



سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی**

**سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور**

**نمونه سوالات امتحانات ریاضی**

**نرم افزارهای ریاضیات**

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

<p>سراسری تجربی ۹۵</p> <p>دایره ای به مرکز <math>(2, -1)</math> و مماس بر خط به معادله <math>x - y = 1</math>، محور <math>X</math> ها را با کدام طول، قطع می کند؟</p> <p>۱/۵, ۴ (۴)      ۲, ۳ (۳)      ۱, ۴ (۲)      ۱, ۳ (۱)</p> <p><b>نکته:</b> خط مماس بر دایره، در نقطه تماس بر شعاع دایره، عمود است.</p> $x - y = 1 \longrightarrow x - y - 1 = 0 \xrightarrow{O(2, -1)} R = \frac{ 1(1) + (-1)(-1) + (-1) }{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} \longrightarrow R = \sqrt{2}$ $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2 \xrightarrow{y=0} (x - 2)^2 = 1 \longrightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \longrightarrow x = 3 \\ x - 2 = -1 \longrightarrow x = 1 \end{cases}$	<p>۱</p>
<p>سراسری تجربی ۹۵ - خارج از کشور</p> <p>دایره ای محور <math>X</math> ها را در دو نقطه به طول های ۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟</p> <p>۳ (۴)      <math>\sqrt{5}</math> (۳)      ۲ (۲)      <math>\sqrt{3}</math> (۱)</p> <p><math>y = x \longrightarrow O = (\alpha, \alpha) \quad A(1, 0) \quad B(3, 0)</math></p> $OA = OB = R \longrightarrow \sqrt{(1 - \alpha)^2 + (0 - \alpha)^2} = \sqrt{(3 - \alpha)^2 + (0 - \alpha)^2}$ $(1 - \alpha)^2 + \alpha^2 = (3 - \alpha)^2 + \alpha^2 \longrightarrow (1 - \alpha)^2 = (3 - \alpha)^2 \longrightarrow \begin{cases} 1 - \alpha = 3 - \alpha \longrightarrow 1 = 3 \\ 1 - \alpha = -3 + \alpha \longrightarrow \alpha = 2 \end{cases}$ $R = \sqrt{(1 - 2)^2 + (0 - 2)^2} \longrightarrow R = \sqrt{5}$ <p><b>روش دوم:</b> مختصات دو نقطه <math>A</math> و <math>B</math> را در معادله استاندارد دایره قرار داده و مقدار <math>\alpha</math> را به دست آورد.</p>	<p>۲</p>
<p>سراسری تجربی ۹۳</p> <p>به ازای کدام مقدار <math>m</math>، دستگاه معادلات <math>\begin{cases} mx + y = m - 1 \\ 3x + (m - 2)y = 4 - 2m \end{cases}</math> دارای بی شمار جواب است؟</p> <p>۴) هیچ مقدار <math>m</math>      ۳) (۳)      -۱) (۲)      -۲) (۱)</p> $\frac{m}{3} = \frac{1}{m - 2} = \frac{m - 1}{4 - 2m} \longrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \longrightarrow \begin{cases} m = -1 \longrightarrow \frac{-1}{3} = \frac{1}{-3} = \frac{-2}{6} \\ m = 3 \longrightarrow \frac{3}{3} = \frac{1}{1} = \frac{2}{-2} \end{cases}$	<p>۳</p>

سراسری تجربی ۹۳

شعاع دایره گذرا بر سه نقطه  $(0,0)$  و  $(2,1)$  و  $(1,-2)$  ، برابر کدام است ؟

- (۱)  $\frac{1}{2}\sqrt{10}$       (۲)  $\sqrt{3}$       (۳)  $\sqrt{5}$       (۴)  $\frac{1}{2}\sqrt{13}$

**روش اول:** سه نقطه فوق ، سه رأس مثلث قائم الزاویه است که شعاع دایره ، نصف وتر مثلث است .

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(2-1)^2 + (1+2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

۴

**روش دوم:**

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \rightarrow \begin{cases} (0,0) \rightarrow c = 0 \\ (2,1) \rightarrow 2a + b = -5 \\ (1,-2) \rightarrow a - 2b = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \rightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2 + (1)^2 - 4(0)} \rightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

