



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

سراسری تجربی ۹۶

مشتق تابع $y = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right)$ به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۱)

$y = \cos^2 u \longrightarrow y' = -2 \times u' \times \sin u \times \cos u \longrightarrow y = \cos^2 u \longrightarrow y' = -u' \sin 2u$

$y = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right) \longrightarrow y' = -2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \sin 2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right) \longrightarrow y' = \left(\frac{1}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right)$

$y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}\right) = \left(\frac{1}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

۱

سراسری تجربی ۹۶ - خارج از کشور

مشتق تابع $y = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۲ (۴) ۱ (۳) صفر (۲) -۱ (۱)

با استفاده از مشتق عامل صفر:

$y = (\cos x - \sin x) \times \frac{1}{\cos x + \sin x} \quad y' = (-\sin x - \cos x) \times \frac{1}{\cos x + \sin x}$

$y' = -(\sin x + \cos x) \times \frac{1}{(\cos x + \sin x)} = -1$

روش دوم: شبه هموگرافیک:

$y = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \div \cos x \rightarrow y = \frac{-\tan x + 1}{\tan x + 1} \rightarrow y' = \frac{-1-1}{(\tan x + 1)^2} \times (1 + \tan^2 x)$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-2}{(1+1)^2} \times (1+1) = -1$

۲

سراسری تجربی ۹۵

در تابع با ضابطه $f(x) = \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)^3$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ کدام است؟

۱۵ (۴) ۱۲ (۳) -۱۸ (۲) -۲۱ (۱)

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) \quad \text{or} \quad \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - 0}{1} = \lim_{x \rightarrow 2} f'(x) = f'(2)$

۳

$$f(x) = \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} \right)^3 \longrightarrow u = \frac{x+2}{2x-3} \longrightarrow u' = \frac{-3-4}{(2x-3)^2} = \frac{-7}{(2x-3)^2} \longrightarrow u'(2) = -7$$

$$f'(x) = \left(\sqrt{u} \right)^3 \longrightarrow f'(x) = 3 \times \frac{u'}{2\sqrt{u}} \times u \longrightarrow f'(2) = 3 \times \frac{-7}{4} \times 4 = -21$$

سراسری تجربی ۹۵ - خارج از کشور

در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}$ ، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ کدام است ؟

$\frac{7}{16}$ (۴)

$\frac{7}{24}$ (۳)

$\frac{5}{24}$ (۲)

$\frac{7}{48}$ (۱)

۴

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(1+h) - 0}{1} = f'(1) \quad y = \frac{ax+b}{cx+d} \longrightarrow y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{x+3}} \longrightarrow u = \frac{4x+5}{x+3} \longrightarrow u' = \frac{12-5}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2} \longrightarrow u'(1) = \frac{7}{16}$$

$$f(x) = \sqrt{u} \longrightarrow f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \longrightarrow f'(1) = \frac{\frac{7}{16}}{2 \times \frac{3}{2}} = \frac{7}{48}$$

سراسری تجربی ۹۴

در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر x ، در نقطه $x=1$ با نمو متغیر $0/21$ از آهنگ لحظه ای تابع در این نقطه ، چقدر کمتر است ؟

$\frac{2}{21}$ (۴)

$\frac{3}{42}$ (۳)

$\frac{1}{21}$ (۲)

$\frac{1}{42}$ (۱)

۵

$$f(x) = \sqrt{x} \longrightarrow x=1, \Delta x = 0/21 \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1/21) - f(1)}{0/21} = \frac{1/1 - 1}{0/21} = \frac{0/1}{0/21} = \frac{10}{21}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \longrightarrow f'(1) = \frac{1}{2} \quad f'(1) - \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2} - \frac{10}{21} = \frac{1}{42}$$

سراسری تجربی ۹۴ - خارج از کشور

در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر x ، در نقطه $x=1$ با نمو متغیر

۰/۴۴ از آهنگ لحظه ای تابع در این نقطه ، چقدر کمتر است ؟

۶

$\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{12}$ (۳) $\frac{1}{24}$ (۲) $\frac{1}{30}$ (۱)

$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}} \rightarrow x=1, \Delta x = 0/44$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1/44) - f(1)}{0/44} = \frac{\frac{44}{120} - 0}{0/44} = \frac{\frac{44}{120}}{\frac{44}{120}} = \frac{100}{120} = \frac{5}{6}$

$f'(x) = \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)}{x} \rightarrow f'(1) = 1$

$f'(1) - \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$

سراسری تجربی ۹۳

در تابع با ضابطه $f(x) = (2x+1)^2$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع ، از $x=4$ تا $x=12$ ، از آهنگ لحظه ای آن در نقطه $x=4$ چقدر بیشتر است ؟

۷

$\frac{11}{270}$ (۴) $\frac{7}{270}$ (۳) $\frac{11}{540}$ (۲) $\frac{7}{540}$ (۱)

$f(x) = (2x+1)^2 = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \quad x_1=4, x_2=12$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(12) - f(4)}{12 - 4} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{3}}{8} = -\frac{1}{60}$

