



RIAZISARA

www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:

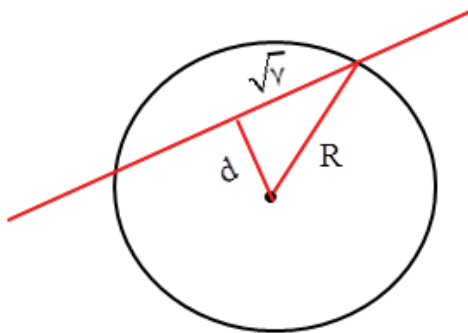


<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

سراسری تجربی ۹۸ - خارج از کشور

نقطه $A(-1, 4)$ مرکز یک دایره است که بر روی خط $2x - 3y + 1 = 0$ وترى به طول $2\sqrt{7}$ جدا می کند. این دایره خط $y = 2$ را با کدام طول، قطع می کند.

$$(1) \quad 3, -5 \quad (2) \quad 2, -4 \quad (3) \quad -1 \pm \sqrt{2} \quad (4) \quad -1 \pm \sqrt{3}$$



$$d = \frac{|-2 - 12 + 1|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

$$R^2 = (\sqrt{13})^2 + (\sqrt{7})^2 = 13 + 7 = 20$$

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 20 \xrightarrow{y=2}$$

$$(x+1)^2 + 4 = 20 \longrightarrow (x+1)^2 = 16$$

$$x+1 = \pm 4 \longrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -5 \end{cases}$$

۱

سراسری تجربی ۹۷

فاصله نقطه $M(x, y)$ از نقطه $A(3, 6)$ ، دو برابر فاصله آن از مبدأ مختصات است. بزرگترین وتر از مکان نقاط M کدام است؟

$$(1) \quad 2\sqrt{3} \quad (2) \quad 2\sqrt{5} \quad (3) \quad 4\sqrt{3} \quad (4) \quad 4\sqrt{5}$$

$$MA = 2OM \longrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(x-3)^2 + (y-6)^2 = 4x^2 + 4y^2 \longrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 = 4x^2 + 4y^2$$

$$3x^2 + 3y^2 + 6x + 12y - 45 = 0 \longrightarrow x^2 + y^2 + 2x + 4y - 15 = 0$$

$$O \begin{cases} f'_x = 0 \longrightarrow 2x + 2 = 0 \longrightarrow x = -1 \\ f'_y = 0 \longrightarrow 2y + 4 = 0 \longrightarrow y = -2 \end{cases} \longrightarrow O \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

$$R = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 - (-15)} = \sqrt{1 + 4 + 15} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

$$2R = 4\sqrt{5}$$

۲

سراسری تجربی ۹۷ - خارج از کشور

دایره گذرا بر نقطه $(1, -2)$ ، بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع آن کدام است؟

$$(1) \quad 1, 4 \quad (2) \quad 1, 5 \quad (3) \quad 2, 4 \quad (4) \quad 2, 5$$

۳

$$O \begin{cases} R \\ -R \end{cases} \longrightarrow (x-R)^2 + (y+R)^2 = R^2$$

$$\begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases} \longrightarrow (1-R)^2 + (-2+R)^2 = R^2 \longrightarrow 1-2R+R^2 + 4-4R+R^2 = R^2$$

$$R^2 - 6R + 5 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} R = 1 \\ R = 5 \end{cases}$$

سراسری تجربی ۹۵

دایره ای به مرکز $(2, -1)$ و مماس بر خط به معادله $x - y = 1$ ، محور x ها را با کدام طول، قطع می کند؟

۱، ۳ (۱) ۱، ۴ (۲) ۲، ۳ (۳) ۱/۵، ۴ (۴)

نکته: خط مماس بر دایره، در نقطهٔ تماس بر شعاع دایره، عمود است.

$$x - y = 1 \longrightarrow x - y - 1 = 0 \xrightarrow{O(2,-1)} R = \frac{|1(1) + (-1)(-1) + (-1)|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} \longrightarrow R = \sqrt{2}$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 2 \xrightarrow{y=0} (x-2)^2 = 1 \longrightarrow \begin{cases} x-2 = 1 \longrightarrow x = 3 \\ x-2 = -1 \longrightarrow x = 1 \end{cases}$$

سراسری تجربی ۹۵ - خارج از کشور

دایره ای محور x ها را در دو نقطه به طول های ۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیمساز ربع اول است.

شعاع این دایره کدام است؟

۳ (۴) $\sqrt{5}$ (۳) ۲ (۲) $\sqrt{3}$ (۱)

$$y = x \longrightarrow O = (\alpha, \alpha) \quad A(1, 0) \quad B(3, 0)$$

$$OA = OB = R \longrightarrow \sqrt{(1-\alpha)^2 + (0-\alpha)^2} = \sqrt{(3-\alpha)^2 + (0-\alpha)^2}$$

$$(1-\alpha)^2 + \alpha^2 = (3-\alpha)^2 + \alpha^2 \longrightarrow (1-\alpha)^2 = (3-\alpha)^2 \longrightarrow \begin{cases} 1-\alpha = 3-\alpha \longrightarrow 1 = 3 \\ 1-\alpha = -3+\alpha \longrightarrow \alpha = 2 \end{cases}$$

$$R = \sqrt{(1-2)^2 + (0-2)^2} \longrightarrow R = \sqrt{5}$$

روش دوم: مختصات دو نقطه A و B را در معادلهٔ استاندارد دایره قرار داده و مقدار α را به دست می آوریم.

