



**RIAZISARA**

[www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir) **سایت ویژه ریاضیات**

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی  
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور  
نمونه سوالات امتحانات ریاضی  
نرم افزارهای ریاضیات**

و...

**(@riazisara)**

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

**(@riazisara.ir)** ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

سراسری تجربی ۹۸

در شکل روبه رو، مساحت ناحیه سایه زده، کدام است؟

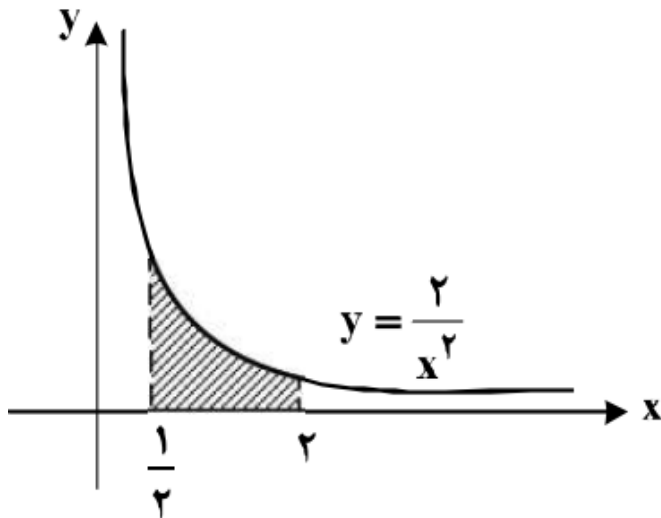
(۱) ۲/۵

(۲) ۳

(۳) ۳/۵

(۴) ۴

۱



$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{2}{x^2}\right) dx = \left(\frac{-2}{x}\right) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = |(-1) - (-4)| = 3$$

سراسری تجربی ۹۸ - خارج از کشور

در شکل رو به رو، مساحت سایه زده، کدام است؟

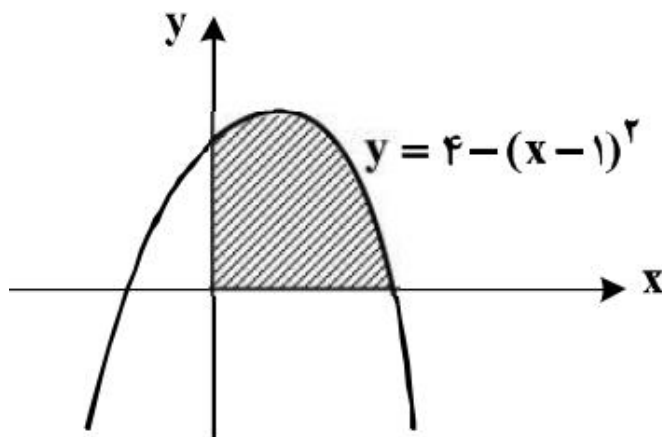
(۱) ۸

(۲) ۹

(۳) ۱۰

(۴) ۱۱

۲

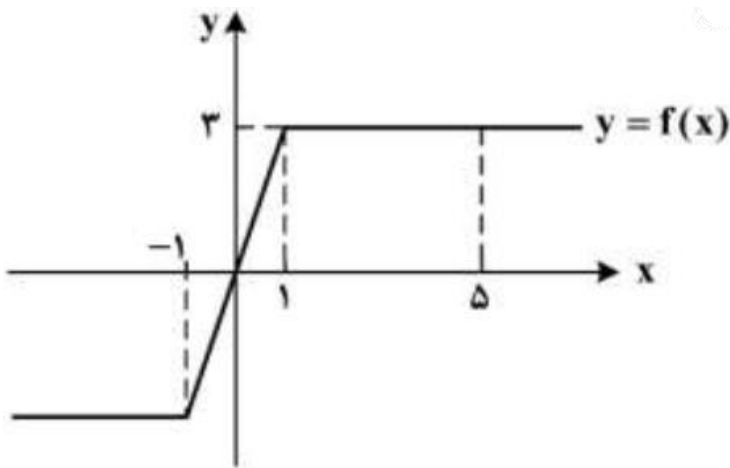


$$y = 4 - (x-1)^2 \xrightarrow{y=0} (x-1)^2 = 4 \longrightarrow \begin{cases} x-1 = 2 \longrightarrow x = 3 \\ x-1 = -2 \longrightarrow x = -1 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3) dx = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \Big|_{-1}^3 = -9 + 9 + 9 = 9$$

سراسری تجربی ۹۷

با توجه به نمودار تابع مفروض، مقدار  $\int_{-1}^5 f(x)dx$ ، کدام است؟



۱۰ (۱)

۱۲ (۲)

۱۳ (۳)

۱۴ (۴)

۳

$$\int_{-1}^5 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx = 4 \times 3 = 12$$

سراسری تجربی ۹۷

حاصل  $\int_1^4 \left( \frac{2x^3 - \sqrt{x}}{x^2} \right) dx$ ، کدام است؟

۱۵ (۴)

۱۴ (۳)

۱۳ (۲)

۱۲ (۱)

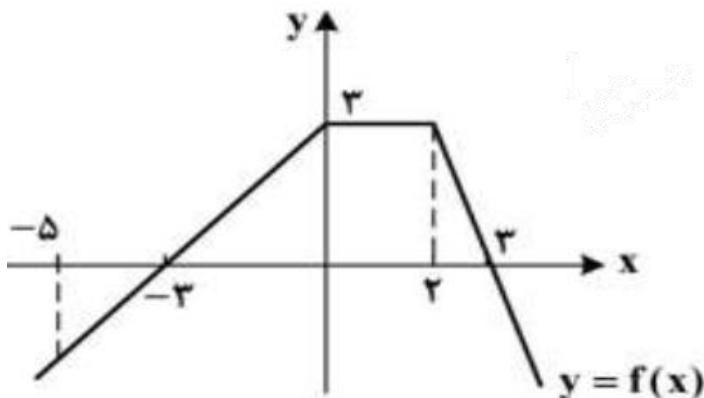
۴

$$\int_1^4 \left( \frac{2x^3 - \sqrt{x}}{x^2} \right) dx = \int_1^4 \left( \frac{2x^3}{x^2} - \frac{\sqrt{x}}{x^2} \right) dx = \int_1^4 (2x - x^{-\frac{1}{2}}) dx = \left( x^2 + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) \Big|_1^4$$

$$= (16 + 1) - (1 + 2) = 17 - 3 = 14$$

سراسری تجربی ۹۷ - خارج از کشور

با توجه به نمودار تابع مفروض، مقدار  $\int_{-5}^3 f(x)dx$ ، کدام است؟



۱۰ (۱)

۱۱ (۲)

۱۲ (۳)

۱۴ (۴)

۵

$$A \begin{vmatrix} -3 \\ 0 \end{vmatrix} \quad B \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \end{vmatrix} \longrightarrow m = \frac{-3}{-3} = 1 \longrightarrow y = x + 3 \xrightarrow{x=-5} y = -2$$

$$\int_{-5}^3 f(x) dx = \int_{-5}^{-3} f(x) dx + \int_{-3}^3 f(x) dx = -\frac{2 \times 2}{2} + \frac{(6+2) \times 3}{2} = -2 + 12 = 10$$