سراسری تجربی ۹۳ - خارج از کشور

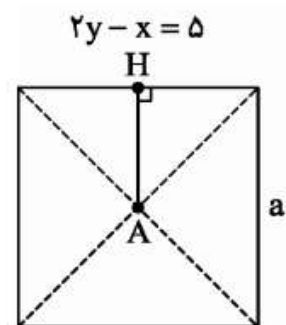
نقطه  $A(3,-1)$  وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله  $2y - x = 5$  است ، مساحت این مربع ، کدام است ؟

- (۱) ۴۰      (۲) ۴۵      (۳) ۷۵      (۴) ۸۰

**نکته:** فاصله محل تلاقی دو قطر تا ضلع مربع برابر نصف طول ضلع مربع است .

$$x - 2y + 5 = 0 \xrightarrow{A(3,-1)} d = \frac{|1(3) + (-2)(-1) + 5|}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$$a = 2d = 4\sqrt{5} \rightarrow S = (4\sqrt{5})^2 = 80$$



۵

سراسری تجربی ۹۳ - خارج از کشور

شعاع دایره به مرکز  $(-2,2)$  و مماس خارج بر دایره  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$  ، کدام است ؟

- (۱)  $2\sqrt{2}$       (۲) ۳      (۳)  $2\sqrt{3}$       (۴) ۴

۶

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \longrightarrow O'$$

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} = -\frac{-2}{2} = 1 \\ -\frac{b}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \end{cases} \quad R' = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 - 4} \longrightarrow R' = 2$$

$$OO' = \sqrt{(1+2)^2 + (-2-2)^2} \longrightarrow OO' = 5$$

$$OO' = R + R' \longrightarrow 5 = R + 2 \longrightarrow R = 3$$

سراسری تجربی ۹۲

دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات  $2x - 2y = 3$  و  $y = x + 1$  هستند، مساحت این مربع کدام است؟

(۱)  $\frac{9}{8}$       (۲)  $\frac{9}{4}$       (۳)  $\frac{25}{8}$       (۴)  $\frac{25}{4}$

**نکته:** بایستی ضرایب  $x$  و  $y$  در هر دو معادله برابر بوده و همچنین معادله دو خط برابر صفر باشد.

$$\begin{cases} 2x - 2y - 3 = 0 \\ 2x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{d||d'} d = a = \frac{|-3 - 2|}{\sqrt{(2)^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{8}} \longrightarrow S = \frac{25}{8}$$

سراسری تجربی ۹۲ - خارج از کشور

مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات  $A(2, 5)$ ،  $B(3, 0)$  و  $C(0, 2)$ ، کدام است؟

(۱) ۶      (۲)  $\frac{6}{5}$       (۳) ۷      (۴)  $\frac{7}{5}$

**نکته:** مساحت مثلث بدون رسم شکل با توجه به جهت ساعتگرد به دست می آوریم.

$$S = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)| = \frac{1}{2} |2(0 - 2) + 3(2 - 5) + 0(5 - 0)|$$

$$= \frac{1}{2} |-4 - 9| = \frac{13}{2} = 6.5$$

سراسری تجربی ۹۱

شعاع دایره ای که از سه نقطه با مختصات  $(2, 1)$  و  $(-2, 4)$  و  $(0, 0)$  می گذرد، کدام است؟

(۱) ۲      (۲)  $\frac{2}{5}$       (۳) ۳      (۴)  $\frac{3}{5}$

**روش اول:** اگر سه نقطه فوق را در دستگاه مختصات رسم کنیم یک مثلث قائم الزاویه حاصل می شود که شعاع دایره،

نصف وتر است. (مرکز وسط وتر است)

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(2+2)^2 + (1-4)^2}}{2} = \frac{5}{2}$$

روش دوم:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \rightarrow \begin{cases} (0,0) \rightarrow c = 0 \\ (2,1) \rightarrow 2a + b = -5 \\ (-2,4) \rightarrow -2a + 4b = -20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -5 \end{cases}$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \rightarrow R = \frac{1}{2} \sqrt{(0)^2 + (-5)^2 - 4(0)} \rightarrow R = \frac{5}{2}$$

سراسری تجربی ۹۱ - خارج از کشور

به ازای کدام مقدار  $m$ ، خط به معادله  $y = mx + 2$  بر دایره  $x^2 + y^2 - 2x = 3$  مماس است؟