سراسری تجربی ۹۳

به ازای کدام مقدار m ، دستگاه معادلات $\begin{cases} mx + y = m - 1 \\ 3x + (m - 2)y = 4 - 2m \end{cases}$ ، دارای بی شمار جواب است؟

۱ (۱) -۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) هیچ مقدار m

نکته: در صورتی دستگاه دارای بی شمار جواب است که دو خط بر هم منطبق باشند یعنی:

$$\frac{m}{3} = \frac{1}{m-2} = \frac{m-1}{4-2m} \rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = -1 \rightarrow \frac{-1}{3} = \frac{1}{-3} = \frac{-2}{6} \\ m = 3 \rightarrow \frac{3}{3} = \frac{1}{1} \neq \frac{2}{-2} \end{cases}$$

سراسری تجربی ۹۳

شعاع دایره گذرا بر سه نقطه $(0,0)$ و $(2,1)$ و $(1,-2)$ ، برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) $\frac{1}{2}\sqrt{13}$

روش اول: سه نقطه فوق، سه رأس مثلث قائم الزاویه است که شعاع دایره، نصف وتر مثلث است.

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(2-1)^2 + (1+2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

روش دوم:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \rightarrow \begin{cases} (0,0) \rightarrow c = 0 \\ (2,1) \rightarrow 2a + b = -5 \\ (1,-2) \rightarrow a - 2b = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \rightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2 + (1)^2 - 4(0)} \rightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

سراسری تجربی ۹۳ - خارج از کشور

نقطه $A(3,-1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله $2y - x = 5$ است، مساحت این مربع، کدام است؟

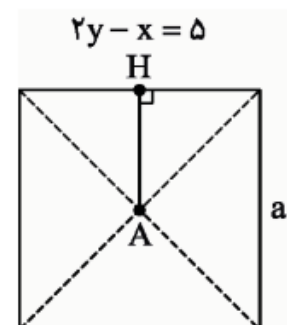
- (۱) ۴۰ (۲) ۴۵ (۳) ۷۵ (۴) ۸۰

نکته: فاصله محل تلاقی دو قطر تا ضلع مربع برابر نصف طول ضلع مربع است.

$$x - 2y + 5 = 0 \xrightarrow{A(3,-1)} d = \frac{|1(3) + (-2)(-1) + 5|}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2}}$$

$$d = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$$a = 2d = 4\sqrt{5} \rightarrow S = (4\sqrt{5})^2 = 80$$



سراسری تجربی ۹۳ - خارج از کشور

شعاع دایره به مرکز $(-2, 2)$ و مماس خارج بر دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ ، کدام است ؟

$$4 \quad (4) \quad 2\sqrt{3} \quad (3) \quad 3 \quad (2) \quad 2\sqrt{2} \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \longrightarrow O' \begin{cases} -\frac{a}{2} = -\frac{-2}{2} = 1 \\ -\frac{b}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \end{cases} \quad R' = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 - 4} \longrightarrow R' = 2$$

$$OO' = \sqrt{(1+2)^2 + (-2-2)^2} \longrightarrow OO' = 5$$

$$OO' = R + R' \longrightarrow 5 = R + 2 \longrightarrow R = 3$$

۹

سراسری تجربی ۹۲

دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $2x - 2y = 3$ و $y = x + 1$ هستند ، مساحت این مربع کدام است ؟

$$\frac{25}{4} \quad (4) \quad \frac{25}{8} \quad (3) \quad \frac{9}{4} \quad (2) \quad \frac{9}{8} \quad (1)$$

نکته: بایستی ضرایب X و Y در هر دو معادله برابر بوده و همچنین معادله دو خط برابر صفر باشد .

$$\begin{cases} 2x - 2y - 3 = 0 \\ 2x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{d||d'} d = a = \frac{|-3-2|}{\sqrt{(2)^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{8}} \longrightarrow S = \frac{25}{8}$$

۱۰

سراسری تجربی ۹۲ - خارج از کشور

مساحت مثلثی با سه راس به مختصات $A(2, 5)$ ، $B(3, 0)$ و $C(0, 2)$ ، کدام است ؟

$$7/5 \quad (4) \quad 7 \quad (3) \quad 6/5 \quad (2) \quad 6 \quad (1)$$

نکته: مساحت مثلث بدون رسم شکل با توجه به جهت ساعتگرد به دست می آوریم .

$$S = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)| = \frac{1}{2} |2(0 - 2) + 3(2 - 5) + 0(5 - 0)|$$

$$= \frac{1}{2} |-4 - 9| = \frac{13}{2} = 6/5$$

۱۱

سراسری تجربی ۹۱

شعاع دایره ای که از سه نقطه با مختصات $(2, 1)$ و $(-2, 4)$ و $(0, 0)$ می گذرد ، کدام است ؟

$$3/5 \quad (4) \quad 3 \quad (3) \quad 2/5 \quad (2) \quad 2 \quad (1)$$

روش اول: اگر سه نقطه فوق را در دستگاه مختصات رسم کنیم یک مثلث قائم الزاویه حاصل می شود که شعاع دایره ، نصف وتر است . (مرکز وسط وتر است)

