



RIAZISARA

www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

سراسری تجربی ۹۸

در یک بیضی به کانون های $(2, -1)$ و $(2, 7)$ ، اندازه قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی، کدام است؟

۰/۸ (۴)

۰/۷۵ (۳)

۰/۶۴ (۲)

۰/۶ (۱)

$$F \begin{cases} 2 \\ 7 \end{cases} \quad F' \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases} \longrightarrow FF' = 2c \longrightarrow |-1-7| = 2c \longrightarrow c = 4$$

$$BB' = 2b \longrightarrow 2b = 6 \longrightarrow b = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \longrightarrow a = 5$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 0/8$$

۱

سراسری تجربی ۹۶

در بیضی به معادله $16y^2 + 5x^2 - 10x = 75$ خط گذرا بر کانون و عمود بر محور کانونی، بیضی را در M و N قطع می کند. اندازه MN کدام است؟

۳/۵ (۴)

۳ (۳)

۲/۵ (۲)

۲ (۱)

نکته: در هر بیضی طول وتر کانونی (وتری که از کانون بیضی بر قطر بزرگ آن عمود است) برابر $MN = \frac{2b^2}{a}$ است

$$5(x^2 - 2x + 1 - 1) + 16y^2 = 75 \longrightarrow 5(x-1)^2 + 16(y-0)^2 = 80$$

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{y^2}{5} = 1 \longrightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \longrightarrow a = 4 \\ b^2 = 5 \longrightarrow b = \sqrt{5} \end{cases} \quad MN = \frac{2b^2}{a} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

۲

سراسری تجربی ۹۶ - خارج از کشور

بیضی به کانون های $(1, -1)$ و $(1, 1)$ و خروج از مرکز $\frac{1}{4}$ ، خط $y = 2x$ را با کدام طول ها، قطع می کند؟

 $-\frac{1}{2}, 2$ (۴)

 $-1, \frac{1}{2}$ (۳)

 $-\frac{1}{4}, 1$ (۲)

 $-\frac{1}{2}, 1$ (۱)

نکته: مکان هندسی تمام نقاطی که مجموع فواصل شان از دو نقطه ثابت F و F' (کانون ها) برابر $2a$ باشد، یک بیضی است.

نکته: در بیضی، اگر عرض های نقاط F, F' یا A, A' برابر باشند، بیضی افقی است.

چون طول کانون ها با هم برابرند، بنابراین بیضی قائم می باشد.

۳

$$F \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}, F' \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} \longrightarrow \alpha = 1, \begin{cases} \beta + c = 1 \\ \beta - c = -1 \end{cases} \xrightarrow{\beta=0} c = 1 \longrightarrow O(1,0) \text{ or } FF' = 2c \longrightarrow |-1-1| = 2c$$

$$c = 1 \quad e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = 1 \end{cases} \longrightarrow a^2 = b^2 + c^2 = \longrightarrow 4 = b^2 + 1 \longrightarrow b^2 = 3$$

$$\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1 \xrightarrow{y=2x} \frac{(x-1)^2}{3} + \frac{4x^2}{4} = 1 \longrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

سراسری تجربی ۹۴ - خارج از کشور

بیضی به معادله $x^2 + 4y^2 + ax + by + c = 0$ ، در نقطه ای به طول ۳ بر محور x ها مماس است و از نقطه $(-1, -2)$ می گذرد. خروج از مرکز آن کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad (4) \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3) \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2) \qquad \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{A} x^2 + \frac{4}{B} y^2 + ax + by + c = 0 \longrightarrow e = \sqrt{1 - \frac{\min(A, B)}{\max(A, B)}} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

نکته: خروج از مرکز بیضی همواره بین صفر و یک است. زیرا

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad a > c > 0 \longrightarrow 0 < \frac{c}{a} < 1 \longrightarrow 0 < e < 1$$

هر چه خروج از مرکز بیضی، کوچک تر شود و به صفر نزدیک تر شود، بیضی به دایره نزدیکتر می شود.
هر چه خروج از مرکز بیضی، بزرگ تر شود و به یک نزدیک تر شود، بیضی کشیده تر می شود و در حالت حدی، اگر $e = 1$ باشد، بیضی به شکل یک پاره خط در می آید.