(۱)  $0, -\frac{4}{3}$       (۲)  $0, \frac{4}{3}$       (۳)  $1, -\frac{2}{3}$       (۴)  $1, \frac{2}{3}$

**نکته:** در معادله ضمنی مقاطع مخروطی (دایره، بیضی و هذلولی) با استفاده از مشتق می‌توانیم مختصات مرکز را به دست آوریم.

**نکته:** هرگاه خط بر دایره مماس باشد، باید دلتای معادله تقاطع آن‌ها، برابر صفر باشد.

$$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \rightarrow 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \\ f'_y = 0 \rightarrow 2y = 0 \rightarrow y = 0 \end{cases} \rightarrow O(1, 0)$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (0)^2 - 4(-3)} \rightarrow R = 2 \quad \begin{matrix} a & b & c \\ mx - y + 2 = 0 \end{matrix}$$

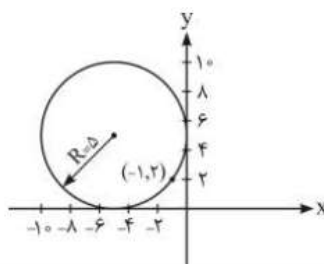
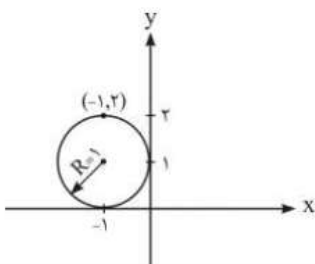
$$2 = \frac{|m(1) + (-1)(0) + 2|}{\sqrt{(m)^2 + (-1)^2}} \rightarrow 2 = \frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+1}} \rightarrow 4 = \frac{(m+2)^2}{m^2+1} \rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{4}{3} \end{cases}$$

سراسری تجربی ۹۰

دایره ای از نقطه  $(-1, 2)$  گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس است. قطر دایره ی بزرگ تر کدام است؟

(۱) ۸      (۲) ۱۰      (۳) ۱۲      (۴) ۱۵

چون دایره از نقطه  $(-1, 2)$  می‌گذرد پس مرکز دایره در ناحیه دوم می‌باشد اگر شعاع دایره،  $R$  در نظر بگیریم:



$$O(-R, R) \longrightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \longrightarrow (x + R)^2 + (y - R)^2 = R^2$$

$$(-1, 2) \longrightarrow (-1 + R)^2 + (2 - R)^2 = R^2 \longrightarrow R^2 - 6R + 5 = 0 \longrightarrow \begin{cases} R = 1 \\ R = 5 \longrightarrow d = 10 \end{cases}$$

سراسری تجربی ۹۰ - خارج از کشور

دایره ای از دو نقطه  $(0, 1)$  و  $(3, 0)$  گذشته و معادله یک قطر آن به صورت  $x - y = 2$  است. شعاع این دایره کدام است؟

۳ (۴)       $\sqrt{5}$  (۳)      ۲ (۲)       $\sqrt{2}$  (۱)

**روش اول:** چون معادله قطر دایره  $x - y = 2$  می باشد، پس مختصات مرکز دایره، روی خط قرار دارد.

$$y = x - 2 \longrightarrow O(\alpha, \alpha - 2) \longrightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \alpha + 2)^2 = R^2$$

$$\begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} (\alpha)^2 + (\alpha - 2)^2 = R^2 \\ (\alpha - 1)^2 + (\alpha - 1)^2 = R^2 \end{cases} \longrightarrow \alpha^2 + (\alpha - 2)^2 = R^2 \quad (I)$$

$$\begin{cases} 3 \\ 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} (\alpha - 3)^2 + (\alpha - 2)^2 = R^2 \\ (\alpha - 3)^2 + (\alpha - 2)^2 = R^2 \end{cases} \longrightarrow (\alpha - 3)^2 + (\alpha - 2)^2 = R^2 \quad (II)$$

$$\alpha^2 + (\alpha - 2)^2 = (\alpha - 3)^2 + (\alpha - 2)^2 \longrightarrow \alpha = 1 \xrightarrow{(I)} R^2 = 1 + (\alpha - 2)^2 \longrightarrow R = \sqrt{5}$$