$f'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{2x+1}} \rightarrow f'(4) = \frac{-1}{9} = -\frac{1}{27}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = -\frac{1}{60} - (-\frac{1}{27}) = \frac{-27+60}{1620} = \frac{33}{1620} = \frac{11}{540}$

سراسری تجربی ۹۳

مشتق تابع $y = 2\sin^2(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4})$ به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ ، کدام است ؟

۸

$-\frac{1}{8}$ (۴) $-\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۱)

$$y = \sin^2 u \rightarrow y' = 2 \times u' \times \cos u \times \sin u \longrightarrow y = \sin^2 u \longrightarrow y' = u' \sin 2u$$

$$y = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4} \right) \longrightarrow y' = 2 \times \left(-\frac{1}{4} \right) \sin 2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4} \right) \longrightarrow y' = \left(-\frac{1}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2} \right)$$

$$y' \left(\frac{\pi}{3} \right) = \left(-\frac{1}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \left(-\frac{1}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) = \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{4}$$

سراسری تجربی ۹۳ - خارج از کشور

در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع از نقطه $x = 4$ تا $x = 6/25$ ، از آهنگ لحظه ای آن در نقطه $x = 4$ چقدر کمتر است؟

$\frac{1}{12}$ (۴) $\frac{5}{72}$ (۳) $\frac{1}{18}$ (۲) $\frac{1}{36}$ (۱)

$$f(x) = \sqrt{x} \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 6/25$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(6/25) - f(4)}{6/25 - 4} = \frac{2/5 - 2}{2/25 - 4} = \frac{2}{9}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow f'(4) = \frac{1}{4}$$

$$f'(x) - \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{9 - 8}{36} = \frac{1}{36}$$

۹

سراسری تجربی ۹۳ - خارج از کشور

مشتق تابع $y = \sin^3 \sqrt{2x}$ به ازای $x = \frac{\pi^2}{18}$ ، کدام است؟

$\frac{27}{4\pi}$ (۴) $\frac{27}{8\pi}$ (۳) $\frac{9}{4\pi}$ (۲) $\frac{9}{8\pi}$ (۱)

$$y = \sin^3 \sqrt{2x} \longrightarrow y' = 3 \times \frac{2}{2\sqrt{2x}} \times \cos \sqrt{2x} \times \sin^2 \sqrt{2x}$$

$$y' \left(\frac{\pi^2}{18} \right) = 3 \times \frac{2}{\pi} \times \cos \frac{\pi}{3} \times \sin^2 \frac{\pi}{3} = 3 \times \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{8\pi}$$

۱۰

سراسری تجربی ۹۱

مقدار مشتق تابع $f(x) = \frac{1 - \cos^2 x}{2 - \sin^2 x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ ، کدام است؟

$\frac{8}{9}$ (۴) $\frac{7}{9}$ (۳) $\frac{5}{9}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۱)

$$f(x) = \frac{au + b}{cu + d} \longrightarrow f'(x) = \frac{ad - bc}{(cu + d)^2} \times u'$$

مشتق با استفاده از شبه هموگرافیک:

۱۱

$$f(x) = \frac{1 - \cos^2 x}{2 - \sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + 0}{-\sin^2 x + 2} \rightarrow f(x) = \frac{2 - 0}{(-\sin^2 x + 2)^2} \times \sin 2x$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2} \times 1 = \frac{8}{9}$$

سراسری تجربی ۹۱ - خارج از کشور

مقدار مشتق تابع $f(x) = \sqrt{1 + \tan^2 \frac{1}{x}}$ به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ ، کدام است ؟

$\frac{2\pi^2\sqrt{3}}{9}$ (۴) $\frac{2\pi^2}{9}$ (۳) $-\frac{2\pi^2}{9}$ (۲) $-\frac{2\pi^2\sqrt{3}}{9}$ (۱)

۱۲

روش اول:

$$f(x) = \sqrt{1 + \tan^2 \frac{1}{x}} \rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x}}} = \frac{1}{\cos \frac{1}{x}} \xrightarrow{y = \frac{1}{x} \rightarrow y' = \frac{-1}{x^2}} f'(x) = \frac{\frac{-1}{x^2} \times \sin \frac{1}{x}}{\cos^2 \frac{1}{x}}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} \times \tan \frac{1}{x} \times \frac{1}{\cos \frac{1}{x}} \rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi^2}{9} \times \tan \frac{\pi}{3} \times \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} = -\frac{2\sqrt{3}\pi^2}{9}$$

روش دوم:

$$f(x) = \sqrt{1 + \tan^2 \frac{1}{x}} \rightarrow u = 1 + \tan^2 \frac{1}{x} \rightarrow u' = 2 \times \left(\frac{-1}{x^2}\right) \times (1 + \tan^2 \frac{1}{x}) \times \tan \frac{1}{x}$$

$$u\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \tan^2 \frac{\pi}{3} = 1 + 3 = 4 \quad u'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times \left(\frac{-\pi^2}{9}\right) \times (4) \times \tan \frac{\pi}{3} = \left(\frac{-8\pi^2}{9}\right) \times \sqrt{3}$$

$$f(x) = \sqrt{u} \rightarrow f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\left(\frac{-8\pi^2}{9}\right) \times \sqrt{3}}{2 \times 2} = \frac{-2\sqrt{3}\pi^2}{9}$$