سراسری تجربی ۹۲

مختصات دو سر قطر کوچک یک بیضی $(-1, 3)$ و $(-1, -1)$ است. این بیضی از نقطه $(-4, 2)$ می گذرد، خروج از مرکز آن کدام است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4) \qquad \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (3) \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2) \qquad \frac{\sqrt{2}}{3} \quad (1)$$

چون طول های دو سر قطر کوچک بیضی برابر هستند، پس بیضی مورد نظر، یک بیضی افقی است.

$$B \begin{vmatrix} -1 = \alpha \\ 3 = \beta + b \end{vmatrix} \quad B' \begin{vmatrix} -1 = \alpha \\ -1 = \beta - b \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \beta + b = 3 \\ \beta - b = -1 \end{cases} \longrightarrow \beta = 1, b = 2 \longrightarrow O \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \longrightarrow \frac{(x+1)^2}{a^2} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

$$M \begin{vmatrix} -4 \\ 2 \end{vmatrix} \longrightarrow \frac{(-4+1)^2}{a^2} + \frac{(2-1)^2}{4} = 1 \longrightarrow a^2 = 12$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{4}{12}} = \sqrt{\frac{8}{12}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

سراسری تجربی ۹۲ - خارج از کشور

مختصات دو سر قطر بزرگ یک بیضی $(3, 6)$ و $(3, -2)$ و خروج از مرکز آن $\frac{1}{4}$ است. این بیضی محور x ها را با کدام

طول قطع می کند؟

(۴) ۱,۵

(۳) ۰,۶

(۲) -۱,۷

(۱) -۱,۵

۶

نکته: چون طول های دو سر قطر بزرگ بیضی برابر است، پس بیضی مورد نظر، یک بیضی قائم است.

$$A \begin{vmatrix} 3 = \alpha \\ 6 = \beta + a \end{vmatrix} \quad A' \begin{vmatrix} 3 = \alpha \\ -2 = \beta - a \end{vmatrix} \quad \begin{cases} \beta + a = 6 \\ \beta - a = -2 \end{cases} \longrightarrow \beta = 2 \quad a = 4 \quad O \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$e = \frac{1}{2} = \frac{c}{a} \longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{c}{4} \longrightarrow c = 2 \quad a^2 = b^2 + c^2 \longrightarrow b^2 = 12$$

$$\frac{(x-3)^2}{12} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1 \xrightarrow{y=0} \frac{(x-3)^2}{12} + \frac{(0-2)^2}{16} = 1 \longrightarrow (x-3)^2 = 9 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

سراسری تجربی ۹۰

در بیضی به معادله $3x^2 + 4y^2 = 12$ ، یک خط از کانون بر قطر بزرگ آن عمود می کنیم تا بیضی را در A و B قطع کند، اندازه وتر AB کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) $\frac{5}{2}$

(۱) $\frac{3}{2}$

۷

نکته: خطی که از کانون بر محور کانونی یا همان قطر بزرگ بیضی عمود می کنیم، بیضی را در دو نقطه قطع

می کند که همان وتر کانونی می نامیم. اندازه وتر کانونی از رابطه $MN = \frac{2b^2}{a}$ به دست می آید.

نکته: در بیضی همیشه $a^2 > b^2$ است، چون a^2 در مخرج کسر x^2 است، پس بیضی افقی است. ($A < B$)

$$3x^2 + 4y^2 = 12 \longrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \longrightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \longrightarrow a = 2 \\ b^2 = 3 \end{cases} \longrightarrow AB = \frac{2(3)}{2} = 3$$

سراسری تجربی ۹۰ - خارج از کشور

مساحت محدود به خطوط مماس بر منحنی به معادله $x^2 + 4y^2 - 4x = 4$ در هر رأس کانونی و غیر کانونی آن کدام است؟

۱۸ (۴)

۱۶ (۳)

۱۲ (۲)

۸ (۱)

نکته: خطوط مماس بر منحنی در هر رأس کانونی و غیر کانونی یک مستطیل ایجاد می شود که طول و عرض آن،

