تک آن ها و هم در محل تلاقی آن ها صدق می کند.

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 + ax + b \xrightarrow{b=-4, (2,0)} a = -2 \\ g(x) = 2x + b \xrightarrow{(2,0)} b = -4 \end{cases} \rightarrow a - b = -2 + 4 = 2$$

سراسری تجربی - ۸۱

شیب خط قائم بر بیضی به معادله $x^2 + 3y^2 - 8x = 0$ در نقطه برخورد آن بیضی با نیمساز ناحیه اول و در این ناحیه کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) ۳

۵۰

ابتدا برخورد معادله بیضی با معادله نیمساز ناحیه اول را به دست می آوریم.

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 - 8x = 0 \\ y = x \end{cases} \longrightarrow x^2 + 3x^2 - 8x = 0 \longrightarrow x^2 - 2x = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \longrightarrow y = 2 \end{cases}$$

$$x^2 + 3y^2 - 8x = 0 \longrightarrow f'(x, y) = -\frac{2x-8}{6y} \longrightarrow m = f'(2, 2) = -\frac{-4}{12} = \frac{1}{3} \longrightarrow m' = -3$$

سراسری تجربی - ۸۱

اگر $xy^2 + ye^{2-x} = 1$ ، مقدار مشتق y نسبت به x در نقطه $(2, \frac{1}{2})$ کدام است ؟

(۱) $\frac{1}{12}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{6}$

$$xy^2 + ye^{2-x} - 1 = 0 \longrightarrow f'(x, y) = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{y^2 - ye^{2-x}}{2xy + e^{2-x}} \longrightarrow f'(2, \frac{1}{2}) = -\frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}{2 + 1} = \frac{1}{12}$$

سراسری تجربی ۸۰

خط $y = -1$ بر نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = 2x^2 - x + a$ مماس است ، a کدام است ؟

(۱) $-\frac{8}{9}$ (۲) $-\frac{7}{8}$ (۳) $\frac{7}{8}$ (۴) $\frac{9}{8}$

روش اول: چون خط بر نمودار تابع مماس است پس معادله تقاطع خط و تابع درجه دوم ریشه مضاعف دارد .

نکته: چون خط بر سهمی مماس است پس معادله تقاطع خط و تابع درجه دوم ، ریشه مضاعف دارد .

$$y_1 = y_2 \longrightarrow 2x^2 - x + a = -1 \longrightarrow 2x^2 - x + a + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} (-1)^2 - 4(2)(a+1) = 0$$

$$1 - 8a - 8 = 0 \longrightarrow a = -\frac{7}{8}$$

روش دوم:

نکته: شیب خط مماس بر منحنی تابع $y = f(x)$ در نقطه ای به طول X_0 واقع بر آن برابر مشتق تابع در نقطه X_0 است ، یعنی $m = f'(X_0)$ در X_0 .

$$f(x) = 2x^2 - x + a \longrightarrow f'(x) = 4x - 1 \xrightarrow{y'=0} x = \frac{1}{4}$$

$$f(\frac{1}{4}) = -1 \longrightarrow 2(\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{4} + a = -1 \longrightarrow a = -\frac{7}{8}$$

سراسری تجربی - ۸۰

اگر تابع f در x_0 مشتق پذیر و $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = -2$ ، مقدار $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}$ کدام است ؟

۵۳

(۱) $2 - f(x_0)$ (۲) $2 + f(x_0)$ (۳) 2 (۴) -2

نکته: اگر تابع f در $x = a$ مشتق پذیر باشد آن گاه داریم: $f'_+(a) = f'_-(a) = f'(a)$ و از طرفی داریم:

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = -2 \longrightarrow f'_+(x_0) = -2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0-h) - f(x_0)}{-h} \xrightarrow{-h=t} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t} = f'_+(x_0) = -2$$

سراسری تجربی ۷۹

خط مماس بر نمودار تابع $0 < x < \pi$ ، $y = \frac{1}{\sin x}$ در نقطه ای به طول x_0 واقع بر آن موازی خط به معادله $3y - 2x = 5$ است. x_0 کدام است ؟

۵۴

(۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{2\pi}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{6}$ (۴) $\frac{5\pi}{6}$

$$3y - 2x = 5 \longrightarrow m = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3} \quad y = \frac{1}{\sin x} \longrightarrow y' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \quad y' = \frac{2}{3}$$

$$\frac{-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{2}{3} \longrightarrow 2 \sin^2 x = -3 \cos x \xrightarrow{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x} 2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 = 0$$

$$\cos x = \frac{3 \pm 5}{4} \longrightarrow \begin{cases} \cos x = 2 \notin [-1, 1] \\ \cos x = -\frac{1}{2} \longrightarrow x = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