سراسری تجربی ۹۰

در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{36}{x^2}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع از $x_1 = 2$ تا $x_2 = 3$ چقدر از آهنگ لحظه ای آن در

$x = \sqrt[3]{12}$ بیشتر است ؟

$\frac{2}{5}$ (۴)

۲ (۳)

$\frac{1}{5}$ (۲)

۱ (۱)

۱۳

$$f(x) = \frac{36}{x^2} \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3 \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{4 - 9}{1} = -5 \quad f'(x) = \frac{-2x(36)}{x^4} = \frac{-72}{x^3} \rightarrow f'(\sqrt[3]{12}) = \frac{-72}{12} = -6$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = -5 - (-6) = 1$$

سراسری تجربی ۹۰

مقدار مشتق تابع $y = \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4}\right)$ به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟

$\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{8}$ (۳) $-\frac{1}{8}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۱)

۱۴

$$y = \cos^2 u \rightarrow y' = -2 \times u' \times \sin u \times \cos u \rightarrow y = \cos^2 u \rightarrow y' = -u' \sin 2u$$

$$y = \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4}\right) \rightarrow y' = -\left(\frac{1}{4}\right) \sin 2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4}\right) \rightarrow y' = -\left(\frac{1}{4}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{x}{2}\right)$$

$$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\left(\frac{1}{4}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = -\left(\frac{1}{4}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\left(\frac{1}{4}\right) \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\left(\frac{1}{4}\right) \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{8}$$

سراسری تجربی ۹۰ - خارج از کشور

در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ، آهنگ متوسط از $x_1 = 2$ تا $x_2 = 5$ برابر آهنگ لحظه ای آن در $x = a$ است، مقدار a کدام است؟

4 (۴) 3 (۳) $1 + \sqrt{3}$ (۲) $2/5$ (۱)

۱۵

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 5 \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{\frac{5}{4} - 2}{3} = \frac{-1}{4} \quad f'(x) = \frac{-1 - 0}{(x-1)^2} \rightarrow f'(a) = \frac{-1}{(a-1)^2}$$

$$\frac{-1}{(a-1)^2} = \frac{-1}{4} \rightarrow (a-1)^2 = 4 \rightarrow (a-1) = \pm 2 \rightarrow a = 3, \quad a = -1$$

سراسری تجربی ۹۰ - خارج از کشور

مقدار مشتق تابع $y = \cos^2 \frac{\pi}{3x}$ به ازای $x = 4$ ، کدام است ؟

$$\frac{\pi}{32} \quad (4) \qquad \frac{\pi}{48} \quad (3) \qquad \frac{\pi}{72} \quad (2) \qquad \frac{\pi}{96} \quad (1)$$

$$y = \cos^2 u \longrightarrow y' = -2 \times u' \times \sin u \times \cos u \longrightarrow y = \cos^2 u \longrightarrow y' = -u' \sin 2u$$

$$y = \cos^2 \frac{\pi}{3x} \longrightarrow y' = -\left(\frac{-\pi}{3x^2}\right) \sin \frac{2\pi}{3x} \longrightarrow y' = \frac{\pi}{3x^2} \sin \frac{2\pi}{3x}$$

$$y'(4) = \frac{\pi}{48} \sin \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{48} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{48} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{96}$$

۱۶

سراسری تجربی ۸۹

اندازه مشتق تابع $y = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{8}$ ، کدام است ؟

$$1 \quad (4) \qquad \frac{1}{2} \quad (3) \qquad -1 \quad (2) \qquad -2 \quad (1)$$

۱۷

روش اول:

$$y = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \longrightarrow y' = -2 \times \left[1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)\right]$$

$$y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = -2 \times \left[1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)\right] = -2$$

روش دوم: شبه هموگرافیک

$$y = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{-\tan^2 x + 1}{\tan^2 x + 1} \rightarrow y' = \frac{-1-1}{(\tan^2 x + 1)^2} \times (2)(1 + \tan^2 x)$$

$$y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{-4}{\left(\tan \frac{\pi}{4} + 1\right)^2} \times (1 + \tan^2 \frac{\pi}{4}) = \frac{-4}{(1+1)^2} \times (1+1) = -2$$

روش سوم: مشتق عامل صفر

$$y = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = (1 - \tan^2 x) \times \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

$$y' = -2(1 + \tan^2 x) \times \frac{1}{1 + \tan^2 x} \longrightarrow y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = -2(1+1) \times \frac{1}{1+1} = -2$$

سراسری تجربی ۸۹ - خارج از کشور

مقدار مشتق تابع $y = \frac{1 + \cos 2x}{\cos 2x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{12}$ ، کدام است ؟

- (۱) $-\frac{4}{3}$ (۲) $-\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۱۸