سراسری تجربی ۹۷ - خارج از کشور

حاصل  $\int_1^4 \left( \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx$  ، کدام است ؟

$\frac{5}{3}$  (۴)       $\frac{4}{3}$  (۳)       $\frac{2}{3}$  (۲)       $\frac{1}{3}$  (۱)

ابتدا صورت کسر را به توان رسانده و سپس کسر را تفکیک می کنیم .

$$\int_1^4 \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int_1^4 \left( \frac{x-2\sqrt{x}+1}{x^{\frac{1}{2}}} \right) dx = \int_1^4 \left( x^{\frac{1}{2}} - 2 + x^{-\frac{1}{2}} \right) dx$$

$$= \left( \frac{2}{3} x\sqrt{x} - 2x + 2\sqrt{x} \right) \Big|_1^4 = \left( \frac{16}{3} - 8 + 4 \right) - \left( \frac{2}{3} - 2 + 2 \right) = \frac{2}{3}$$

سراسری تجربی ۹۶

اگر  $f(x) = x - |x-2|$  باشد ، حاصل  $\int_0^4 f(x) dx$  ، کدام است ؟

$5$  (۴)       $4$  (۳)       $3$  (۲)       $2$  (۱)

**نکته:** برای محاسبه انتگرال توابع شامل قدر مطلق ، باید انتگرال را در فاصله بین حدود انتگرال و ریشه داخلی قدر مطلق را بشکنیم و سپس قدر مطلق را در آن فاصله تعیین علامت کرده و سپس انتگرال بگیریم .

**روش اول:**

$$\int_0^4 (x - |x-2|) dx = \int_0^4 x dx - \int_0^4 |x-2| dx = \frac{4 \times 4}{2} - \left( \frac{2 \times 2}{2} + \frac{2 \times 2}{2} \right) = 8 - 4 = 4$$

**روش دوم:**

$$\int_0^4 (x - |x-2|) dx = \int_0^2 (x + x - 2) dx + \int_2^4 (x - x + 2) dx = \int_0^2 (2x - 2) dx + \int_2^4 (2) dx$$

$$= \left[ x^2 - 2x \right]_0^2 + \left[ 2x \right]_2^4 = [(4-4) - (0-0)] + [(8) - (4)] = 4$$

<p>سراسری تجربی ۹۶</p> <p>اگر <math>\int (3x + \frac{1}{x})^2 dx = \frac{1}{x} f(x) + C</math> باشد، آنگاه <math>f(x)</math>، کدام است؟</p> <p>(۱) <math>3x^3 + 6x^2 - 1</math> (۲) <math>3x^3 + 3x - 1</math> (۳) <math>3x^4 + 3x^2 - 1</math> (۴) <math>3x^4 + 6x^2 - 1</math></p> <p><math>\int (9x^2 + 6 + \frac{1}{x^2}) dx = 3x^3 + 6x - \frac{1}{x} + C = \frac{3x^4 + 6x^2 - 1}{x} + C \rightarrow f(x) = 3x^4 + 6x^2 - 1</math></p>	<p>۸</p>
<p>سراسری تجربی ۹۶ - خارج از کشور</p> <p>اگر <math>f(x) =  x - 2  - 2</math> باشد، حاصل <math>\int_0^6 f(x) dx</math>، کدام است؟</p> <p>(۱) <math>-2/5</math> (۲) <math>-2</math> (۳) <math>-1/5</math> (۴) <math>-1</math></p> <p><b>نکته:</b> در تعیین انتگرال توابع شامل قدر مطلق، باید انتگرال را به ازای ریشه داخلی قدر مطلق و حدود انتگرال، تعیین علامت کنیم.</p> <p><math>\int_0^6 f(x) dx = \int_0^2 (-x + 2 - 2) dx + \int_2^6 (x - 2 - 2) dx = \int_0^2 (-x) dx + \int_2^6 (x - 4) dx</math></p> <p><math>= \left[ -\frac{x^2}{2} \right]_0^2 + \left[ \frac{x^2}{2} - 4x \right]_2^6 = [(-2) - (0)] + [(18 - 24) - (2 - 8)] = -2 - 6 + 6 = -2</math></p>	<p>۹</p>
<p>سراسری تجربی ۹۶ - خارج از کشور</p> <p>اگر <math>\int \frac{x-1}{x^3} dx = \frac{1}{2x^2} f(x) + C</math> باشد، آنگاه <math>f(x)</math>، کدام است؟</p> <p>(۱) <math>-2x + 1</math> (۲) <math>-x + 2</math> (۳) <math>x - 2</math> (۴) <math>2x - 1</math></p> <p><math>\int \frac{x-1}{x^3} dx = \int (\frac{x}{x^3} - \frac{1}{x^3}) dx = \int (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}) dx = \int (x^{-2} - x^{-3}) dx</math></p> <p><math>= (-1)x^{-1} - (-\frac{1}{2})x^{-2} + C = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C = \frac{-2x + 1}{2x^2} + C \rightarrow f(x) = -2x + 1</math></p>	<p>۱۰</p>
<p>سراسری تجربی ۹۵</p> <p>حاصل <math>\int_{-1}^1 ( 3x  - [x]) dx</math>، کدام است؟ (نماد <math>[ ]</math> به مفهوم جزء صحیح است.)</p> <p>(۱) <math>\frac{5}{2}</math> (۲) <math>3</math> (۳) <math>\frac{7}{2}</math> (۴) <math>4</math></p> <p><b>نکته:</b> در تعیین انتگرال توابع شامل جزء صحیح باید انتگرال را به ترتیبی در نظر بگیریم که در هر بازه تنها یک مقدار برای جزء صحیح حاصل شود.</p>	<p>۱۱</p>

$$\int_{-1}^1 (|3x| - [x]) dx = 3 \int_{-1}^1 (|x|) dx - \int_{-1}^1 ([x]) dx = 3 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) - (-1 + 0) = 3 + 1 = 4$$

سراسری تجربی ۹۵

اگر  $\int \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x})}{x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{x}} f(x) + C$  باشد، آنگاه  $f(x)$  کدام است؟

(۱)  $2x+2$  (۲)  $2x-1$  (۳)  $x-2$  (۴)  $x+2$

۱۲

$$\int \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x})}{x^2} dx = \int \frac{x\sqrt{x} + x - x - \sqrt{x}}{x^2} dx = \int \frac{x\sqrt{x} - \sqrt{x}}{x^2} dx = \int \frac{x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{x^2} dx$$

$$= \int \left( \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^2} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2} \right) dx = \int \left( x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{3}{2}} \right) dx = (2)x^{-\frac{1}{2}} - (-2)x^{-\frac{3}{2}} + C = 2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + C = \frac{2x+2}{\sqrt{x}} + C$$

سراسری تجربی ۹۵ - خارج از کشور

حاصل  $\int_{-1}^2 (|x|[x]) dx$  ، کدام است؟ ( نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است . )

(۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $1$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $2$

۱۳

$$\int_{-1}^2 (|x|[x]) dx = \int_{-1}^0 (-1)(-x) dx + \int_0^1 (0)(x) dx + \int_1^2 (1)(x) dx = \int_{-1}^0 (x) dx + \int_1^2 (x) dx$$

$$= \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^0 + \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_1^2 = \left( 0 - \frac{1}{2} \right) + \left( 2 - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$$

سراسری تجربی ۹۵ - خارج از کشور

اگر  $\int \frac{5x^2 + 3x}{\sqrt{x}} dx = x\sqrt{x}.f(x) + C$  باشد، آنگاه  $f(x)$  کدام است؟

(۱)  $x+2$  (۲)  $x+3$  (۳)  $2x+2$  (۴)  $2x+3$

۱۴

$$\int \frac{5x^2 + 3x}{\sqrt{x}} dx = 5 \int \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} dx + 3 \int \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}} dx = 5 \int x^{\frac{3}{2}} dx + 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx = 5 \left( \frac{2}{5} \right) x^{\frac{5}{2}} + 3 \left( \frac{2}{3} \right) x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= 2\sqrt{x^5} + 2\sqrt{x^3} + C = 2x^2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} + C = x\sqrt{x}(2x+2) + C \rightarrow f(x) = 2x+2$$

<p>سراسری تجربی ۹۴</p> <p>حاصل <math>\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1+\tan^2 x}}</math> ، برابر کدام است؟</p> <p>۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)</p> <p><b>نکته:</b> مساحت هر طاق در تابع <math>y = \sin x</math> یا <math>y = \cos x</math> برابر ۲ است، لذا داریم:</p> $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{ \cos x } = \int_0^{\pi}  \cos x  dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x) dx$ $= (\sin x) \Big _0^{\frac{\pi}{2}} - (\sin x) \Big _{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = (1-0) - (0-1) = 1+1=2$	<p>۱۵</p>
<p>سراسری تجربی ۹۴</p> <p>اگر <math>\int \frac{\sqrt{x^2-4x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = 3\sqrt[3]{x} \cdot f(x) + C</math> باشد، آنگاه <math>f(x)</math> کدام است؟</p> <p>۱ (۱) <math>\frac{1}{3}x^2 - 2x</math>      ۲ (۲) <math>\frac{2}{3}x^2 - 1</math>      ۳ (۳) <math>x^2 - x</math>      ۴ (۴) <math>x^2 - 2</math></p> $\int \frac{\sqrt{x^2-4x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}} dx - 4 \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}} dx = \int x^{\frac{1}{6}} dx - 4 \int x^{\frac{1}{6}} dx = \frac{1}{\frac{7}{6}} x^{\frac{7}{6}} - 4 \left( \frac{1}{\frac{7}{6}} \right) x^{\frac{7}{6}} + C$ $= \frac{6}{7} x^{\frac{7}{6}} - \frac{24}{7} x^{\frac{7}{6}} + C = \frac{6}{7} x^{\frac{7}{6}} (1-4) + C = -\frac{18}{7} x^{\frac{7}{6}} + C \rightarrow f(x) = x^2 - x$	<p>۱۶</p>
<p>سراسری تجربی ۹۴ - خارج از کشور</p> <p>حاصل <math>\int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos x} dx</math> ، کدام است؟</p> <p>۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)      ۵ (۵)</p> $\int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos x} dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos x)} dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \left( 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right)} dx = 2 \int_0^{2\pi} \left  \sin \frac{x}{2} \right  dx \xrightarrow{\begin{matrix} 0 < x < 2\pi \\ 0 < \frac{x}{2} < \pi \end{matrix}}$ $= 2 \int_0^{2\pi} (\sin \frac{x}{2}) dx = 2(-2 \cos \frac{x}{2}) \Big _0^{2\pi} = -4(\cos \pi - \cos 0) = -4(-1-1) = 8$	<p>۱۷</p>

سراسری تجربی ۹۴ - خارج از کشور

اگر  $\int \frac{4x^2-1}{\sqrt{x}} dx = \frac{3}{2} \sqrt{x^2} \cdot f(x) + C$  ، آنگاه  $f(x)$  ، کدام است ؟

- (۱)  $2x^2 - x$       (۲)  $x^2 - x$       (۳)  $x^2 - 1$       (۴)  $2x^2 - 1$

۱۸

$$\int \frac{4x^2-1}{\sqrt{x}} dx = 4 \int \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} dx - \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = 4 \int x^{\frac{5}{2}} dx - \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 4 \times \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{8}{7} \sqrt{x^7} - \frac{2}{1} \sqrt{x^2} + C = \frac{8}{7} x^2 \sqrt{x^2} - \frac{2}{1} \sqrt{x^2} + C = \frac{8}{7} \sqrt{x^2} (x^2 - 1) + C \rightarrow f(x) = x^2 - 1$$

سراسری تجربی ۹۳

اگر  $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3 - 1}{x} dx = 3\sqrt{x} \cdot f(x) + C$  باشد ،  $f(x)$  کدام است ؟

- (۱)  $\frac{2}{3}x + 3\sqrt{x} + 2$       (۲)  $\frac{2}{3}x + \sqrt{x} + 6$   
(۳)  $\frac{2}{9}x + 3\sqrt{x} + 6$       (۴)  $\frac{2}{9}x + \sqrt{x} + 2$

۱۹

$$(1+\sqrt{x})^3 - 1^3 = (1+\sqrt{x}-1)(1+2\sqrt{x}+x+1+\sqrt{x}+1) = (\sqrt{x})(3+3\sqrt{x}+x)$$

$$= 3\sqrt{x} + 3x + x\sqrt{x}$$

$$\int \frac{(1+\sqrt{x})^3 - 1}{x} dx = \int \frac{3\sqrt{x} + 3x + x\sqrt{x}}{x} dx = \int (3x^{-\frac{1}{2}} + 3 + x^{\frac{1}{2}}) dx$$

$$= 3 \times \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 3x + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = 6\sqrt{x} + 3x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C = 3\sqrt{x} \left( 2 + \sqrt{x} + \frac{2}{9}\sqrt{x} \right)$$

سراسری تجربی ۹۳

مقدار انتگرال معین  $\int_{-1}^3 (x + [x]) dx$  ، کدام است ؟ (نماد  $[ ]$  به مفهوم جزء صحیح است .)