**روش دوم:** فاصله دو نقطه از مرکز دایره برابر شعاع دایره است. داریم:  $R = OA = OB$

$$OA = OB \longrightarrow \sqrt{(\alpha)^2 + (\alpha - 2)^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (\alpha - 2)^2}$$

$$\sqrt{(\alpha)^2 + (\alpha - 2)^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (\alpha - 2)^2} \longrightarrow \alpha = 1 \longrightarrow O(1, -1)$$

$$R = OA = \sqrt{(1 - 1)^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{5}$$

سراسری تجربی ۸۸

به ازای کدام مقدار  $a$ ، سه خط به معادلات  $y + 2x = 0$  و  $2y + ax + 5 = 0$  و  $y + 3x = a$  متقارب اند؟

۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴) نشدنی

**نکته:** برای این که سه خط متقارب باشند، باید هر سه خط از یک نقطه بگذرند، یعنی باید نقطه تلاقی دو خط، در

معادله خط سومی نیز صدق کند.

$$\begin{cases} y + 2x = 0 \\ 2y + ax + 5 = 0 \\ y + 3x = a \end{cases} \quad (1), (3) \longrightarrow (a, -2a) \xrightarrow{(2)} a^2 - 4a + 5 = 0 \longrightarrow \Delta < 0$$

<p>سراسری تجربی ۸۸ - خارج از کشور</p> <p>فاصله بین دو خط به معادلات <math>y = x\sqrt{3} + 2</math> و <math>\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0</math> کدام است؟</p> <p>(۱) <math>2 - \sqrt{3}</math> (۲) <math>\sqrt{3} - 1</math> (۳) <math>\sqrt{3} + 1</math> (۴) <math>2 + \sqrt{3}</math></p> $\begin{cases} \sqrt{3}x - y = -2 \\ \sqrt{3}x - y = 2\sqrt{3} \end{cases} \rightarrow d = \frac{ -2 - 2\sqrt{3} }{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = \frac{2(1 + \sqrt{3})}{2} = 1 + \sqrt{3}$	<p>۱۴</p>
<p>سراسری تجربی ۸۸ - خارج از کشور</p> <p>دایره ای از دو نقطه <math>(2, 0)</math> و <math>(-2, 0)</math> گذشته و بر خط <math>y = 1</math> مماس است، شعاع این دایره کدام است؟</p> <p>(۱) <math>\frac{3}{2}</math> (۲) <math>\sqrt{5}</math> (۳) <math>\frac{5}{2}</math> (۴) ۳</p> $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \rightarrow \begin{cases} (2, 0) \rightarrow 2a + c = -4 \\ (-2, 0) \rightarrow -2a + c = -4 \\ (0, 1) \rightarrow b + c = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = -4 \\ b = 3 \end{cases}$ $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \rightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{(0)^2 + (3)^2 - 4(-4)} \rightarrow R = \frac{5}{2}$	<p>۱۵</p>
<p>سراسری تجربی ۸۷</p> <p>دو دایره به معادلات <math>x^2 + y^2 - 2x + 6y = 8</math> و <math>x^2 + y^2 + 8x - 4y + 12 = 0</math> نسبت به هم کدام وضع را دارند؟</p> <p>(۱) مماس خارج (۲) مماس داخل (۳) متقاطع (۴) متخارج</p> <p><b>نکته:</b> برای بررسی وضعیت دو دایره، ابتدا مرکز و شعاع های دو دایره را به دست می آوریم و سپس فاصله مرکز های دو دایره یا خط المرکزین (<math>d = OO'</math>) را محاسبه کرده و آن را با <math>R + R'</math> و <math> R - R' </math> مقایسه می کنیم.</p> <p>۱) <math>d = R + R' \rightarrow</math> مماس خارج اند ۲) <math>d =  R - R'  \rightarrow</math> مماس داخل اند ۳) <math>d &gt; R + R' \rightarrow</math> متخارج اند ۴) <math>d &lt;  R - R'  \rightarrow</math> متداخل اند ۵) <math> R - R'  &lt; d &lt; R + R' \rightarrow</math> متقاطع اند ۶) <math>d = OO' \rightarrow</math> فاصله بین مراکز</p> $C: x^2 + y^2 - 2x + 6y - 8 = 0 \rightarrow O \begin{cases} -\frac{a}{2} = -\frac{-2}{2} = 1 \\ -\frac{b}{2} = -\frac{6}{2} = -3 \end{cases} \rightarrow O(1, -3)$ $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 36 + 32} = \frac{1}{2}\sqrt{72} = \frac{1}{2}\sqrt{36 \times 2} = 3\sqrt{2}$	<p>۱۶</p>