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(2+2)^2 + (1-4)^2}}{2} = \frac{5}{2}$$

۱۲

روش دوم:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \longrightarrow \begin{cases} (0,0) \longrightarrow c = 0 \\ (2,1) \longrightarrow 2a + b = -5 \\ (-2,4) \longrightarrow -2a + 4b = -20 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -5 \end{cases}$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \longrightarrow R = \frac{1}{2} \sqrt{(0)^2 + (-5)^2 - 4(0)} \longrightarrow R = \frac{5}{2}$$

سراسری تجربی ۹۱ - خارج از کشور

به ازای کدام مقدار m ، خط به معادله $y = mx + 2$ بر دایره $x^2 + y^2 - 2x = 3$ مماس است؟

$$1, \frac{2}{3} \quad (4) \quad 1, -\frac{2}{3} \quad (3) \quad 0, \frac{4}{3} \quad (2) \quad 0, -\frac{4}{3} \quad (1)$$

نکته: در معادله ضمنی مقاطع مخروطی (دایره، بیضی و هذلولی) با استفاده از مشتق می توانیم مختصات مرکز را به دست آوریم.

نکته: هرگاه خط بر دایره مماس باشد، باید دلتای معادله تقاطع آن ها، برابر صفر باشد.

$$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \longrightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \longrightarrow 2x - 2 = 0 \longrightarrow x = 1 \\ f'_y = 0 \longrightarrow 2y = 0 \longrightarrow y = 0 \end{cases} \longrightarrow O(1,0)$$

$$R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - C} = \sqrt{(1)^2 + (0)^2 - (-3)} \longrightarrow R = 2 \quad \begin{matrix} a & b & c \\ mx - y + 2 = 0 \end{matrix}$$

$$2 = \frac{|m(1) + (-1)(0) + 2|}{\sqrt{(m)^2 + (-1)^2}} \longrightarrow 2 = \frac{|m + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} \longrightarrow 4 = \frac{(m + 2)^2}{m^2 + 1} \longrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{4}{3} \end{cases}$$

سراسری تجربی ۹۰

دایره ای از نقطه $(-1, 2)$ گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس است. قطر دایره ی بزرگ تر کدام است؟

$$15 \quad (4) \quad 12 \quad (3) \quad 10 \quad (2) \quad 8 \quad (1)$$

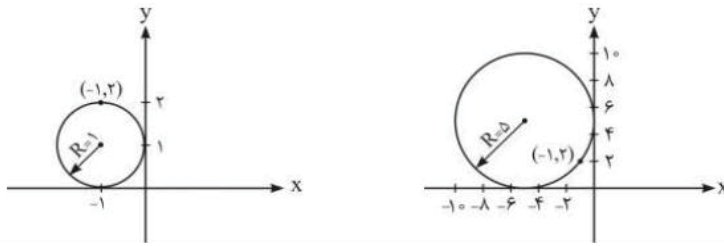
چون دایره از نقطه $(-1, 2)$ می گذرد پس مرکز دایره در ناحیه دوم می باشد اگر شعاع دایره، R در نظر بگیریم:

$$O(-R, R) \longrightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \longrightarrow (x + R)^2 + (y - R)^2 = R^2$$

$$(-1, 2) \longrightarrow (-1 + R)^2 + (2 - R)^2 = R^2 \longrightarrow R^2 - 6R + 5 = 0 \longrightarrow \begin{cases} R = 1 \\ R = 5 \longrightarrow d = 10 \end{cases}$$

۱۳

۱۴



سراسری تجربی ۹۰ - خارج از کشور

دایره ای از دو نقطه (۰, ۱) و (۳, ۰) گذشته و معادله یک قطر آن به صورت $x - y = 2$ است. شعاع این دایره کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) ۳

روش اول: چون معادله قطر دایره $x - y = 2$ می باشد، پس مختصات مرکز دایره، روی خط قرار دارد.

$$y = x - 2 \longrightarrow O(\alpha, \alpha - 2) \longrightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \alpha + 2)^2 = R^2$$

$$\begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \longrightarrow (0 - \alpha)^2 + (1 - \alpha + 2)^2 = R^2 \longrightarrow \alpha^2 + (3 - \alpha)^2 = R^2 \quad (I)$$

$$\begin{cases} 3 \\ 0 \end{cases} \longrightarrow (3 - \alpha)^2 + (0 - \alpha + 2)^2 = R^2 \longrightarrow (3 - \alpha)^2 + (2 - \alpha)^2 = R^2 \quad (II)$$

$$\alpha^2 + (3 - \alpha)^2 = (3 - \alpha)^2 + (2 - \alpha)^2 \longrightarrow \alpha = 1 \xrightarrow{(I)} R^2 = 1 + (3 - 1)^2 \longrightarrow R = \sqrt{5}$$