- (۱) ۵      (۲) ۵/۵      (۳) ۶      (۴) ۶/۵

۲۰





$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

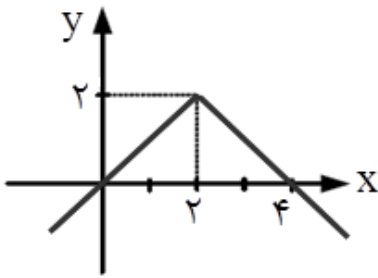
$$\frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} = \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x} = \cos x + \sin x$$

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx = \int (\cos x + \sin x) dx = \sin x - \cos x + C$$

سراسری تجربی ۹۲

با توجه به شکل روبه رو، حاصل  $\int_0^4 (2 - |x - 2|) dx$ ، کدام است؟

۲۴



۲ (۱)      ۳ (۲)

۳/۵ (۳)      ۴ (۴)

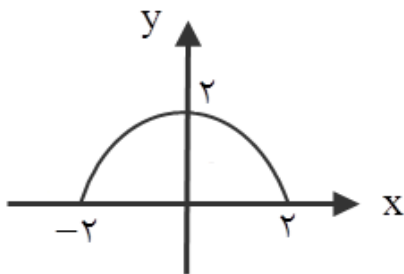
**تعریف:** انتگرال معین تابع  $f$  در بازه  $[a, b]$ ، یعنی  $\int_a^b f(x) dx$ ، برابر با مساحت علامت دار بین نمودار  $f$  و محور  $x$ ها و دو خط  $x = a$  و  $x = b$  می باشد. داریم:

$$\int_0^4 f(x) dx = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$

سراسری تجربی ۹۲ - خارج از کشور

با توجه به شکل روبه رو، حاصل  $\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx$ ، کدام است؟

۲۵



۲π - ۲ (۱)      π + ۲ (۲)

۲π (۳)      ۴π (۴)

$$y = \sqrt{4 - x^2} \rightarrow y^2 = 4 - x^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 4 \rightarrow O(0,0), R = 2$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi(2)^2 = 4\pi$$

$$\text{مساحت نیم دایره} = 4\pi \div 2 = 2\pi$$

سراسری تجربی ۹۲ - خارج از کشور

با شرط  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ ، حاصل  $\int \sqrt{1 + \tan^2 x} \sin 2x dx$ ، کدام است؟

۲۶

۲ sin x + C (۴)      ۲ cos x + C (۳)      -۲ sin x + C (۲)      -۲ cos x + C (۱)

$$\sqrt{1 + \tan^2 x} \times \sin 2x = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} \times \sin 2x = \frac{1}{|\cos x|} \times \sin 2x = \frac{1}{-\cos x} \times 2 \sin x \times \cos x = -2 \sin x$$

$$\int \sqrt{1 + \tan^2 x} \sin 2x dx = -2 \int \sin x dx = -2(-\cos x) + C = 2 \cos x + C$$

سراسری تجربی ۹۱

۲۷ اگر  $f(x) = |x| - [x]$  ، حاصل  $\int_{-1}^2 f(x)dx$  ، کدام است ؟ ( نماد  $[ ]$  به مفهوم جزء صحیح است . )

- (۱)  $\frac{3}{2}$       (۲) ۲      (۳)  $\frac{5}{2}$       (۴) ۳

$$\int_{-1}^2 (|x| - [x])dx = \int_{-1}^2 (|x|)dx - \int_{-1}^2 ([x])dx = \int_{-1}^0 (|x|)dx + \int_0^2 (|x|)dx - (-1 + 0 + 1)$$

$$= \int_{-1}^0 (-x)dx + \int_0^2 (x)dx = -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \left[0 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] + \left[\frac{4}{2} - 0\right] = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

سراسری تجربی ۹۱

۲۸ اگر  $\int \frac{\Delta x^2 - 3x}{\sqrt{x}} dx = (2x\sqrt{x})f(x) + C$  باشد ، آنگاه  $f(x)$  کدام است ؟

- (۱)  $x - 2$       (۲)  $x - 1$       (۳)  $3x - 2$       (۴)  $\Delta x - 3$

$$\int \frac{\Delta x^2 - 3x}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int (\Delta x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}}) dx = \Delta \times \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 3 \times \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = 2x^2\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + C$$

$$= 2x\sqrt{x}(x - 1) + C \longrightarrow f(x) = x - 1$$

سراسری تجربی ۹۱ - خارج از کشور

۲۹ اگر  $f(x) = |x| + |x + 1|$  ، حاصل  $\int_{-1}^2 f(x)dx$  ، کدام است ؟

- (۱) ۵      (۲) ۶      (۳) ۶/۵      (۴) ۷

$$\int_{-1}^2 (|x| + |x + 1|)dx = \int_{-1}^0 (|x| + |x + 1|)dx + \int_0^2 (|x| + |x + 1|)dx$$

$$= \int_{-1}^0 (-x + x + 1)dx + \int_0^2 (x + x + 1)dx = \int_{-1}^0 (1)dx + \int_0^2 (2x + 1)dx$$

$$= x \Big|_{-1}^0 + (x^2 + x) \Big|_0^2 = [0 - (-1)] + [(4 + 2) - (0)] = 1 + 6 = 7$$

سراسری تجربی ۹۱ - خارج از کشور

اگر  $\int \frac{1-x}{x\sqrt{x}} dx = \frac{2f(x)}{\sqrt{x}} + C$  باشد، آن گاه  $f(x)$  کدام است؟

- (۱)  $-x-1$  (۲)  $x-2$  (۳)  $x+1$  (۴)  $2x-1$

$$\int \frac{1-x}{x\sqrt{x}} dx = \int \left( \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int \left( x^{-\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -2x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} + C = \frac{2}{\sqrt{x}}(-1-x) + C \longrightarrow f(x) = -1-x$$

۳۰

سراسری تجربی ۹۰

مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع  $f(x) = |2x-1|$  و محور  $x$  ها و دو خط  $x=1$  و  $x=-1$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲) ۲ (۳)  $\frac{5}{2}$  (۴) ۳

$$S = \int_{-1}^1 |2x-1| dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} |2x-1| dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |2x-1| dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (-2x+1) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x-1) dx$$

$$= (-x^2 + x) \Big|_{-1}^{\frac{1}{2}} + (x^2 - x) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \left[ \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) - (-1-1) \right] + \left[ (1-1) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) \right] = \frac{5}{2}$$

۳۱

سراسری تجربی ۹۰

با شرط  $x > 1$  داریم:  $\int \frac{3-3x}{1-\sqrt{x}} dx = x.f(x) + C$ ،  $f(x)$  برابر کدام است؟

- (۱)  $3+2\sqrt{x}$  (۲)  $3+\sqrt{x}$  (۳)  $3x-\sqrt{x}$  (۴)  $2x-3\sqrt{x}$

$$\frac{3-3x}{1-\sqrt{x}} = \frac{3(1-x)}{1-\sqrt{x}} = \frac{3(1-x)}{1-\sqrt{x}} \times \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{3(1-x)(1+\sqrt{x})}{(1-x)} = 3(1+\sqrt{x})$$

$$\int 3(1+\sqrt{x}) dx = 3\left(x + \frac{2}{3}x\sqrt{x}\right) + C = x(3+2\sqrt{x}) + C \longrightarrow f(x) = 3+2\sqrt{x}$$

۳۲

سراسری تجربی ۹۰ - خارج از کشور

۳۳ مساحت ناحیه محصور بین نمودار تابع با ضابطه  
 $f(x) = \begin{cases} x & , -2 \leq x \leq 0 \\ x^2 & , 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$  و محور X ها و دو خط  $x = -2$  و  $x = 3$  کدام است؟