سراسری تجربی ۷۹

معادله خط قائم بر منحنی به معادله $xy^2 - y\sqrt{x} = 2$ در نقطه $(1, -1)$ ، کدام است ؟

(۱) $y + 2x = 1$ (۲) $x - y = 2$ (۳) $2x - y = 3$ (۴) $y + x = 0$

۵۵

$$xy^2 - y\sqrt{x} = 2 \rightarrow f'(x, y) = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{y^2 - \frac{y}{2\sqrt{x}}}{2xy - \sqrt{x}} \rightarrow m = f'(1, -1) = -\frac{1 - \frac{-1}{2}}{-2 - 1} = \frac{1}{2}$$

$$m' = -2 \xrightarrow{(1, -1)} y + 1 = -2(x - 1) \rightarrow y + 2x = 1$$

سراسری تجربی - ۷۹

اندازه مشتق تابع $y = \ln(\sin \pi x^2)$ در نقطه $x = \frac{1}{2}$ ، کدام است ؟

- (۱) $-\pi$ (۲) $-\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) π

$$y = \ln(\sin \pi x^2) \rightarrow y' = \frac{2\pi x \cos \pi x^2}{\sin \pi x^2} = 2\pi x \cot \pi x^2 \rightarrow y'(\frac{1}{2}) = 2\pi(\frac{1}{2}) \cot \frac{\pi}{4} = \pi$$

۵۶

سراسری تجربی - ۷۹

خط قائم بر دایره به معادله $x^2 + y^2 + 3x = 7$ بر خط به معادله $2y + x = 0$ عمود است ، عرض از مبدا آن کدام است ؟

- (۱) -3 (۲) -2 (۳) 2 (۴) 3

$$2y + x = 0 \rightarrow m = -\frac{1}{2} \rightarrow m' = 2 \quad (x + \frac{3}{2})^2 + y^2 = \frac{37}{4} \rightarrow \omega(-\frac{3}{2}, 0)$$

$$\begin{cases} f'_x = 0 \rightarrow 2x + 3 = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{2} \\ f'_y = 0 \rightarrow 2y = 0 \rightarrow y = 0 \end{cases} \rightarrow y = 2(x + \frac{3}{2}) \rightarrow y = 2x + 3 \rightarrow d = 3$$

۵۷

سراسری تجربی - ۷۸

اندازه مشتق $f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$ به ازای $x = \frac{1}{4}$ ، کدام است ؟

- (۱) -1 (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 1

$$f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{(1 - \sqrt{x})} = -\sqrt{x} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow f'(\frac{1}{4}) = -\frac{1}{2(\frac{1}{2})} = -1$$

۵۸

سراسری تجربی ۷۷

معادله خط قائم بر نمودار تابع با ضابطه $y = 4x + e^{-2x}$ در نقطه $x = 0$ واقع بر آن ، کدام است ؟

- (۱) $2y - x = 2$ (۲) $2y + x = 2$ (۳) $y + 2x = 1$ (۴) $y - 2x = 1$

۵۹

$$y = 4x + e^{-2x} \xrightarrow{x=0} y = e^0 = 1 \longrightarrow A(0,1) \quad y = e^u \longrightarrow y' = u'e^u$$

$$y' = 4 - 2e^{-2x} \longrightarrow m = f'(0) = 4 - 2 = 2 \xrightarrow{\perp} m' = -\frac{1}{2}$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 0) \longrightarrow 2y + x = 2$$

سراسری تجربی - ۷۷

۶۰ در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax^2 - x + 1 & , x \leq 1 \\ bx + \ln \sqrt{2x-1} & , x > 1 \end{cases}$ مقدار $f'(1)$ وجود دارد. a کدام است؟

(۱) -۲ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲

نکته: برای آن که تابع f در نقطه $x = 1$ مشتق پذیر باشد، باید اولاً: در این نقطه پیوسته باشد.

ثانیاً: مشتق راست و چپ تابع در این نقطه موجود و با هم برابر باشند.

$$\begin{cases} f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = b \end{cases} \longrightarrow a = b \quad f'(x) = \begin{cases} 2ax - 1 & , x \leq 1 \\ b + \frac{1}{2x-1} & , x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_-(x) = 2a - 1 \\ f'_+(x) = b + 1 \end{cases} \longrightarrow 2a - 1 = b + 1 \longrightarrow b = 2a - 2 \xrightarrow{a=b} a = b = 2$$

سراسری تجربی - ۷۷

۶۱ اندازه مشتق $y = \tan^{-1}(e^{2x})$ به ازای $x = \ln 2$ کدام است؟

(۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۳) $\frac{8}{17}$ (۴) $\frac{8}{15}$

$$y = \tan^{-1}(e^{2x}) \longrightarrow y' = \frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}} \xrightarrow{x=\ln 2} y' = \frac{8}{17}$$