$$C': x^2 + y^2 + 8x - 4y + 12 = 0 \longrightarrow O' \begin{cases} -\frac{a}{2} = -\frac{8}{2} = -4 \\ -\frac{b}{2} = -\frac{-4}{2} = 2 \end{cases} \longrightarrow O'(-4, 2)$$

$$R' = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{64 + 16 - 48} = \frac{1}{2} \sqrt{32} = \frac{1}{2} \sqrt{16 \times 2} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} d = OO' = \sqrt{(1+4)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2} \\ R + R' = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \\ |R - R'| = |3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}| = \sqrt{2} \end{cases}$$

چون  $OO' = R + R' = 5\sqrt{2}$  است، نتیجه می‌گیریم که دو دایره مماس خارج اند.

سراسری تجربی ۸۶

دایره به مرکز  $(2, 0)$  و مماس بر نیمساز ربع اول، خط به معادله  $y = 1$  را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟

(۱) ۱، ۳ (۲) ۰، ۴ (۳)  $\frac{1}{2}, \frac{5}{2}$  (۴)  $2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}$

چون دایره به مرکز  $O(2, 0)$  بر نیمساز ربع اول  $(y = x)$  مماس است، پس فاصله مرکز دایره تا خط مماس برابر شعاع دایره است. بنابراین فاصله نقطه  $O(2, 0)$  از خط  $x - y = 0$  را به دست می‌آوریم.

$$R = OH = \frac{|2 - 0|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \xrightarrow{O(2,0)} (x-2)^2 + y^2 = 2 \longrightarrow \text{معادله دایره}$$

معادله تقاطع دایره فوق با خط  $y = 1$  تشکیل داده و ریشه‌های آن را مشخص می‌کنیم.

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 2 \\ y = 1 \end{cases} \longrightarrow (x-2)^2 = 1 \longrightarrow \begin{cases} x-2 = 1 \longrightarrow x = 3 \\ x-2 = -1 \longrightarrow x = 1 \end{cases}$$

پس این دایره، خط به معادله  $y = 1$  را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع می‌کند.

سراسری تجربی ۸۶ - خارج از کشور

دایره‌ای از دو نقطه  $(0, 0)$  و  $(3, 1)$  گذشته و مرکز آن بر خط به معادله  $y = 2x$  قرار دارد. شعاع این دایره کدام است؟

(۱)  $\sqrt{3}$  (۲) ۲ (۳)  $\sqrt{5}$  (۴) ۳

چون مرکز دایره روی خط  $y = 2x$  قرار دارد پس مختصات مرکز دایره به صورت  $O(\alpha, 2\alpha)$  می‌باشد و از طرفی نقاط  $A(0, 0)$  و  $B(3, 1)$  روی دایره هستند پس فاصله مرکز دایره از این دو نقطه یکسان و برابر شعاع دایره است.



$$OA = OB = R \longrightarrow \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (2\alpha - 0)^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2}$$

$$\alpha^2 + 4\alpha^2 = \alpha^2 - 6\alpha + 9 + 4\alpha^2 - 4\alpha + 1 \longrightarrow \alpha = 1 \longrightarrow O(1, 2)$$

$$OA = R = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

سراسری تجربی - ۸۵

به ازای کدام مقدار  $a$ ، دایره به معادله  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0$  بر خط به معادله  $x + 3y = 0$  مماس است؟

۵ (۴)

۳ (۳)

$\frac{5}{2}$  (۲)

$\frac{3}{2}$  (۱)

**نکته:** اگر یک خط بر یک دایره مماس باشد، معادله حاصل از تلاقی آن‌ها، دارای ریشه مضاعف می‌باشد.

(در معادله دایره به جای  $y$ ، قرار دهید و  $\Delta$ ی معادله حاصل را برابر صفر قرار دهید)