روش دوم: فاصله دو نقطه از مرکز دایره برابر شعاع دایره است. داریم: $R = OA = OB$

$$OA = OB \longrightarrow \sqrt{(0 - \alpha)^2 + (1 - \alpha + 2)^2} = \sqrt{(3 - \alpha)^2 + (0 - \alpha + 2)^2}$$

$$\sqrt{(\alpha)^2 + (3 - \alpha)^2} = \sqrt{(3 - \alpha)^2 + (-\alpha + 2)^2} \longrightarrow \alpha = 1 \longrightarrow O(1, -1)$$

$$R = OA = \sqrt{(0 - 1)^2 + (1 + 1)^2} = \sqrt{5}$$

سراسری تجربی ۸۸

به ازای کدام مقدار a ، سه خط به معادلات $y + 2x = 0$ و $2y + ax + 5 = 0$ و $y + 3x = a$ متقارب اند؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) نشدنی

نکته: برای این که سه خط متقارب باشند، باید هر سه خط از یک نقطه بگذرند، یعنی بایستی نقطه تلاقی دو خط، در معادله خط سومی نیز صدق کند.

$$\begin{cases} y + 2x = 0 \\ 2y + ax + 5 = 0 \\ y + 3x = a \end{cases} \quad (1), (3) \longrightarrow (a, -2a) \xrightarrow{(2)} a^2 - 4a + 5 = 0 \longrightarrow \Delta < 0$$

<p>سراسری تجربی ۸۸ - خارج از کشور</p> <p>فاصله بین دو خط به معادلات $y = x\sqrt{3} + 2$ و $\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0$ کدام است؟</p> <p>(۱) $2 - \sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3} - 1$ (۳) $\sqrt{3} + 1$ (۴) $2 + \sqrt{3}$</p> $\begin{cases} \sqrt{3}x - y = -2 \\ \sqrt{3}x - y = 2\sqrt{3} \end{cases} \parallel \rightarrow d = \frac{ -2 - 2\sqrt{3} }{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = \frac{2(1 + \sqrt{3})}{2} = 1 + \sqrt{3}$	<p>۱۷</p>
<p>سراسری تجربی ۸۸ - خارج از کشور</p> <p>دایره ای از دو نقطه $(2, 0)$ و $(-2, 0)$ گذشته و بر خط $y = 1$ مماس است، شعاع این دایره کدام است؟</p> <p>(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) ۳</p> $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \rightarrow \begin{cases} (2, 0) \rightarrow 2a + c = -4 \\ (-2, 0) \rightarrow -2a + c = -4 \\ (0, 1) \rightarrow b + c = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = -4 \\ b = 3 \end{cases}$ $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \rightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{(0)^2 + (3)^2 - 4(-4)} \rightarrow R = \frac{5}{2}$	<p>۱۸</p>
<p>سراسری تجربی ۸۷</p> <p>دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 8$ و $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 12 = 0$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟</p> <p>(۱) مماس خارج (۲) مماس داخل (۳) متقاطع (۴) متخارج</p> <p>نکته: برای بررسی وضعیت دو دایره، اولاً: مرکز و شعاع های دو دایره را به دست می آوریم.</p> <p>ثانیاً: فاصله مرکز های دو دایره یا خط الممرکزین ($d = OO'$) را محاسبه کرده و آن را با $R + R'$ و $R - R'$ مقایسه می کنیم.</p> <p>۱) $d = R + R' \rightarrow$ مماس خارج اند</p> <p>۲) $d = R - R' \rightarrow$ مماس داخل اند</p> <p>۳) $d > R + R' \rightarrow$ متخارج اند</p> <p>۴) $d < R - R' \rightarrow$ متداخل اند</p> <p>۵) $R - R' < d < R + R' \rightarrow$ متقاطع اند</p> <p>۶) $d = OO' \rightarrow$ فاصله بین مراکز</p> <p>$C: x^2 + y^2 - 2x + 6y - 8 = 0 \rightarrow O \begin{cases} 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \\ 2y + 6 = 0 \rightarrow y = -3 \end{cases} \rightarrow O(1, -3)$</p> $R = \sqrt{(1)^2 + (-3)^2 - (-8)} = \sqrt{1 + 9 + 8} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$	<p>۱۹</p>

$$C': x^2 + y^2 + 8x - 4y + 12 = 0 \longrightarrow O' \begin{cases} 2x + 8 = 0 \longrightarrow x = -4 \\ 2y - 4 = 0 \longrightarrow y = 2 \end{cases} \longrightarrow O'(-4, 2)$$

$$R' = \sqrt{(-4)^2 + (2)^2 - (12)} = \sqrt{16 + 4 - 12} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$$

$$d = OO' = \sqrt{(1+4)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$$

$$R + R' = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$|R - R'| = |3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}| = \sqrt{2}$$

چون $OO' = R + R' = 5\sqrt{2}$ است، نتیجه می‌گیریم که دو دایره مماس خارج اند.

سراسری تجربی ۸۶

دایره به مرکز $(2, 0)$ و مماس بر نیمساز ربع اول، خط به معادله $y = 1$ را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟

(۱) ۱, ۳ (۲) ۰, ۴ (۳) $\frac{1}{2}, \frac{5}{2}$ (۴) $2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}$

چون دایره به مرکز $O(2, 0)$ بر نیمساز ربع اول $(y = x)$ مماس است، پس فاصله مرکز دایره تا خط مماس برابر شعاع دایره است. بنابراین فاصله نقطه $O(2, 0)$ از خط $x - y = 0$ را به دست می‌آوریم.

$$R = OH = \frac{|2 - 0|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \xrightarrow{O(2,0)} (x-2)^2 + y^2 = 2 \longrightarrow \text{معادله دایره}$$

معادله تقاطع دایره فوق با خط $y = 1$ تشکیل داده و ریشه‌های آن را مشخص می‌کنیم.