قطرهای لوزی هستند. داریم: $S = AA' \times BB' = 2a \times 2b = 4ab$

چون عدد بزرگ تر در مخرج کسر x^2 می باشد پس بیضی افقی است. ($A < B$)

$$x^2 - 4x + 4y^2 = 4 \longrightarrow (x-2)^2 + 4y^2 = 8 \longrightarrow \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

$$\begin{cases} a^2 = 8 \longrightarrow a = \sqrt{8} \longrightarrow AA' = 2a = 2\sqrt{8} \\ b^2 = 2 \longrightarrow b = \sqrt{2} \longrightarrow BB' = 2b = 2\sqrt{2} \end{cases} \longrightarrow S = 2\sqrt{8} \times 2\sqrt{2} = 16$$

۸

سراسری تجربی ۸۷

در بیضی به معادله $x^2 + 2y^2 - 2x = 1$ ، اندازه وترى که از کانون بیضی بر قطر بزرگ آن عمود شود، کدام است؟

 $\sqrt{2}$ (۴)

۱ (۳)

 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)

۹

نکته: وترى که از کانون بیضی بر قطر بزرگ آن عمود می شود، وتر کانونی می گوئیم. اندازه وتر کانونی $\frac{2b^2}{a}$ است.

$$x^2 + 2y^2 - 2x = 1 \longrightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 + 2y^2 = 1 \longrightarrow (x-1)^2 + 2y^2 = 2 \xrightarrow{\div 2}$$

$$\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1 \longrightarrow \begin{cases} a^2 = 2 \longrightarrow a = \sqrt{2} \\ b^2 = 1 \longrightarrow b = 1 \end{cases} \longrightarrow MN = \frac{2b^2}{a} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad (\text{بیضی افقی})$$

سراسری تجربی ۸۶

نقطه $M(x, y)$ بر روی بیضی به معادله $9y^2 + 4x^2 - 8x = 8$ قرار دارد، مجموع فواصل نقطه M از دو نقطه این بیضی کدام است؟

۶ (۴)

 $2\sqrt{3}$ (۳)

۳ (۲)

 $\sqrt{6}$ (۱)

۱۰

با توجه به تعریف بیضی، مجموع فواصل نقطه M از دو کانون بیضی برابر $2a$ است، یعنی $MF + MF' = 2a$

پس داریم: (بیضی افقی است $A < B$)

$$9y^2 + 4x^2 - 8x = 8 \longrightarrow 9y^2 + 4(x^2 - 2x + 1 - 1) = 8 \longrightarrow 9y^2 + 4(x-1)^2 = 12 \xrightarrow{\div 12}$$

$$\frac{3y^2}{4} + \frac{(x-1)^2}{3} = 1 \longrightarrow \frac{(x-1)^2}{3} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1 \longrightarrow \begin{cases} a^2 = 3 \longrightarrow a = \sqrt{3} \\ b^2 = \frac{4}{3} \longrightarrow b = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$MF + MF' = 2a = 2\sqrt{3}$$

سراسری تجربی ۸۶ - خارج از کشور

دورترین نقطه از بیضی به معادله $2x^2 + y^2 + 4x - 4y + 2 = 0$ تا مرکز آن، به کدام مختصات است؟

$$(-1, 6) \quad (4) \quad (-1, 4) \quad (3) \quad (-2, 2 + \sqrt{2}) \quad (2) \quad (-1 - \sqrt{2}, 2) \quad (1)$$

نکته: دورترین نقطه از بیضی تا مرکز آن، رأس‌های کانونی یعنی نقاط A یا A' می‌باشد.

در بیضی قائم، مختصات رئوس کانونی به صورت $(\alpha, \beta \pm a)$ است. برای تعیین مختصات این نقاط، ابتدا معادله بیضی را استاندارد می‌کنیم. (بیضی قائم است $A > B$)

$$2x^2 + y^2 + 4x - 4y + 2 = 0 \longrightarrow 2(x^2 + 2x + 1 - 1) + (y^2 - 4y + 4 - 4) = -2$$

$$2(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \xrightarrow{\div 4} \frac{(x+1)^2}{2} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1 \longrightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \longrightarrow a = 2 \\ b^2 = 2 \longrightarrow b = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$O(-1, 2) \longrightarrow \begin{cases} A(\alpha, \beta + a) \longrightarrow A(-1, 4) \\ A'(\alpha, \beta - a) \longrightarrow A'(-1, 0) \end{cases}$$

سراسری تجربی ۸۴

در بیضی به معادله $3x^2 + 4y^2 - 6x + 4y = 44$ فاصله یک کانون از دورترین رأس آن کدام است؟

$$4 + 2\sqrt{3} \quad (4) \quad 7 \quad (3) \quad 6 \quad (2) \quad 5 \quad (1)$$