سراسری تجربی - ۷۷

۶۲ معادله خط قائم بر نمودار تابع با ضابطه $y = 4x + e^{-2x}$ در نقطه $x = 0$ واقع بر آن کدام است؟

(۱) $2y - x = 2$ (۲) $2y + x = 2$ (۳) $y + 2x = 1$ (۴) $y - x = 1$

$$y = 4x + e^{-2x} \xrightarrow{x=0} y = e^0 = 1 \longrightarrow A(0, 1)$$

$$y' = 4 - 2e^{-2x} \longrightarrow m = f'(0) = 4 - 2 = 2 \longrightarrow m' = -\frac{1}{2}$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 0) \xrightarrow{\times 2} 2y + x = 2$$

سراسری تجربی - ۷۷

متحرکی بر روی منحنی به معادله $e^{2x-y} + y^2 = 4x + 1$ در حرکت است، آهنگ تغییر y نسبت به x در نقطه $(1, 2)$ کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۱)

۶۳

$$e^{2x-y} + y^2 - 4x - 1 = 0 \longrightarrow f'(x, y) = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2e^{2x-y} - 4}{-e^{2x-y} + 2y}$$

$$f'(1, 2) = -\frac{2-4}{-1+4} = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3}$$

سراسری تجربی - ۷۷

عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادله $y = x\sqrt{x-3}$ در نقطه ای به طول ۴ واقع بر آن، کدام است؟

8 (۴) 6 (۳) -6 (۲) -8 (۱)

۶۴

$$y = x\sqrt{x-3} \xrightarrow{x=4} A(4, 4) \longrightarrow y' = \sqrt{x-3} + \frac{x}{2\sqrt{x-3}} \longrightarrow m = f'(4) = 1 + 2 = 3$$

$$y - 4 = 3(x - 4) \longrightarrow y = 3x - 8 \longrightarrow h = -8$$

سراسری تجربی - ۷۷

اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + a - 1 & , x \geq 1 \\ ax + b & , x < 1 \end{cases}$ در \mathbb{R} مشتق پذیر باشد، آن گاه $a + b$ کدام است؟

2 (۴) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۲) -2 (۱)

۶۵

نکته: برای آن که تابع f در \mathbb{R} مشتق پذیر باشد، باید تابع f در نقطه مرزی $x=1$ مشتق پذیر باشد.
اولاً: باید تابع f در $x=1$ پیوسته باشد.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1 + a - 1 = a \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a + b \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \rightarrow a = a + b \rightarrow b = 0$$

ثانیاً: مشتق راست و چپ تابع f در $x=1$ موجود و با هم برابر باشند.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x > 1 \rightarrow f'_+(1) = 2 \\ a, & x < 1 \rightarrow f'_-(1) = a \end{cases} \quad \frac{f'_+(1) = f'_-(1)}{\rightarrow a = 2} \quad a + b = 2$$

سراسری تجربی - ۷۵

مقدار مشتق تابع با ضابطه $y = \sin \frac{x}{y} + 1$ در نقطه $(\pi, 1)$ کدام است؟

۶۶

(۱) $\frac{1}{\pi-1}$
 (۲) $\frac{1}{\pi+1}$
 (۳) $\frac{-1}{\pi+1}$
 (۴) $\frac{1}{1-\pi}$

$$\sin \frac{x}{y} - y + 1 = 0 \rightarrow f'(x, y) = -\frac{\frac{1}{y} \cos \frac{x}{y}}{-\frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y} - 1} \rightarrow f'(\pi, 1) = -\frac{\cos \pi}{-\pi \cos \pi - 1} = \frac{1}{\pi - 1}$$

سراسری تجربی - ۷۵

ضریب زاویه خط مماس بر نمودار تابع با ضابطه $y^2 = \ln x + \ln y$ در نقطه $(e, 1)$ کدام است؟

۶۷

(۱) $-e$
 (۲) e
 (۳) $\frac{1}{e}$
 (۴) $-\frac{1}{e}$

$$\ln x + \ln y - y^2 = 0 \rightarrow f'(x, y) = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{y} - 2y} \rightarrow m = f'(e, 1) = -\frac{\frac{1}{e}}{1-2} = \frac{1}{e}$$

همکاران و دانش آموزان عزیز قبل از مطالعه هزینه این جزوات را پرداخت کنید و هزینه آن یک صلوات و یک فاتحه برای روح پدر عزیزم است .

با تشکر : **سید علی موسوی**

خواهشمند است پیشنهادات و نظرات خود را به آدرس تلگرام (۰۹۱۵۳۲۱۵۶۱۴)
و یا به ایمیل seyedalimousavi48@gmail.com ارسال فرمائید .

همکاران و دانش آموزان عزیز اگر اشکال تایپی یا راه حل های بهتری داشتید بنده را
همراهی کنید .

با سپاس فراوان از شما عزیزان