۱۹

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0 \\ x + 3y = 0 \longrightarrow y = -\frac{x}{3} \end{cases} \longrightarrow x^2 + \frac{x^2}{9} - 2x - \frac{4x}{3} + a = 0 \xrightarrow{\times 9} 10x^2 - 30x + 9a = 0$$

$$b' = -15 \longrightarrow \Delta' = (-15)^2 - 10(9a) \xrightarrow{\Delta' = 0} 225 - 90a = 0 \longrightarrow a = \frac{225}{90} = \frac{5}{2}$$

**روش دوم: نکته:** هرگاه دایره بر یک خط مماس است، فاصله مرکز دایره از آن خط با شعاع دایره برابر است.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0 \longrightarrow O \begin{cases} -\frac{a}{2} = 1 \\ \frac{b}{2} = -2 \end{cases} \xrightarrow{x+3y=0} OH = d = \frac{|1 - 6 + a|}{\sqrt{1+9}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{4+16-4a} \longrightarrow \sqrt{5-a} = \frac{5}{\sqrt{10}} \longrightarrow 5-a = \frac{25}{10} \longrightarrow a = \frac{5}{2}$$

سراسری تجربی ۸۵ - خارج از کشور

به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$ ، منحنی به معادله  $2x^2 + (a^2 - 7)y^2 + 4y + a = 0$ ، یک دایره است؟

$\emptyset$  (۴)

$\{-3, 3\}$  (۳)

$\{3\}$  (۲)

$\{-3\}$  (۱)

۲۰

**اولاً:** برای آن که منحنی فوق معادله دایره باشد باید ضریب‌های  $x^2$  و  $y^2$  مساوی باشند پس داریم:

$$a^2 - 7 = 2 \longrightarrow a^2 = 9 \longrightarrow a = \pm 3$$

**ثانیاً:** معادله دایره را به صورت  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  تبدیل کرده و شرط  $a^2 + b^2 - 4c > 0$  بررسی می‌کنیم.

$$\text{if } a = 3 \longrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y + 3 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 + 2y + \frac{3}{2} = 0 \longrightarrow 4 - 4\left(\frac{3}{2}\right) = -2$$

$$\text{if } a = -3 \longrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y - 3 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 + 2y - \frac{3}{2} = 0 \longrightarrow 4 - 4\left(-\frac{3}{2}\right) = 10$$

بنابراین تنها جواب  $a = -3$  قابل قبول است.

سراسری تجربی ۸۴

نقطه  $(a, 2a)$  مرکز دایره ای گذرنده بر دو نقطه  $(2, 1)$  و  $(-1, 4)$  است، شعاع این دایره کدام است؟

۳ (۱)      ۴ (۲)       $2\sqrt{2}$  (۳)       $3\sqrt{2}$  (۴)

۲۱

$$\begin{cases} A(2, 1) \\ B(-1, 4) \end{cases} \xrightarrow{O(a, 2a)} OA = OB = R = \sqrt{(2-a)^2 + (1-2a)^2} = \sqrt{(-1-a)^2 + (4-2a)^2} \longrightarrow a = 2$$

$$OA = OB = R = \sqrt{(2-2)^2 + (1-4)^2} = 3$$

سراسری تجربی ۸۴ - خارج از کشور

معادله وتر مشترک دو دایره به مراکز  $(-1, 2)$  و  $(2, 1)$  و به شعاع های مساوی ۲ واحد، کدام است؟

$y = 2x$  (۱)       $y = 3x$  (۲)       $3y = 2x$  (۳)       $2y = 3x$  (۴)

۲۲

ابتدا معادله های دو دایره را به دست آورده و سپس معادله آن ها مساوی هم قرار می دهیم یا از هم کم می کنیم.

$$\begin{cases} C: O(-1, 2), R = 2 \longrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ C': O'(2, 1), R' = 2 \longrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4 \end{cases} \longrightarrow C = C' \text{ or } C - C' = 0$$

$$6x - 2y = 0 \longrightarrow y = 3x$$

سراسری تجربی ۸۳

دو دایره به معادلات  $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 13$  و  $x^2 + y^2 + 2x = 1$  نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

۱) مماس داخل (۱)      ۲) مماس خارج (۲)      ۳) متقاطع (۳)      ۴) متداخل (۴)