مشتق با استفاده از شبه هموگرافیک :

$$y = \frac{1 + \cos 2x}{\cos 2x} = \frac{\cos 2x + 1}{\cos 2x + 0} \rightarrow y' = \frac{0 - 1}{\cos^2 2x} \times (-2 \sin 2x) = \frac{2}{\cos^2 2x} \times \sin 2x$$

$$y' \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{2}{\cos^2 \frac{\pi}{6}} \times \sin \frac{\pi}{6} = \frac{8}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$$

سراسری تجربی ۸۸

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$ نسبت به متغیر x روی بازه $[0, 3]$ ، از آهنگ لحظه ای تابع در $x = \sqrt{2}$ ، چقدر کمتر است ؟

- (۱) ۰ (۲) $\frac{1}{18}$ (۳) $\frac{1}{12}$ (۴) $\frac{1}{9}$

۱۹

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 16} \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 3 \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{5 - 4}{3} = \frac{1}{3} \quad f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 16}} \rightarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}}$$

$$f'(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \sqrt{\frac{2}{18}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

سراسری تجربی ۸۸

اگر $y = \sqrt{2u} - \frac{1}{u}$ و $u = \sin^2 x - \cos 2x$ باشد ، مقدار $\frac{dy}{dx}$ به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است ؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

۲۰

$$x = \frac{\pi}{4} \rightarrow u = \sin^2 \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{2}{2\sqrt{2u}} - \frac{-1}{u^2} \right) \times (2 \cos x \sin x + 2 \sin 2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{\sqrt{2u}} + \frac{1}{u^2} \right) \times (2 \sin 2x) \quad y' \left(\frac{\pi}{4} \right) = (1+4) \times (2 \sin \frac{\pi}{2}) = 10$$

سراسری تجربی ۸۸ - خارج از کشور

در تابع $f(x) = \frac{x}{x-1}$ روی بازه $[2, 2/0.2]$ آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر x ، از آهنگ لحظه ای تغییر

تابع در $x=2$ چقدر بیشتر است؟

$\frac{2}{51}$ (۴) $\frac{1}{51}$ (۳) $\frac{1}{101}$ (۲) $\frac{1}{202}$ (۱)

۲۱

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 2/0.2 \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2/0.2) - f(2)}{2/0.2 - 2} = \frac{101 - 2}{0.02} = \frac{99}{0.02} = \frac{-50}{51} \quad f'(x) = \frac{-1-0}{(x-1)^2} \rightarrow f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$f'(2) = \frac{-1}{(2-1)^2} = -1 \quad \frac{-50}{51} - (-1) = \frac{-50}{51} + 1 = \frac{1}{51}$$

سراسری تجربی ۸۸ - خارج از کشور

اگر $u = x + \sqrt{x}$ و $y = \tan^2(\pi u)$ باشد، آنگاه مقدار $\frac{dy}{dx}$ به ازای $x = \frac{1}{4}$ کدام است؟

8π (۴) 4π (۳) -4π (۲) -8π (۱)

۲۲

$$x = \frac{1}{4} \rightarrow u = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = 2\pi(1 + \tan^2 \pi u)(\tan \pi u) \times \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$y' \left(\frac{1}{4} \right) = 2\pi \left(1 + \tan^2 \frac{3\pi}{4}\right) \left(\tan \frac{3\pi}{4}\right) \times \left(1 + \frac{1}{1}\right) = 2\pi(1+1)(-1) \times (2) = -8\pi$$

سراسری تجربی ۸۷

در تابع $f(x) = \sqrt{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر روی بازه $[2/25, 2/56]$ از آهنگ آنی، در شروع این بازه، چقدر کمتر است؟

$\frac{1}{31}$ (۴) $\frac{1}{62}$ (۳) $\frac{2}{93}$ (۲) $\frac{1}{93}$ (۱)

$$f(x) = \sqrt{x} \quad x_1 = 2/25, \quad x_2 = 2/56 \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2/56) - f(2/25)}{2/56 - 2/25} = \frac{1/6 - 1/5}{0/31} = \frac{0/1}{0/31} = \frac{10}{31}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow f'(2/25) = \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} - \frac{10}{31} = \frac{31 - 30}{93} = \frac{1}{93}$$

۲۳

سراسری تجربی ۸۷ - خارج از کشور

در تابع با ضابطه $f(x) = x^3$ ، آهنگ متوسط تغییر این تابع وقتی $x = 3$ و $\Delta x = 0/1$ ، از آهنگ لحظه ای تغییر تابع در نقطه $x = 3$ ، چقدر بیشتر است؟

$0/91$ (۴) $0/62$ (۳) $0/42$ (۲) $0/31$ (۱)

$$f(x) = x^3 \rightarrow x = 3, \quad \Delta x = 0/1 \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3/1) - f(3)}{0/1} = \frac{(3/1)^3 - (3)^3}{0/1} = \frac{(3/1 - 3)(3/1^2 + 9/3 + 9)}{0/1} = 27/91$$

$$f'(x) = 3x^2 \rightarrow f(3) = 27 \quad 27/91 - 27 = 0/91$$

۲۴

سراسری تجربی ۸۶

در تابع با ضابطه $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر از عدد ۲ به عدد $2+h$ تغییر کند، برابر $\frac{8}{9}$ است. h ، کدام است؟