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 2 \\ y = 1 \end{cases} \longrightarrow (x-2)^2 = 1 \longrightarrow \begin{cases} x-2 = 1 \longrightarrow x = 3 \\ x-2 = -1 \longrightarrow x = 1 \end{cases}$$

پس این دایره، خط به معادله $y = 1$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع می‌کند.

۲۰

سراسری تجربی ۸۶ - خارج از کشور

دایره‌ای از دو نقطه $(0, 0)$ و $(3, 1)$ گذشته و مرکز آن بر خط به معادله $y = 2x$ قرار دارد. شعاع این دایره کدام است؟

(۱) $\sqrt{3}$ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) ۳

چون مرکز دایره روی خط $y = 2x$ قرار دارد پس مختصات مرکز دایره به صورت $O(\alpha, 2\alpha)$ می‌باشد و از طرفی نقاط $A(0, 0)$ و $B(3, 1)$ روی دایره هستند پس فاصله مرکز دایره از این دو نقطه یکسان و برابر شعاع دایره است.

$$OA = OB = R \longrightarrow \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (2\alpha - 0)^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2}$$

$$\alpha^2 + 4\alpha^2 = \alpha^2 - 6\alpha + 9 + 4\alpha^2 - 4\alpha + 1 \longrightarrow \alpha = 1 \longrightarrow O(1, 2)$$

$$OA = R = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

۲۱

سراسری تجربی - ۸۵

به ازای کدام مقدار a ، دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0$ بر خط به معادله $x + 3y = 0$ مماس است؟

۵ (۴)

۳ (۳)

 $\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۱)

نکته: اگر یک خط بر یک دایره مماس باشد، بایستی معادله حاصل از تلاقی آن ها، ریشه مضاعف داشته باشد.

(در معادله دایره به جای y ، قرار دهید و Δ ی معادله حاصل را برابر صفر قرار دهید)

۲۲

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0 \\ x + 3y = 0 \rightarrow y = -\frac{x}{3} \end{cases} \rightarrow x^2 + \frac{x^2}{9} - 2x - \frac{4x}{3} + a = 0 \xrightarrow{\times 9} 10x^2 - 30x + 9a = 0$$

$$b' = -15 \rightarrow \Delta' = (-15)^2 - 10(9a) \xrightarrow{\Delta' = 0} 225 - 90a = 0 \rightarrow a = \frac{225}{90} = \frac{5}{2}$$

روش دوم: نکته: هرگاه دایره بر یک خط مماس است، فاصله مرکز دایره از آن خط با شعاع دایره برابر است.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0 \rightarrow O \begin{cases} -\frac{a}{2} = 1 \\ \frac{b}{2} = -2 \end{cases} \xrightarrow{x+3y=0} OH = d = \frac{|1-6+0|}{\sqrt{1+9}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{4+16-4a} \rightarrow \sqrt{5-a} = \frac{5}{\sqrt{10}} \rightarrow 5-a = \frac{25}{10} \rightarrow a = \frac{5}{2}$$

سراسری تجربی ۸۵ - خارج از کشور

به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، منحنی به معادله $2x^2 + (a^2 - 7)y^2 + 4y + a = 0$ ، یک دایره است؟

 \emptyset (۴) $\{-3, 3\}$ (۳) $\{3\}$ (۲) $\{-3\}$ (۱)

۲۳

اولاً: برای آن که منحنی فوق معادله دایره باشد باید ضریب های x^2 و y^2 مساوی باشند پس داریم:

$$a^2 - 7 = 2 \rightarrow a^2 = 9 \rightarrow a = \pm 3$$

ثانیاً: معادله دایره را به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ تبدیل کرده و شرط $a^2 + b^2 - 4c > 0$ بررسی می کنیم.

$$\text{if } a = 3 \rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y + 3 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 + 2y + \frac{3}{2} = 0 \rightarrow 4 - 4\left(\frac{3}{2}\right) = -2$$

$$\text{if } a = -3 \rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y - 3 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 + 2y - \frac{3}{2} = 0 \rightarrow 4 - 4\left(-\frac{3}{2}\right) = 10$$

بنابراین تنها جواب $a = -3$ قابل قبول است.