۲۳

$$\begin{cases} C: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 13 = 0 \longrightarrow \begin{cases} O(1, -2) \\ R = \frac{1}{2}\sqrt{4+16+52} = 3\sqrt{2} \end{cases} \\ C': x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0 \longrightarrow \begin{cases} O'(-1, 0) \\ R' = \frac{1}{2}\sqrt{4+4} = \sqrt{2} \end{cases} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} d = OO' = 2\sqrt{2} \\ R' + R = 4\sqrt{2} \\ |R - R'| = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$OO' = |R - R'| = 2\sqrt{2} \longrightarrow \text{دو دایره مماس داخل اند.}$$

سراسری تجربی ۸۲

طول شعاع دایره ای که از سه نقطه  $A(-1,0)$  و  $B(3,0)$  و  $C(0,-3)$  می گذرد، کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{3}$       (۲) ۲      (۳)  $\sqrt{5}$       (۴) ۳

مختصات سه نقطه در معادله دایره صدق می کند.

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \rightarrow \begin{cases} A(-1,0) \rightarrow 1 - a + c = 0 \\ B(3,0) \rightarrow 9 + 3a + c = 0 \\ C(0,-3) \rightarrow 9 - 3b + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ c = -3 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0 \rightarrow R = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (2)^2 - 4(-3)} = \sqrt{5}$$

۲۴

سراسری تجربی ۸۰

دو دایره به معادلات  $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 1$  و  $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0$  نسبت به یکدیگر چگونه اند؟

- (۱) مماس خارجی      (۲) مماس داخلی      (۳) متقاطع در دو نقطه      (۴) یکی خارج دیگری

$$\begin{cases} C: x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} O(2, -2) \\ R = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 16 + 4} = 3 \end{cases} \\ C': x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0 \rightarrow \begin{cases} O'(2, -4) \\ R' = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 64 - 76} = 1 \end{cases} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} OO' = 2 \\ R' + R = 4 \\ |R - R'| = 2 \end{cases}$$

$OO' = |R - R'| = 2 \rightarrow$  لذا دو دایره مماس داخل اند.

۲۵

سراسری تجربی ۷۹

فاصله نقطه ای واقع بر نیمساز ناحیه دوم از خط به معادله  $3y - 2x + 4 = 0$  برابر  $3\sqrt{13}$  واحد است. عرض آن نقطه کدام است؟

(۱) ۵      (۲) ۶      (۳) ۷      (۴) ۸

$$y = -x \rightarrow A \begin{vmatrix} a \\ -a \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} a & b & c \\ -2x + 3y + 4 = 0 \end{matrix} \rightarrow d = \frac{|-2(a) + 3(-a) + 4|}{\sqrt{(-2)^2 + (3)^2}} = \frac{|-5a + 4|}{\sqrt{13}}$$

$$3\sqrt{13} = \frac{|-5a + 4|}{\sqrt{13}} \rightarrow |-5a + 4| = 39 \rightarrow -5a + 4 = \pm 39 \rightarrow \begin{cases} a = -7 \rightarrow y = 7 \\ a = \frac{43}{5} \end{cases}$$