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

$$\left| \int_{-2}^3 f(x) dx \right| = \left| \int_{-2}^0 x dx \right| + \left| \int_0^3 x^2 dx \right| = \left| \left( \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^0 \right| + \left| \left( \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 \right| = \left| [(0) - (2)] \right| + \left| (9) - (0) \right| = 11$$

سراسری تجربی ۹۰ - خارج از کشور

۳۴ اگر  $\int \frac{4x-4}{3\sqrt[3]{x^2}} dx = \sqrt[3]{x} \cdot f(x) + C$  ، آن گاه  $f(x)$  کدام است؟

۴x-1 (۴)

۲x-1 (۳)

x-2 (۲)

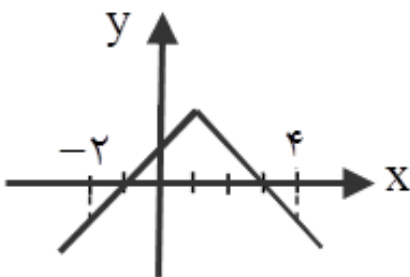
x-4 (۱)

$$\int \frac{4x-4}{3\sqrt[3]{x^2}} dx = \int \left( \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}} \right) dx = \frac{4}{3} \int \left( x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{2}{3}} \right) dx = \frac{4}{3} \times \left( \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \right) + C$$

$$= \frac{4}{3} \times \left( \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} - 3 \sqrt[3]{x} \right) + C = \sqrt[3]{x} (x-4) + C \rightarrow f(x) = x-4$$

سراسری تجربی ۸۹

با توجه به نمودار تابع  $f(x) = 2 - |x-1|$  ، حاصل انتگرال معین  $\int_{-2}^4 f(x) dx$  ، کدام است؟



5/2 (۲)

۲ (۱)

۳۵

7/2 (۴)

۳ (۳)

$$\int_{-2}^4 f(x) dx = \int_{-2}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx = -\frac{1}{2} + \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = 3$$

سراسری تجربی ۸۹

اگر  $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} \cdot f(x) + C$  باشد،  $f(x)$  کدام است؟

۳۶

(۱)  $1 - \sqrt{x} + \frac{1}{3}x$       (۲)  $1 + \sqrt{x} - \frac{1}{3}x$       (۳)  $2 - \sqrt{x} + \frac{2}{3}x$       (۴)  $2 - \sqrt{x} + 3x$

$$\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} dx = \int \frac{1-2\sqrt{x}+x}{2\sqrt{x}} dx = \int \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x} \right) dx = \int \left( \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 1 + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - x + \frac{1}{2} \times \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \sqrt{x} - x + \frac{1}{3}x\sqrt{x} + C = \sqrt{x} \left( 1 - \sqrt{x} + \frac{1}{3}x \right) + C$$

سراسری تجربی ۸۹ - خارج از کشور

اگر  $\int \frac{x-1}{x^3} dx = \frac{f(x)}{2x^2} + C$  ، آن گاه  $f(x)$  کدام است؟

۳۷

(۱)  $-x+2$       (۲)  $x-2$       (۳)  $-2x+1$       (۴)  $2x-1$

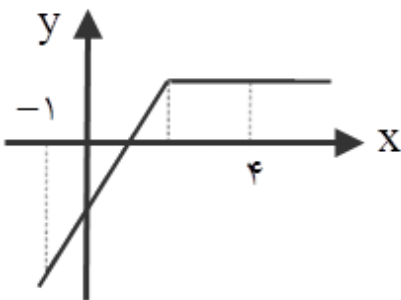
$$\int \frac{x-1}{x^3} dx = \int \left( \frac{x}{x^3} - \frac{1}{x^3} \right) dx = \int (x^{-2} - x^{-3}) dx = \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C$$

$$= \frac{1}{2x^2} (-2x+1) + C \rightarrow f(x) = 1-2x$$

سراسری تجربی ۸۹ - خارج از کشور

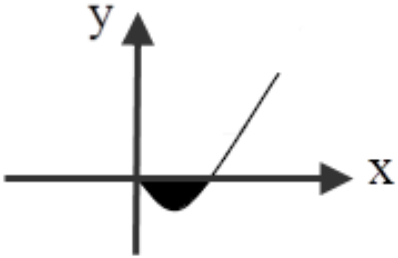
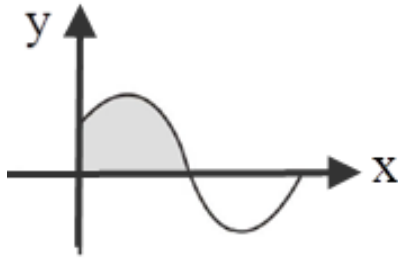
با توجه به نمودار تابع  $f(x) = x - |x-2|$  ، حاصل انتگرال معین  $\int_{-1}^4 f(x) dx$  ، کدام است؟

۳۸



(۱)  $\frac{1}{2}$       (۲)  $1$   
(۳)  $\frac{3}{2}$       (۴)  $2$

$$\int_{-1}^4 f(x) dx = \int_{-1}^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = -\frac{2 \times 4}{2} + \frac{5 \times 2}{2} = -4 + 5 = 1$$

<p>سراسری تجربی ۸۸</p> <p>۳۹ حاصل <math>\int_{-2}^2 (x + [x]) dx</math> ، کدام است ؟ ( نماد <math>[ ]</math> به مفهوم جزء صحیح است . )</p> <p>(۱) -۲      (۲) ۰      (۳) ۲      (۴) ۴</p> $\int_{-2}^2 (x + [x]) dx = \int_{-2}^2 (x) dx + \int_{-2}^2 ([x]) dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^2 + (-2 - 1 + 0 + 1) = [(2) - (-2)] - 2 = -2$	<p>سراسری تجربی ۸۸</p> <p>۴۰ با توجه به نمودار تابع با ضابطه <math>f(x) = x - \sqrt{x}</math> ، مساحت ناحیه سایه زده ، کدام است ؟</p>  <p>(۱) <math>\frac{1}{6}</math>      (۲) <math>\frac{1}{4}</math> (۳) <math>\frac{1}{3}</math>      (۴) <math>\frac{2}{3}</math></p> $\left  \int_0^1 (x - \sqrt{x}) dx \right  = \left  \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3} x \sqrt{x} \right]_0^1 \right  = \left  \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right) - (0) \right  = \left  -\frac{1}{6} \right  = \frac{1}{6}$
<p>سراسری تجربی ۸۸ - خارج از کشور</p> <p>۴۱ با توجه به قسمتی از نمودار تابع <math>f(x) = \sin x + \cos x</math> در شکل مقابل ، مساحت ناحیه سایه زده ، کدام است ؟</p>  <p>(۱) <math>2 - \sqrt{2}</math>      (۲) <math>\sqrt{2}</math> (۳) ۲      (۴) <math>1 + \sqrt{2}</math></p> $f(x) = \sin x + \cos x \xrightarrow{y=0} \sin x + \cos x = 0 \longrightarrow \tan x = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \longrightarrow$ $x = k\pi - \frac{\pi}{4} \xrightarrow{k=1} x = \frac{3\pi}{4}$	