<p>سراسری تجربی ۸۴</p> <p>نقطه $(a, 2a)$ مرکز دایره ای گذرنده بر دو نقطه $(2, 1)$ و $(-1, 4)$ است، شعاع این دایره کدام است؟</p> <p>۳ (۱) ۴ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $3\sqrt{2}$ (۴)</p> $\begin{cases} A(2, 1) \\ B(-1, 4) \end{cases} \xrightarrow{O(a, 2a)} OA = OB = R = \sqrt{(2-a)^2 + (1-2a)^2} = \sqrt{(-1-a)^2 + (4-2a)^2} \longrightarrow a = 2$ $OA = OB = R = \sqrt{(2-2)^2 + (1-4)^2} = 3$	<p>۲۴</p>
<p>سراسری تجربی ۸۴ - خارج از کشور</p> <p>معادله وتر مشترک دو دایره به مراکز $(-1, 2)$ و $(2, 1)$ و به شعاع های مساوی ۲ واحد، کدام است؟</p> <p>$y = 2x$ (۱) $y = 3x$ (۲) $3y = 2x$ (۳) $2y = 3x$ (۴)</p> <p>ابتدا معادله های دو دایره را به دست آورده و سپس معادله آن ها مساوی هم قرار می دهیم یا از هم کم می کنیم.</p> $\begin{cases} C: O(-1, 2), R = 2 \longrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ C': O'(2, 1), R' = 2 \longrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4 \end{cases} \longrightarrow C = C' \text{ or } C - C' = 0$ $6x - 2y = 0 \longrightarrow y = 3x$	<p>۲۵</p>
<p>سراسری تجربی ۸۳</p> <p>دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 13$ و $x^2 + y^2 + 2x = 1$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟</p> <p>مماس داخل (۱) مماس خارج (۲) متقاطع (۳) متداخل (۴)</p> $\begin{cases} C: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 13 = 0 \longrightarrow \begin{cases} O(1, -2) \\ R = \frac{1}{2}\sqrt{4+16+52} = 3\sqrt{2} \end{cases} \\ C': x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0 \longrightarrow \begin{cases} O'(-1, 0) \\ R' = \frac{1}{2}\sqrt{4+4} = \sqrt{2} \end{cases} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} d = OO' = 2\sqrt{2} \\ R' + R = 4\sqrt{2} \\ R - R' = 2\sqrt{2} \end{cases}$ <p>$OO' = R - R' = 2\sqrt{2} \longrightarrow$ دو دایره مماس داخل اند.</p>	<p>۲۶</p>
<p>سراسری تجربی ۸۲</p> <p>طول شعاع دایره ای که از سه نقطه $A(-1, 0)$ و $B(3, 0)$ و $C(0, -3)$ می گذرد، کدام است؟</p> <p>۳ (۴) $\sqrt{5}$ (۳) ۲ (۲) $\sqrt{3}$ (۱)</p> <p>مختصات سه نقطه در معادله دایره صدق می کند.</p>	<p>۲۷</p>

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \rightarrow \begin{cases} A(-1,0) \rightarrow 1 - a + c = 0 \\ B(3,0) \rightarrow 9 + 3a + c = 0 \\ C(0,-3) \rightarrow 9 - 3b + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ c = -3 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0 \rightarrow R = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (2)^2 - 4(-3)} = \sqrt{5}$$

سراسری تجربی ۸۰

دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 1$ و $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0$ نسبت به یکدیگر چگونه اند؟
 (۱) مماس خارجی (۲) مماس داخلی (۳) متقاطع در دو نقطه (۴) یکی خارج دیگری

$$\begin{cases} C: x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} O(2, -2) \\ R = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 16 + 4} = 3 \end{cases} \\ C': x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0 \rightarrow \begin{cases} O'(2, -4) \\ R' = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 64 - 76} = 1 \end{cases} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} OO' = 2 \\ R' + R = 4 \\ |R - R'| = 2 \end{cases}$$

۲۸

$OO' = |R - R'| = 2 \rightarrow$ لذا دو دایره مماس داخل اند.

سراسری تجربی ۷۹

فاصله نقطه ای واقع بر نیمساز ناحیه دوم از خط به معادله $3y - 2x + 4 = 0$ برابر $3\sqrt{13}$ واحد است. عرض آن نقطه کدام است؟

$$y = -x \rightarrow A \begin{cases} a \\ -a \end{cases} \quad -2x + 3y + 4 = 0 \rightarrow d = \frac{|-2(a) + 3(-a) + 4|}{\sqrt{(-2)^2 + (3)^2}} = \frac{|-5a + 4|}{\sqrt{13}}$$

$$3\sqrt{13} = \frac{|-5a + 4|}{\sqrt{13}} \rightarrow |-5a + 4| = 39 \rightarrow -5a + 4 = \pm 39 \rightarrow \begin{cases} a = -7 \rightarrow y = 7 \\ a = \frac{43}{5} \end{cases}$$

۲۹

سراسری تجربی ۷۸

معادلات دو ضلع از یک مربع به صورت های $y = 2x$ و $2y - 4x = 5$ می باشند، مساحت مربع کدام است؟

$$\frac{6}{5} \quad (4) \quad \frac{5}{4} \quad (3) \quad \frac{4}{5} \quad (2) \quad \frac{3}{4} \quad (1)$$

۳۰

$$\begin{cases} -4x + 2y = 0 \\ -4x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \xrightarrow{d||d'} OH = \frac{|-5-0|}{\sqrt{(-4)^2 + (2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{20}} \quad S = \left(\frac{5}{\sqrt{20}}\right)^2 = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}$$

سراسری تجربی ۷۸

دو دایره به معادلات $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$ و $x^2 + y^2 + 2y = 0$ نسبت به هم چگونه اند؟