3 (۴) $2/5$ (۳) 2 (۲) $1/5$ (۱)

نکته: آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازه $[x_1, x_2]$ برابر است با: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 2+h, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8}{9}$$

۲۵

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{2+h + \frac{1}{2+h} - 2 - \frac{1}{2}}{h} = \frac{h + \frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h}$$

$$\frac{h + \frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} = \frac{8}{9} \rightarrow 9h + \frac{9}{2+h} - \frac{9}{2} = \frac{8h}{1} \rightarrow h + \frac{9}{2+h} - \frac{9}{2} = 0 \rightarrow 2h^2 - 9h = 0 \rightarrow \begin{cases} h = \frac{9}{2} \\ h = 0 \end{cases}$$

سراسری تجربی ۸۶

مقدار مشتق تابع $y = \tan^3 x - \cot^2 x$ در نقطه $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

- ۴ (۴) $\frac{8}{3}$ (۳) ۲ (۲) $\frac{4}{3}$ (۱)

۲۶

$$y = \tan^3 x - \cot^2 x \rightarrow y' = 3(\tan^2 x)(1 + \tan^2 x) + 2(\cot x)(-\csc^2 x)$$

$$y'(\frac{\pi}{6}) = 3(1 + \tan^2 \frac{\pi}{6})(\tan^2 \frac{\pi}{6}) + 2(1 + \cot^2 \frac{\pi}{6})(-\cot \frac{\pi}{6}) = 3(1 + \frac{1}{3})(\frac{1}{3}) + 2(1 + \frac{1}{3})(-\frac{1}{3}) = 4$$

سراسری تجربی ۸۶ - خارج از کشور

مقدار مشتق $y = \sin x \cos^3 x$ در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

- ۲ (۴) ۱ (۳) -۱ (۲) -۲ (۱)

۲۷

روش اول:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$y = \sin x \cos^3 x = \frac{1}{2} [\sin 4x - \sin 2x] \rightarrow y' = \frac{1}{2} [4 \cos 4x - 2 \cos 2x]$$

$$y'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} [4 \cos \pi - 2 \cos \frac{\pi}{2}] = \frac{1}{2} [4(-1) - 2(0)] = -2$$

$$y = \sin x \cos^3 x \rightarrow y' = \cos x \cos^3 x - 3 \sin x \cos^2 x \sin x$$

$$y'(\frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{4} \cos^3 \frac{\pi}{4} - 3 \sin \frac{\pi}{4} \cos^2 \frac{\pi}{4} = (\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})^3 - 3(\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = -2$$

روش دوم:

سراسری تجربی ۸۶ - خارج از کشور

در تابع با ضابطه $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$ تفاضل آهنگ لحظه ای در نقطه $a + \frac{h}{2}$ از آهنگ متوسط تغییر تابع

۲۸

وقتی متغیر x از عدد a به عدد $a + h$ تغییر کند، کدام است؟

- ۰ (۴) $3h$ (۳) $2h$ (۲) h (۱)

$f(x) = 3x^2 + 4x - 2 \quad x_1 = a, \quad x_2 = a + h$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{3(a+h)^2 + 4(a+h) - 2 - 3a^2 + 4a - 2}{h} = 3h + 6a + 4$ $f'(x) = 6x + 4 \longrightarrow f'(a + \frac{h}{2}) = 6(a + \frac{h}{2}) + 4 = 6a + 3h + 4$	
<p style="text-align: right;">سراسری تجربی ۸۵</p> <p>اگر $f(x) = \sqrt{2} \sin \pi x^2$ باشد، آنگاه $f'(\frac{1}{\sqrt{6}})$ کدام است؟</p> <p style="text-align: center;"> $\pi\sqrt{3}$ (۴) $\pi\sqrt{2}$ (۳) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ (۱) </p> $f(x) = \sqrt{2} \sin \pi x^2 \longrightarrow u = 2 \sin \pi x^2 \longrightarrow u' = 4\pi x \cos \pi x^2$ $u(\frac{1}{\sqrt{6}}) = 2 \sin \pi (\frac{1}{\sqrt{6}})^2 = 1 \quad u'(\frac{1}{\sqrt{6}}) = 4\pi (\frac{1}{\sqrt{6}}) \cos \pi (\frac{1}{\sqrt{6}})^2 = \pi\sqrt{2}$ $f(x) = \sqrt{u} \longrightarrow f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$	۲۹
<p style="text-align: right;">سراسری تجربی ۸۵ - خارج از کشور</p> <p>اندازه مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \sqrt{3 + 2 \cos \frac{\pi}{x}}$، به ازای $x = 3$ کدام است؟</p> <p style="text-align: center;"> $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{1}{12}$ (۱) </p> $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \sqrt{3 + 2 \cos \frac{\pi}{x}} \longrightarrow u = 3 + 2 \cos \frac{\pi}{x} \longrightarrow u' = \frac{2\pi}{x^2} \sin \frac{\pi}{x}$ $u(3) = 3 + 2 \cos \frac{\pi}{3} = 3 + 1 = 4 \quad u'(3) = \frac{2\pi}{9} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$ $f(x) = \sqrt{u} \longrightarrow f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \times \frac{\pi\sqrt{3}}{9} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$	۳۰
<p style="text-align: right;">سراسری تجربی ۸۴</p> <p>آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x^2 + 144}$ نسبت به متغیر x روی بازه ای از $x_1 = 5$ تا $x_2 = 9$ کدام است؟</p> <p style="text-align: center;"> $0/7$ (۴) $0/6$ (۳) $0/5$ (۲) $0/4$ (۱) </p>	۳۱