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} (\sin x + \cos x) dx = (-\cos x + \sin x) \Big|_0^{\frac{3\pi}{4}} = \left(-\cos \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4}\right) - (-\cos 0 + \sin 0)$$

$$= \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} - (-1 + 0) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 1 + \sqrt{2}$$

سراسری تجربی ۸۸ - خارج از کشور

۴۲ حاصل  $\int_{-2}^2 (2 - [x]) dx$  ، کدام است ؟ ( نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است . )

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

$$\int_{-2}^2 (2 - [x]) dx = \int_{-2}^2 (2) dx - \int_{-2}^2 ([x]) dx = 2x \Big|_{-2}^2 - (-2 - 1 + 0 + 1) = [(4) - (-4)] - (-2) = 10$$

سراسری تجربی ۸۷

اگر  $G(x) = \int_2^x \frac{t}{\sqrt{1+t^3}} dt$  ، آنگاه مشتق راست تابع  $y = x.G(x)$  ، در نقطه  $x = 2$  کدام است ؟

$\frac{5}{3}$  (۴)

$\frac{4}{3}$  (۳)

$\frac{2}{3}$  (۲)

$\frac{1}{3}$  (۱)

$$y = \int_a^u f(t) dt \longrightarrow y' = u' \times f(u)$$

**نکته :** با توجه به اولین قضیه بنیادی حساب انتگرال ، داریم :

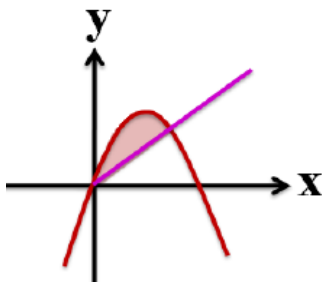
$$G(x) = \int_2^x \frac{t}{\sqrt{1+t^3}} dt \longrightarrow G'(x) = f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}$$

$$y = x.G(x) \longrightarrow y' = G(x) + x.G'(x) \longrightarrow y'(2) = G(2) + 2.G'(2)$$

$$y'(2) = \int_2^2 \frac{t}{\sqrt{1+t^3}} dt + 2 \times \frac{2}{\sqrt{1+8}} = 0 + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

سراسری تجربی ۸۷

مساحت ناحیه زیر منحنی به معادله  $y = -x^2 + 5x$  و بالای خط  $y = x$  کدام است ؟



$\frac{22}{3}$  (۲)

$\frac{16}{3}$  (۱)

$\frac{32}{3}$  (۴)

$\frac{28}{3}$  (۳)

۴۴



ابتدا باید نقاط برخورد (تقاطع) آن‌ها را مشخص می‌کنیم.

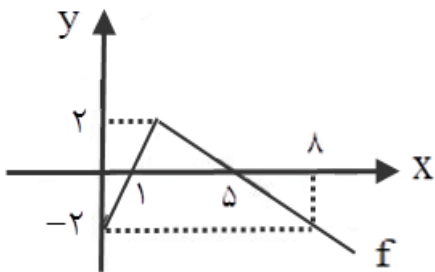
$$\begin{cases} y_1 = -x^2 + 5x \\ y_2 = x \end{cases} \longrightarrow -x^2 + 5x = x \longrightarrow x^2 - 4x = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow a = 0 \\ x = 4 \longrightarrow b = 4 \end{cases}$$

$$S = \left| \int_a^b (y_1 - y_2) \cdot dx \right| = \left| \int_0^4 (-x^2 + 5x - x) \cdot dx \right| = \left| \int_0^4 (-x^2 + 4x) \cdot dx \right| = \left| \left( -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \right) \right|_0^4$$

$$S = \left| \left( -\frac{64}{3} + 32 \right) - (0) \right| = \frac{32}{3}$$

سراسری تجربی ۸۷ - خارج از کشور

شکل مقابل نمودار تابع  $f$  است، حاصل  $\int_0^8 f(x) dx$  کدام است؟



- (۱)  $-\frac{1}{2}$   
(۲)  $0$   
(۳)  $\frac{1}{2}$   
(۴)  $1$

۴۵

$$\int_0^8 f(x) dx = S_1 + S_2 + S_3 = -\frac{1 \times 2}{2} + \frac{2 \times 4}{2} - \frac{3 \times 2}{2} = -1 + 4 - 3 = 0$$

سراسری تجربی ۸۷ - خارج از کشور

اگر  $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x}} dx = \frac{f(x)}{3\sqrt{x}} + C$ ، آن‌گاه  $f(x)$  کدام است؟

- (۱)  $2x - 3$   
(۲)  $2x + 2$   
(۳)  $2x^2 - 6$   
(۴)  $2x^2 + 3$

۴۶

$$\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x}} dx = \int \left( \frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \right) dx = \int \left( x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} \right) dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{x}}(2x^2 - 6) + C \longrightarrow f(x) = 2x^2 - 6$$

سراسری تجربی ۸۶

اگر  $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2 - x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} \cdot f(x) + C$ ، آن‌گاه  $f(x)$  کدام است؟

- (۱)  $1 + \sqrt{x}$   
(۲)  $1 + 2\sqrt{x}$   
(۳)  $2 + \sqrt{x}$   
(۴)  $2 + 2\sqrt{x}$

۴۷

$$\int \frac{(1+\sqrt{x})^2 - x}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{1+2\sqrt{x}+x-x}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{1+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 2\right) dx = \int (x^{-\frac{1}{2}} + 2) dx$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} + 2x + C = 2\sqrt{x} + 2x + C = \sqrt{x}(2+2\sqrt{x}) + C \longrightarrow f(x) = 2+2\sqrt{x}$$

سراسری تجربی ۸۶

حاصل  $\int_{-2}^2 (2x + |x|) dx$  کدام است؟

- (۱) ۳      (۲) ۴      (۳) ۶      (۴) ۸

$$\int_{-2}^2 (2x + |x|) dx = \int_{-2}^0 (2x + |x|) dx + \int_0^2 (2x + |x|) dx = \int_{-2}^0 (2x - x) dx + \int_0^2 (2x + x) dx$$

$$= \int_{-2}^0 (x) dx + \int_0^2 (3x) dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^0 + \left[ \frac{3x^2}{2} \right]_0^2 = (0 - 2) + (6 - 0) = 4$$

۴۸

سراسری تجربی ۸۶ - خارج از کشور

حاصل  $\int_{-2}^1 ([x]x) dx$  کدام است؟ (نماد  $[ ]$  به مفهوم جزء صحیح است.)