(۱) مماس داخلی (۲) مماس خارجی (۳) متخارج (۴) متقاطع

۳۱

$$\begin{cases} C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5 \longrightarrow \begin{cases} O(1, -2) \\ R = \sqrt{5} \end{cases} \\ C': x^2 + y^2 + 2y = 0 \longrightarrow \begin{cases} O'(0, -1) \\ R' = \sqrt{(0)^2 + (1)^2} = 1 \end{cases} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} d = OO' = \sqrt{2} \\ R' + R = 1 + \sqrt{5} \\ |R - R'| = \sqrt{5} - 1 \end{cases}$$

پس دو دایره متقاطع اند. $|R - R'| < OO' < R + R'$

سراسری تجربی ۷۷

چه رابطه ای بین a و b و c وجود دارد تا دستگاه $\begin{cases} ax - by = 0 \\ (a+b)x - cy = 0 \end{cases}$ جواب های غیر صفر داشته باشد؟

$$ac = b^2 - c^2 \quad (2)$$

$$b^2 = ab + ac \quad (1)$$

۳۲

$$ac = b^2 + c^2 \quad (4)$$

$$b^2 = ac - ab \quad (3)$$

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ a+b & -c \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow b^2 = ac - ab$$

سراسری تجربی ۷۶

شعاع دایره ای که از دو نقطه $(1, 2)$ و $(3, 0)$ گذشته و مرکز تقارن آن روی خط به معادله $y = 2x - 1$ باشد، کدام است؟

$$\sqrt{13} \quad (4)$$

$$\sqrt{10} \quad (3)$$

$$\sqrt{5} \quad (2)$$

$$2\sqrt{2} \quad (1)$$

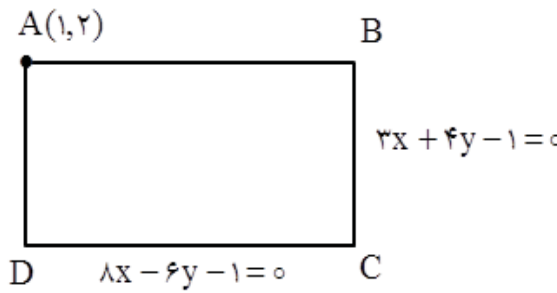
۳۳

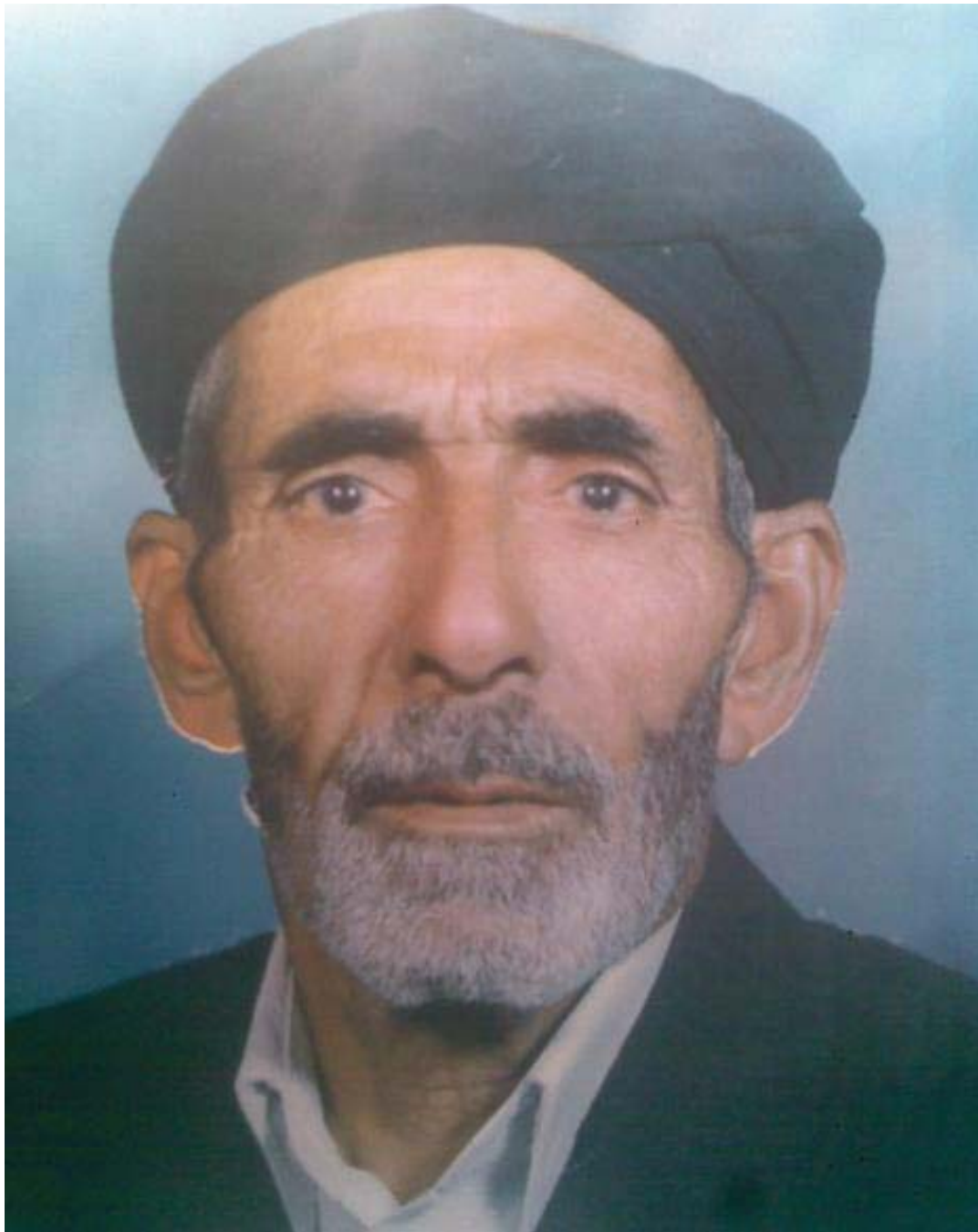
می دانیم مرکز تقارن دایره، همان مرکز دایره است و همچنین فاصله دو نقطه از مرکز دایره، برابر شعاع دایره است.