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ $f(x) = f(x) = \sqrt{x^2 + 144} \quad x_1 = 5, \quad x_2 = 9$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(9) - f(5)}{9 - 5} = \frac{15 - 13}{4} = \frac{1}{2}$	<p>نکته: آهنگ متوسط تغییر تابع پیوسته f در بازه $[a, b]$ برابر است با:</p>
$M(x, \sqrt{x+8}) \quad O(0,0) \quad T(x) = OM = \sqrt{x^2_M + y^2_M} = \sqrt{x^2 + x + 8}$ $T'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2 + x + 8}} \rightarrow T'(7) = \frac{15}{16}$	<p>سراسری تجربی ۸۴ - خارج از کشور</p> <p>نقطه $M(x, y)$ بر روی منحنی به معادله $y = \sqrt{x+8}$ در حرکت است. T فاصله نقطه M تا مبدأ مختصات است، آهنگ لحظه ای تغییر T در نقطه $x=7$ کدام است؟</p> <p>(۱) $\frac{15}{16}$ (۲) $\frac{15}{8}$ (۳) $\frac{3}{7}$ (۴) $\frac{5}{4}$</p>
$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x} = f'(-1)$ $f'(x) = (1)\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(x-2) \rightarrow f'(-1) = (1) + (-\frac{2}{3})(-3) = 3$	<p>سراسری تجربی ۸۴ - خارج از کشور</p> <p>اگر $f(x) = (x-2)\sqrt[3]{x^2}$ ، حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x}$ کدام است؟</p> <p>(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$</p>
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	<p>سراسری تجربی ۸۳</p> <p>در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر x از ۴ به ۲۵ تغییر کند برابر با آهنگ لحظه ای در نقطه $x = a$ است. a کدام است؟</p> <p>(۱) $11/75$ (۲) $12/25$ (۳) $12/5$ (۴) $13/5$</p> <p>نکته: آهنگ متوسط تغییرات بین دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ روی منحنی عبارتست از $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ و آهنگ لحظه ای در نقطه ای به طول a ، برابر است با $f'(a)$.</p>

$$f(x) = \sqrt{x} \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 25$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(25) - f(4)}{25 - 4} = \frac{5 - 2}{21} = \frac{1}{7}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{7} \rightarrow 2\sqrt{a} = 7 \rightarrow 4a = 49 \rightarrow a = \frac{49}{4} = 12 + \frac{1}{4} = 12\frac{1}{4}$$

سراسری تجربی ۸۳

مقدار مشتق تابع $y = \sin^3 \sqrt{x}$ در نقطه $x = \frac{\pi^2}{9}$ چقدر است؟

$\frac{27}{8\pi}$ (۴)

$\frac{27}{16\pi}$ (۳)

$\frac{9}{8\pi}$ (۲)

$\frac{9}{16\pi}$ (۱)

۳۵

$$y = \sin^3 \sqrt{x} \rightarrow y' = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \cos \sqrt{x} \times \sin^2 \sqrt{x}$$

$$y'(\frac{\pi^2}{9}) = 3 \times \frac{3}{2\pi} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{16\pi}$$

سراسری تجربی ۸۲

اگر $y = \cos \sqrt{2x} + \sin \sqrt{2x}$ باشد، حاصل $\frac{y''}{y}$ برابر کدام است؟

۲ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

$-\sqrt{2}$ (۲)

-۲ (۱)

۳۶

$$y = \cos \sqrt{2x} + \sin \sqrt{2x} \rightarrow y' = -\sqrt{2} \sin \sqrt{2x} + \sqrt{2} \cos \sqrt{2x}$$

$$y'' = -2 \cos \sqrt{2x} - 2 \sin \sqrt{2x} = -2(\cos \sqrt{2x} + \sin \sqrt{2x})$$

$$\frac{y''}{y} = \frac{-2(\cos \sqrt{2x} + \sin \sqrt{2x})}{\cos \sqrt{2x} + \sin \sqrt{2x}} = -2$$

سراسری تجربی ۸۲

اگر $f(x) = x^2 - x$ و $g(x) = \sqrt{2x}$ باشد، حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) \cdot g(2 + \Delta x) - f(2) \cdot g(2)}{\Delta x}$ برابر کدام