- (۱)  $\frac{3}{2}$       (۲)  $\frac{5}{2}$       (۳)  $\frac{7}{2}$       (۴) ۴

$$\int_{-2}^1 ([x]x) dx = \int_{-2}^{-1} ([x]x) dx + \int_{-1}^0 ([x]x) dx + \int_0^1 ([x]x) dx = \int_{-2}^{-1} (-2x) dx + \int_{-1}^0 (-x) dx + 0$$

$$= -x^2 \left[ \right]_{-2}^{-1} - \frac{1}{2} x^2 \left[ \right]_{-1}^0 = (-1 + 4) - (0 - \frac{1}{2}) = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

۴۹

سراسری تجربی ۸۶ - خارج از کشور

حاصل  $\int \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} dx$  کدام است؟

- (۱)  $x + \sin x + C$       (۲)  $x - \sin x + C$       (۳)  $-x + \cos x + C$       (۴)  $x - \cos x + C$

$$\int \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} dx = \int \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} dx = \int (1 + \cos x) dx = x + \sin x + C$$

۵۰

سراسری تجربی ۸۵

۵۱

اگر  $\int x(1-5\sqrt{x})dx = \frac{x^2}{2} \cdot f(x) + C$  ، تابع  $f(x)$  کدام است ؟

- (۱)  $1-4\sqrt{x}$  (۲)  $1-2\sqrt{x}$  (۳)  $x-2\sqrt{x}$  (۴)  $x-x\sqrt{x}$

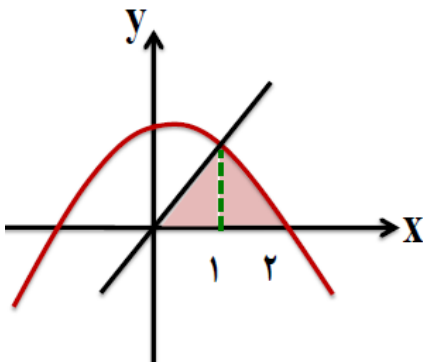
$$\int (x - 5x\sqrt{x})dx = \int (x - 5x^{\frac{3}{2}})dx = \frac{x^2}{2} - 5 \times \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{x^2}{2} - 2x^2\sqrt{x} + C$$

$$= \frac{x^2}{2} (1 - 4\sqrt{x}) + C \rightarrow f(x) = 1 - 4\sqrt{x}$$

سراسری تجربی ۸۵

۵۲

مساحت ناحیه محدود به منحنی  $y = 4 - x^2$  و خط به معادله  $y = 3x$  و محور  $x$  ها واقع در ناحیه اول کدام است ؟



- (۱)  $\frac{13}{6}$  (۲)  $\frac{7}{3}$   
(۳)  $\frac{8}{3}$  (۴)  $\frac{19}{6}$

**نکته:** اگر چند انتگرال دارای کران های بالا و پائین یکسان باشند ، می توان آن ها را ادغام کرد .

$$\begin{cases} y = 3x \\ y = 4 - x^2 \end{cases} \rightarrow 3x = 4 - x^2 \rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = 3$$

$$\int_0^1 (3x)dx + \int_1^2 (4 - x^2)dx = \left[ \frac{3x^2}{2} \right]_0^1 + \left[ 4x - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \left[ \left( \frac{3}{2} \right) - (0) \right] + \left[ \left( 8 - \frac{8}{3} \right) - \left( 4 - \frac{1}{3} \right) \right] = \frac{19}{6}$$

سراسری تجربی ۸۵ - خارج از کشور

۵۳

اگر  $\int \frac{1-x}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x} \cdot f(x) + C$  ، آن گاه  $f(x)$  ، کدام است ؟

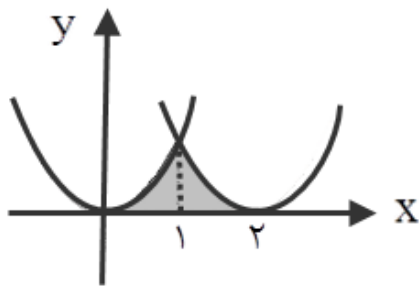
- (۱)  $2-3x$  (۲)  $2-x$  (۳)  $3-x$  (۴)  $3-2x$

$$\int \frac{1-x}{\sqrt{x}} dx = \int \left( \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}} \right) dx = \int \left( x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = 2\sqrt{x} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x}(3-x) + c \longrightarrow f(x) = 3-x$$

سراسری تجربی ۸۵ - خارج از کشور

مساحت ناحیه محدود به دو منحنی به معادلات  $y = x^2$  و  $y = (x-2)^2$  و محور  $x$  ها کدام است؟



$\frac{2}{3}$  (۲)       $\frac{1}{3}$  (۱)

$\frac{4}{3}$  (۴)      ۱ (۳)

۵۴

ابتدا باید سطح زیر نمودار تک تک منحنی ها را با محور  $x$  ها جداگانه محاسبه کرده و با هم جمع می کنیم.

$$S = S_1 + S_2 = \left| \int_0^1 x^2 \cdot dx \right| + \left| \int_1^2 (x-2)^2 \cdot dx \right| = \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 + \left[ \frac{1}{3} (x-2)^3 \right]_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

سراسری تجربی ۸۴

اگر  $f(x) = (x + |x|)[x]$  ، آنگاه  $\int_{-1}^2 f(x) dx$  برابر کدام است؟

۴ (۴)      ۳ (۳)      ۲ (۲)      ۱ (۱)

$$\int_{-1}^2 (x + |x|)[x] dx = \int_{-1}^0 (x-x)(-1) dx + \int_0^1 (x+x)(0) dx + \int_1^2 (x+x)(1) dx$$

$$= \int_1^2 (2x) dx = x^2 \Big|_1^2 = 4 - 1 = 3$$

۵۵

سراسری تجربی ۸۴

حاصل  $\int_0^1 \left( \sqrt[3]{x} + \frac{1}{(1+x)^2} \right) dx$  ، کدام است؟

$\frac{1}{4}$  (۴)       $\frac{3}{4}$  (۳)       $\frac{5}{4}$  (۲)       $\frac{3}{2}$  (۱)

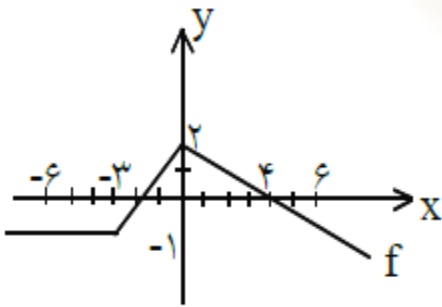
۵۶

$$\int_0^1 \left( \sqrt{x} + \frac{1}{(1+x)^2} \right) dx = \int_0^1 \left( x^{\frac{1}{2}} + (1+x)^{-2} \right) dx = \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{(1+x)^{-1}}{-1} \right]_0^1 = \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{1+x} \right]_0^1$$

$$= \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) - (0 - 1) = \frac{5}{6}$$

سراسری تجربی ۸۴ - خارج از کشور

شکل مقابل نمودار تابع  $f$  است، حاصل  $\int_{-6}^6 f(x) dx$ ، کدام است؟



(۱) ۱  
(۲)  $\frac{1}{2}$

(۳)  $\frac{2}{3}$   
(۴)  $\frac{5}{2}$

۵۷

**تعریف:** انتگرال معین  $\int_a^b f(x) dx$  برابر با مساحت سایه زده زیر نمودار تابع  $f$  از  $x = a$  تا  $x = b$  است.

$$\int_{-6}^6 f(x) dx = \int_{-6}^{-3} f(x) dx + \int_{-3}^0 f(x) dx + \int_0^6 f(x) dx = -\frac{3}{2} + 6 - 1 = \frac{3}{2}$$

توجه داشته باشیم عرض نقطه ای به طول  $(-6)$  برابر  $(-1)$  است.