نکته: فاصله کانون از دورترین رأس، $A'F = a + c$ و از نزدیک ترین رأس $AF = a - c$ می‌باشد. (بیضی افقی)

$$3(x^2 - 2x + 1 - 1) + 4(y^2 + y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) = 44 \longrightarrow 3(x-1)^2 + 4(y + \frac{1}{4})^2 = 48$$

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y + \frac{1}{4})^2}{12} = 1 \longrightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \longrightarrow a^2 = b^2 + c^2 \longrightarrow c = 2 \\ b^2 = 12 \end{cases}$$

$$A'F = a + c = 4 + 2 = 6$$

۱۱

۱۲

سراسری تجربی ۸۱

شیب خط قائم بر بیضی به معادله $x^2 + 3y^2 - 8x = 0$ در نقطه برخورد آن بیضی با نیمساز ناحیه اول و در این ناحیه کدام است؟

$$-3 \quad (1) \quad -\frac{1}{2} \quad (2) \quad \frac{1}{3} \quad (3) \quad 3 \quad (4)$$

۱۳

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 - 8x = 0 \\ y = x \end{cases} \longrightarrow x^2 + 3x^2 - 8x = 0 \longrightarrow 4x^2 - 8x = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \longrightarrow y = 2 \end{cases}$$

$$f'(x, y) = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2x-8}{6y} \quad m = f'(2, 2) = \frac{1}{3} \longrightarrow m' = -3$$

سراسری تجربی ۷۷

نقاط $A'(-3, 1)$ و $A(3, 1)$ دو رأس بیضی با فاصله کانونی $2\sqrt{6}$ واحد است، معادله بیضی کدام است؟

$$\begin{aligned} x^2 + 9y^2 - 18y = 0 & (1) \\ 3x^2 + y^2 - 3y = 2 & (2) \\ 9x^2 + 3y^2 - 2y = 8 & (4) \\ x^2 + 3y^2 - 6y = 6 & (3) \end{aligned}$$

۱۴

چون عرض های A و A' برابر هستند لذا بیضی افقی است. $(a > b)$ لذا گزینه (۱) یا (۳) صحیح است. از طرفی مرکز بیضی وسط AA' است. داریم:

$$FF' = 2c = 2\sqrt{6} \longrightarrow c = \sqrt{6} \quad AA' = 2a \longrightarrow |-3 - 3| = 2a \longrightarrow a = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \longrightarrow b^2 = 3 \longrightarrow b = \sqrt{3} \quad O(0, 1)$$

$$\frac{(x-0)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{3} = 1 \longrightarrow x^2 + 3y^2 - 6y = 6$$

سراسری تجربی ۷۴

معادله بیضی به کانون های $F(1, 1)$ و $F'(1, -1)$ و قطر بزرگ $2\sqrt{5}$ ، کدام است؟