۷ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۳۷

است؟

اگر فرض کنیم $h(x) = f(x).g(x) = (f.g)(x)$ آنگاه داریم:

$$h(x) = f(x).g(x) \rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x).g(x+\Delta x) - f(x).g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} = h'(x)$$

$$h(x) = (x^2 - x).\sqrt{2x} \rightarrow h'(x) = (2x - 1)(\sqrt{2x}) + \left(\frac{2}{2\sqrt{2x}}\right)(x^2 - x) \rightarrow h'(2) = 7$$

سراسری تجربی ۸۱

مشتق تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطه $x = 1$ برابر ۳ است. اگر $f(1) = 0$ و $f'(1) = -4$ و $g'(1)$ موجود باشد،

مقدار $g(1)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{4}{3}$
 (۲) $-\frac{3}{4}$
 (۳) $\frac{3}{4}$
 (۴) $\frac{4}{3}$

۳۸

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow y' = \frac{f'(x).g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} \quad y'(1) = 3 \rightarrow \frac{f'(1).g(1) - g'(1)f(1)}{g^2(1)} = 3$$

$$\frac{f'(1) = -4}{f(1) = 0} \rightarrow \frac{-4g(1) - g'(1)(0)}{g^2(1)} = 3 \rightarrow \frac{-4 \times g(1)}{g^2(1)} = 3 \rightarrow 3 \times g(1) = -4 \rightarrow g(1) = -\frac{4}{3}$$

سراسری تجربی ۸۱

اگر $f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}}$ باشد، آنگاه $f'(2)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{5}$
 (۲) $-\frac{1}{10}$
 (۳) $\frac{1}{10}$
 (۴) $\frac{1}{5}$

۳۹

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}} \rightarrow u = \frac{3x-1}{2x+1} \rightarrow u' = \frac{3+2}{(2x+1)^2} = \frac{5}{(2x+1)^2} \rightarrow u'(2) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

$$u(2) = 1 \quad f(u) = \sqrt{u} \rightarrow f'(u) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \rightarrow f'(2) = \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$

سراسری تجربی ۸۰

اگر $f(x) = \sin 2x$ و $g(x) = \sqrt{x}$ باشد، مقدار مشتق تابع $g \circ f$ در $x = \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{\frac{3}{2}}$
 (۲) $\sqrt{\frac{4}{3}}$
 (۳) $\sqrt{\frac{3}{4}}$
 (۴) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

۴۰

$$y = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \longrightarrow y' = f'(x) \times g'(f(x))$$

$$f(x) = \sin 2x \longrightarrow f'(x) = 2 \cos 2x \quad g(x) = \sqrt{x} \longrightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y'(\frac{\pi}{12}) = f'(\frac{\pi}{12}) \times g'(f(\frac{\pi}{12})) = 2 \cos \frac{\pi}{6} \times g'(\frac{1}{2}) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

سراسری تجربی ۸۰

اگر تابع f در x_0 مشتق پذیر و $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = -2$ باشد، مقدار $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$

۴۱

کدام است؟

(۱) $2 - f(x_0)$ (۲) $2 + f(x_0)$ (۳) 2 (۴) -2

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} \xrightarrow{-h = \Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_+(x_0) = -2$$

می دانیم $\Delta x = -h$ است، حال اگر $h \rightarrow 0^-$ به راحتی پی می بریم که $\Delta x = -h$ به 0^+ میل می کند.

سراسری تجربی ۷۸

اندازه مشتق $y = \frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$ به ازای $x = \frac{1}{4}$ ، کدام است؟

(۱) -1 (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 1

۴۲

ابتدا ضابطه تابع را ساده می کنیم. برای این کار در صورت کسر از \sqrt{x} فاکتور می گیریم.

$$y = \frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \longrightarrow y = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{1 - \sqrt{x}} \longrightarrow y = -\sqrt{x} \longrightarrow y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \longrightarrow y'(\frac{1}{4}) = -1$$

سراسری تجربی ۷۷

اگر آهنگ لحظه ای تغییر تابع $f(x)$ در واحد تغییر x ، در نقطه $x = 2$ برابر $-\frac{3}{2}$ باشد، آنگاه حد عبارت

وقتی $h \rightarrow 0$ برابر کدام است؟ $\frac{f(2) - f(2+h)}{h}$

۴۳

(۱) -3 (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) 3

$$f'(2) = -\frac{3}{2} \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{f(2) - f(2+h)}{h} = -\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = -f'(2) = -\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

سراسری تجربی ۷۷

مقدار مشتق $y = \tan^3 2x$ به ازای $x = \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

$\frac{8}{9}$ (۴)

$\frac{8}{3}$ (۳)

$\frac{4}{9}$ (۲)

$\frac{4}{3}$ (۱)

۴۴

$$y = \tan^3 2x \longrightarrow y' = 3 \times 2 \times (1 + \tan^2 2x) \tan^2 2x \longrightarrow y'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 6(1 + \tan^2 \frac{\pi}{6}) \tan^2 \frac{\pi}{6}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 6\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

سراسری تجربی ۷۶

مقدار مشتق عبارت $\frac{2 \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است.