$$\begin{cases} A(1, 2) \\ B(3, 0) \end{cases} \xrightarrow{O \in y=2x-1} O(\alpha, 2\alpha-1)$$

$$OA = OB = R = \sqrt{(1-\alpha)^2 + (2-2\alpha+1)^2} = \sqrt{(3-\alpha)^2 + (0-2\alpha+1)^2} \longrightarrow \alpha = 0$$

$$OA = OB = R = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0+1)^2} = \sqrt{10}$$

<p>سراسری تجربی ۷۴</p> <p>صفحه ای بر محور سطح مخروطی است ، مقطع آن دو ، کدام است ؟</p> <p>(۱) سهمی (۲) دایره (۳) هذلولی (۴) دو خط متقاطع</p> <p>نکته: هر صفحه ای عمود بر یک سطح مخروطی دارای یک مقطع دایره شکل خواهد بود .</p>	<p>۳۴</p>
<p>سراسری تجربی ۷۴</p> <p>دایره به معادله $a(x^2 + y^2) + b(x + y) = 0$ از نقطه $(1,1)$ می گذرد ، شعاع دایره چه قدر است ؟</p> <p>(۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{b}{a}$ (۳) $a\sqrt{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$</p> <p>چون دایره از نقطه $(1,1)$ می گذرد ، پس مختصات آن در معادله دایره صدق می کند . داریم :</p> <p>$a(x^2 + y^2) + b(x + y) = 0 \xrightarrow{(1,1)} a(1+1) + b(1+1) = 0 \longrightarrow a = -b$</p> <p>$x^2 + y^2 - x - y = 0 \longrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} \longrightarrow R^2 = \frac{1}{2} \longrightarrow R = \frac{\sqrt{2}}{2}$</p>	<p>۳۵</p>
<p>معادله دو ضلع غیر موازی مستطیلی $3x + 4y = 1$ و $6y + bx + 1 = 0$ و نقطه $A(1,2)$ یک رأس مستطیل است . اندازه محیط این مستطیل کدام است ؟</p> <p>(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸</p> <p>$3x + 4y = 1 \longrightarrow m = -\frac{3}{4}$</p> <p>$6y + bx + 1 = 0 \longrightarrow m' = -\frac{b}{6}$</p> <p>$d \perp d' \longrightarrow mm' = -1$</p> <p>$-\frac{b}{6} = \frac{4}{3} \longrightarrow \boxed{b = -8} \longrightarrow 6y - 8x + 1 = 0$</p> <p>نکته: دو ضلع مستطیل یا با هم موازی اند یا بر هم عمود اند . معادله دو ضلع غیر موازی یعنی دو ضلع بر هم عموداند . مختصات نقطه $A(1,2)$ روی دو ضلع مستطیل واقع نیست زیرا مختصات آن در دو معادله صدق نمی کند . پس نقطه A رأس چهارم مستطیل می باشد لذا فاصله نقطه $A(1,2)$ را از دو ضلع داده شده حساب می کنیم .</p> <p>$3x + 4y - 1 = 0 \xrightarrow{A(1,2)} AB = \frac{ 3(1) + 4(2) - 1 }{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} = \frac{10}{5} = 2$</p> <p>$8x - 6y - 1 = 0 \xrightarrow{A(1,2)} AD = \frac{ -8(1) + 6(2) + 1 }{\sqrt{(-8)^2 + (6)^2}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$</p> <p>$P = 2a + 2b = 4 + 1 = 5$</p>	<p>۳۶</p> 



همکاران و دانش آموزان عزیز ، تست هائی که در اختیار شما قرار گرفته است ، زحمات چندین ساله بنده می باشد ، به همین خاطر قبل از مطالعه هزینه این جزوات را پرداخت کنید و هزینه آن یک صلوات و یک فاتحه برای روح پدر عزیزم است .

با تشکر : **سید علی موسوی**

متأسفانه با خبر شدم برخی از همکاران مشخصات بنده را پاک کرده و مشخصات خود را نوشته و استفاده شخصی می کنند ، از نظر شرعی ایراد داشته و تحت هیچ شرایطی راضی نیستم . چون این تست ها بایستی به صورت رایگان در اختیار دانش آموزان قرار گیرد .