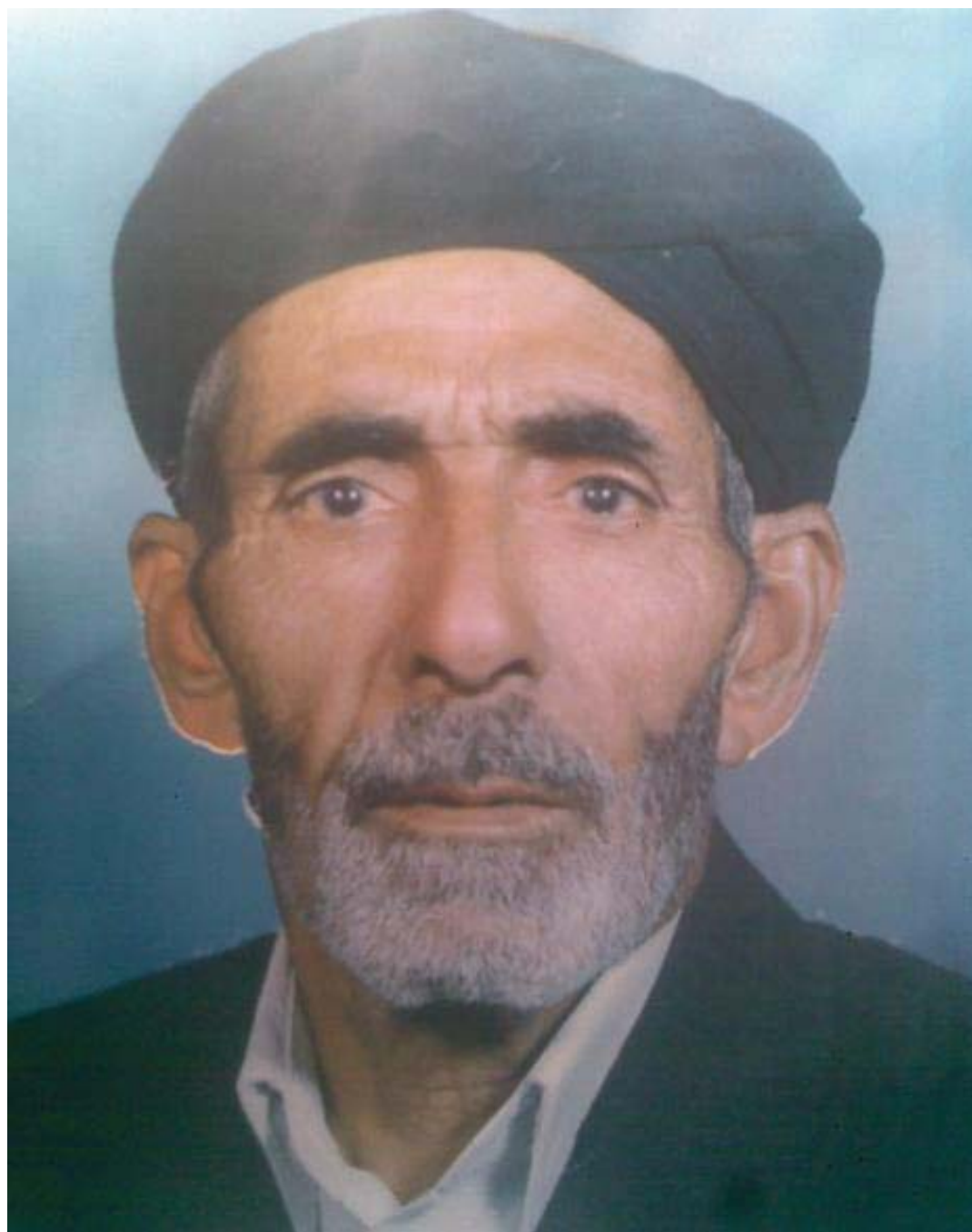
$$\begin{aligned} 5x^2 + 4y^2 - 10x = 15 & (1) \\ 4x^2 + 5y^2 + 8x = 16 & (4) \\ 4x^2 + 5y^2 - 8x = 16 & (3) \\ 5x^2 + 4y^2 + 10x = 15 & (2) \end{aligned}$$

۱۵

چون محور کانونی (FF') موازی محور y ها است، بیضی قائم است. از طرفی مرکز بیضی وسط FF' است. داریم:

$$FF' = 2c \longrightarrow |-1 - 1| = 2c \longrightarrow c = 1 \quad O(1, 0) \quad AA' = 2a = 2\sqrt{5} \longrightarrow a = \sqrt{5}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \longrightarrow b = 2 \quad \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1 \longrightarrow 5x^2 + 4y^2 - 10x = 15$$



همکاران و دانش آموزان عزیز ، تست هائی که در اختیار شما قرار گرفته است ، زحمات چندین ساله بنده می باشد ، به همین خاطر قبل از مطالعه هزینه این جزوات را پرداخت کنید و هزینه آن یک صلوات و یک فاتحه برای روح پدر عزیزم است .

با تشکر : سید علی موسوی

خواهشمند است پیشنهادات و نظرات خود را به آدرس تلگرام (۰۹۱۵۳۲۱۵۶۱۴)
و یا به ایمیل seyedalimousavi48@gmail.com ارسال فرمائید .

با سپاس فراوان از شما عزیزان

متأسفانه با خبر شدم برخی از همکاران مشخصات بنده را پاک کرده و مشخصات
خود را نوشته و استفاده شخصی می کنند ، از نظر شرعی ایراد داشته و تحت هیچ
شرایطی راضی نیستم . چون این تست ها بایستی به صورت رایگان در اختیار
دانش آموزان قرار گیرد .