۲۶

<p>سراسری تجربی ۷۸</p> <p>معادلات دو ضلع از یک مربع به صورت های <math>y = 2x</math> و <math>2y - 4x = 5</math> می باشند، مساحت مربع کدام است؟</p> <p>(۱) <math>\frac{3}{4}</math> (۲) <math>\frac{4}{5}</math> (۳) <math>\frac{5}{4}</math> (۴) <math>\frac{6}{5}</math></p> <p> <math display="block">\begin{cases} -4x + 2y = 0 \\ -4x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \rightarrow d = \frac{ -5 - 0 }{\sqrt{(-4)^2 + (2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{20}}</math> <math display="block">S = \left(\frac{5}{\sqrt{20}}\right)^2 = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}</math> </p>	<p>۲۷</p>
<p>سراسری تجربی ۷۸</p> <p>دو دایره به معادلات <math>(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5</math> و <math>x^2 + y^2 + 2y = 0</math> نسبت به هم چگونه اند؟</p> <p>(۱) مماس داخلی (۲) مماس خارجی (۳) متخارج (۴) متقاطع</p> <p> <math display="block">\begin{cases} C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5 \rightarrow \begin{cases} O(1, -2) \\ R = \sqrt{5} \end{cases} \\ C': x^2 + y^2 + 2y = 0 \rightarrow \begin{cases} O'(0, -1) \\ R' = \frac{1}{2}\sqrt{4} = 1 \end{cases} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d = OO' = \sqrt{2} \\ R' + R = 1 + \sqrt{5} \\  R - R'  = \sqrt{5} - 1 \end{cases}</math> </p> <p><math> R - R'  &lt; OO' &lt; R + R' \rightarrow</math> پس دو دایره متقاطع اند.</p>	<p>۲۸</p>
<p>سراسری تجربی ۷۷</p> <p>چه رابطه ای بین <math>a</math> و <math>b</math> و <math>c</math> وجود دارد تا دستگاه <math>\begin{cases} ax - by = 0 \\ (a+b)x - cy = 0 \end{cases}</math> جواب های غیر صفر داشته باشد؟</p> <p>(۱) <math>b^2 = ab + ac</math> (۲) <math>ac = b^2 - c^2</math> (۳) <math>b^2 = ac - ab</math> (۴) <math>ac = b^2 + c^2</math></p> <p><math>\begin{vmatrix} a &amp; -b \\ a+b &amp; -c \end{vmatrix} = 0 \rightarrow b^2 = ac - ab</math></p>	<p>۲۹</p>
<p>سراسری تجربی ۷۶</p> <p>شعاع دایره ای که از دو نقطه <math>(1, 2)</math> و <math>(3, 0)</math> گذشته و مرکز تقارن آن روی خط به معادله <math>y = 2x - 1</math> باشد، کدام است؟</p> <p>(۱) <math>2\sqrt{2}</math> (۲) <math>\sqrt{5}</math> (۳) <math>\sqrt{10}</math> (۴) <math>\sqrt{13}</math></p> <p>می دانیم مرکز تقارن دایره، مرکز دایره است و همچنین فاصله دو نقطه از مرکز دایره، برابر شعاع دایره است.</p>	<p>۳۰</p>

$$\begin{cases} A(1, 2) \\ B(3, 0) \end{cases} \xrightarrow{O \in y=2x-1} O(\alpha, 2\alpha-1)$$

$$OA = OB = R = \sqrt{(1-\alpha)^2 + (2-2\alpha+1)^2} = \sqrt{(3-\alpha)^2 + (0-2\alpha+1)^2} \longrightarrow \alpha = 0$$

$$OA = OB = R = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0+1)^2} = \sqrt{10}$$

سراسری تجربی ۷۴

صفحه ای بر محور سطح مخروطی است، مقطع آن دو، کدام است؟

- ۳۱ (۱) سهمی (۲) دایره (۳) هذلولی (۴) دو خط متقاطع
- نکته:** هر صفحه ای عمود بر یک سطح مخروطی دارای یک مقطع دایره شکل خواهد بود.

سراسری تجربی ۷۴

دایره به معادله  $a(x^2 + y^2) + b(x + y) = 0$  از نقطه  $(1, 1)$  می گذرد، شعاع دایره چه قدر است؟

- ۳۲ (۱)  $\sqrt{2}$  (۲)  $\frac{b}{a}$  (۳)  $a\sqrt{2}$  (۴)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

چون دایره از نقطه  $(1, 1)$  می گذرد، پس مختصات آن در معادله دایره صدق می کند. داریم:

$$a(x^2 + y^2) + b(x + y) = 0 \xrightarrow{(1,1)} a(1+1) + b(1+1) = 0 \longrightarrow a = -b$$

$$x^2 + y^2 - x - y = 0 \longrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \longrightarrow R^2 = \frac{1}{2} \longrightarrow R = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

همکاران و دانش آموزان عزیز، تست هائی که در اختیار شما قرار گرفته است، زحمات چندین ساله بنده می باشد، به همین خاطر قبل از مطالعه هزینه این جزوات را پرداخت کنید و هزینه آن یک صلوات و یک فاتحه برای روح پدر عزیزم است.

با تشکر: سید علی موسوی

خواهشمند است پیشنهادات و نظرات خود را به آدرس تلگرام (۰۹۱۵۳۲۱۵۶۱۴) و یا به ایمیل [seyedalimousavi48@gmail.com](mailto:seyedalimousavi48@gmail.com) ارسال فرمائید.

همکاران و دانش آموزان عزیز اگر اشکال تایپی یا راه حل های بهتری داشتید بنده را همراهی کنید.

با سپاس فراوان از شما عزیزان