$\sqrt{3}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

۱ (۲)

$-\sqrt{3}$ (۱)

۴۵

ابتدا ضابطه تابع را ساده می کنیم و سپس از آن مشتق می گیریم.

$$y = \frac{2 \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \xrightarrow{1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}} y = 2 \tan^2 x \cdot \cos^2 x = 2 \sin^2 x$$

$$y' = 2 \times 2 \cos x \cdot \sin x = 2 \sin 2x \longrightarrow y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin \frac{2\pi}{6} = 2 \times \sin \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

سراسری تجربی ۷۶

با استفاده از تعریف مشتق، حد عبارت $\frac{4x \cos 2x - \pi}{4x - \pi}$ وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

$1 + \frac{\pi}{2}$ (۴)

$1 - \frac{\pi}{2}$ (۳)

$\frac{\pi}{2}$ (۲)

$-\frac{\pi}{2}$ (۱)

۴۶

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{4x \cos 2x - 0}{4x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{4})}{f(x) - f(\frac{\pi}{4})} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{4})}{4(x - \frac{\pi}{4})} = f'(\frac{\pi}{4})$$

$$f(x) = x \cos 2x \longrightarrow f'(x) = \cos 2x - 2x \sin 2x \longrightarrow f'(\frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{2} - 2(\frac{\pi}{4}) \sin \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

سراسری تجربی ۷۵

مقدار مشتق $y = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴) -۲

۴۷

$$y = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \tan(\frac{\pi}{4} + x) \longrightarrow y' = 1 + \tan^2(\frac{\pi}{4} + x) \longrightarrow y'(\frac{\pi}{12}) = 1 + \tan^2 \frac{\pi}{3} = 4$$

سراسری تجربی ۷۴

اندازه ی مشتق عبارت $\cos^2 \pi \sqrt{x}$ به ازای $x = \frac{1}{16}$ کدام است؟

(۱) -4π (۲) -2π (۳) 2π (۴) 4π

۴۸

$$y = \cos^2 \pi \sqrt{x} \longrightarrow y' = -2(\frac{\pi}{2\sqrt{x}}) \sin \pi \sqrt{x} \cdot \cos \pi \sqrt{x} = -\frac{\pi}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{2} \sin 2\pi \sqrt{x}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \longrightarrow y'(\frac{1}{16}) = -2\pi \sin \frac{\pi}{2} = -2\pi$$

سراسری تجربی ۷۱

مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{2x^2}$ کدام است؟

(۱) $f'(x) = \frac{2x-1}{2x^3}$ (۲) $f'(x) = \frac{2x-1}{x^3}$ (۳) $f'(x) = \frac{2x+1}{x^3}$ (۴) $f'(x) = \frac{2x+1}{2x^3}$

۴۹

$$f(x) = \frac{(2x-1)^2}{2x^2} \longrightarrow f(x) = \frac{1}{2} \times (\frac{2x-1}{x})^2 \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \times 2 \times (\frac{1}{x^2}) \times (\frac{2x-1}{x}) = \frac{2x-1}{x^3}$$

سراسری تجربی ۷۰

اگر $f(x) = \frac{(x+1).h(x)}{(2x+1).h(2x+1)}$ باشد، $f'(-1)$ چه قدر است؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۵۰

$$f(x) = (x+1) \frac{h(x)}{(2x+1) \cdot h(2x+1)} \rightarrow f'(-1) = (1) \times \frac{h(-1)}{(-1) \cdot h(-1)} = -1$$

سراسری ریاضی ۸۳
مشتق تابع $f(x) = \frac{(x-1)\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^4}$ در نقطه $x=1$ کدام است؟

۵۱

$\frac{5}{18}$ (۴)

$\frac{3}{20}$ (۳)

$\frac{1}{8}$ (۲)

$\frac{1}{16}$ (۱)

نکته: مشتق عامل صفر

فرض کنیم بخواهیم از تابع $y = f(x) \cdot g(x)$ در نقطه $x = x_0$ مشتق بگیریم. اگر یکی از عوامل ضرب یعنی f یا g در این نقطه صفر شود، برای مشتق گیری کافی است از عاملی که در $x = x_0$ صفر می شود (عامل صفر) مشتق گرفته و در عامل دیگر ضرب کنیم و سپس جای گذاری کنیم.

$$(f \cdot g)'(x) = 1 \times \frac{\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^4} \rightarrow (f \cdot g)'(1) = 1 \times \frac{\sqrt[5]{3 \cdot 1 - 2}}{(5 \cdot 1 - 3)^4} = \frac{1}{16}$$

همکاران و دانش آموزان عزیز قبل از مطالعه هزینه این جزوات را پرداخت کنید و هزینه آن یک صلوات و یک فاتحه برای روح پدرم است.

با تشکر: سید علی موسوی

خواهشمند است پیشنهادات و نظرات خود را به آدرس تلگرام (۰۹۱۵۳۲۱۵۶۱۴) و یا به ایمیل seyedalimousavi48@gmail.com ارسال فرمائید.

همکاران و دانش آموزان عزیز اگر اشکال تایپی یا راه حل های بهتری داشتید بنده را همراهی کنید. با سپاس فراوان از شما عزیزان