سراسری تجربی ۸۴ - خارج از کشور

حاصل  $\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 dx$ ، کدام است؟

۵۸

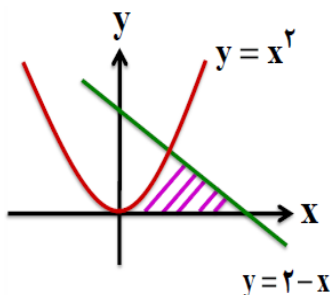
(۱)  $\frac{3}{2} - \ln 2$   
(۲)  $\frac{3}{2} - \ln 4$   
(۳)  $-\frac{1}{2} - \ln 2$   
(۴)  $-\frac{1}{2} - \ln 4$

$$\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int_1^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \left(x - 2 \ln x - \frac{1}{x}\right) \Big|_1^2 = F(2) - F(1)$$

$$= \left(2 - 2 \ln 2 - \frac{1}{2}\right) - \left(1 - 2 \ln 1 - 1\right) = \frac{3}{2} - 2 \ln 2 = \frac{3}{2} - \ln 4$$

سراسری تجربی ۸۳

با توجه به شکل مقابل، مساحت ناحیه سایه زده چقدر است؟



(۱)  $\frac{4}{3}$   
(۲)  $\frac{7}{6}$

(۳)  $\frac{5}{6}$   
(۴)  $\frac{2}{3}$

۵۹

**اولاً:** محل تلاقی دو منحنی را به دست می آوریم **ثانیاً:** محل تلاقی خط با محور طول ها را به دست می آوریم .

$$(I) \begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 - x \end{cases} \longrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \longrightarrow \text{True} \\ x = -2 \longrightarrow \text{false} \end{cases}$$

$$(II) y = 0 \longrightarrow 2 - x = 0 \longrightarrow x = 2$$

$$\int_0^1 (x^2) dx + \int_1^2 (2 - x) dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[ 2x - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \left[ \left( \frac{1}{3} \right) - (0) \right] + \left[ (4 - 2) - \left( 2 - \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{5}{6}$$

سراسری تجربی ۸۳

اگر  $\int (3\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}) dx = \sqrt{x} \cdot f(x) + C$  ، آنگاه  $f(x)$  برابر کدام است ؟

(۱)  $3x - 1$       (۲)  $3x - 2$       (۳)  $2x - 2$       (۴)  $x - 2$

$$\int (3\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}) dx = \int (3x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}) dx = 3 \times \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C = \sqrt{x}(2x - 2) + C \longrightarrow f(x) = 2x - 2$$

۶۰

سراسری تجربی ۸۲

اگر  $\int \frac{3x-2}{\sqrt{x}} dx = f(x) \cdot \sqrt{x} + C$  ، آنگاه  $f(x)$  برابر کدام است ؟

(۱)  $2x - 1$       (۲)  $2x - 4$       (۳)  $3x - 2$       (۴)  $3x - 4$

$$\int \frac{3x-2}{\sqrt{x}} dx = \int \left( \frac{3x}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} \right) dx = \int (3x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}}) dx = 3 \times \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2 \times \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2x\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + C$$

$$= \sqrt{x}(2x - 4) + C \longrightarrow f(x) = 2x - 4$$

۶۱

سراسری تجربی ۸۲

حاصل  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$  کدام است ؟

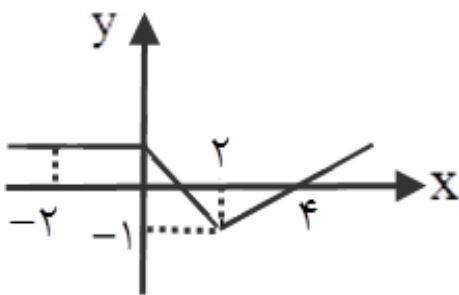
(۱)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$       (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       (۴)  $\sqrt{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x) dx = \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} \left( \sin \frac{\pi}{3} - \sin 0 \right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

۶۲

سراسری تجربی ۸۱

شکل مقابل نمودار تابع  $f$  است. حاصل  $\int_{-2}^4 f(x)dx$  کدام است؟



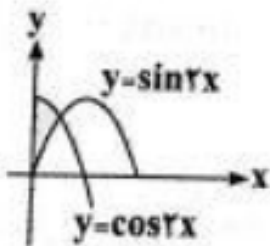
- (۱)  $\frac{1}{2}$   
(۲)  $-\frac{1}{2}$   
(۳) ۱  
(۴)  $\frac{3}{2}$

۶۳

$$\int_{-2}^4 f(x)dx = \int_{-2}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^2 f(x)dx + \int_{2}^4 f(x)dx = \frac{(3+2) \times 1}{2} - \frac{3 \times 1}{2} = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1$$

سراسری تجربی ۸۰

مساحت ناحیه ی سایه دار، در شکل مقابل کدام است؟



- (۱)  $2 - \sqrt{2}$   
(۲)  $\sqrt{2} - 1$   
(۳)  $\frac{1}{2}(2 - \sqrt{2})$   
(۴)  $\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$

۶۴

$$\int \sin ax \cdot dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C \quad \int \cos ax \cdot dx = \frac{1}{a} \sin ax + C$$

نکته:

ابتدا محل تلاقی دو نمودار را پیدا می کنیم. یعنی  $f(x) = g(x)$

$$\sin 2x = \cos 2x \longrightarrow \tan 2x = 1 = \tan \frac{\pi}{4} \longrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} \longrightarrow x = \frac{\pi}{8}$$

$$S = \left| \int_0^{\frac{\pi}{8}} (\sin 2x - \cos 2x) dx \right| = \left| \left[ -\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{8}} \right| = \left| \left( -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) - \left( -\frac{1}{2} - 0 \right) \right|$$

$$= \left| -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} |1 - \sqrt{2}| = \frac{1}{2} (\sqrt{2} - 1)$$

سراسری تجربی ۷۹

مساحت ناحیه محدود بین منحنی به معادله  $y = x^2 + 2x$  و محور  $x$  ها و دو خط به معادلات  $x = -1$  و  $x = 1$  کدام است؟

- (۱) ۲  
(۲) ۲/۵  
(۳) ۳  
(۴) ۳/۵

۶۵

$$y = x^3 + 2x \xrightarrow{y=0} x^3 + 2x = 0 \longrightarrow x(x^2 + 2) = 0 \longrightarrow x = 0$$

$$S = \left| \int_{-1}^0 (x^3 + 2x) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^3 + 2x) dx \right| = \left| \left( \frac{x^4}{4} + x^2 \right) \Big|_{-1}^0 \right| + \left| \left( \frac{x^4}{4} + x^2 \right) \Big|_0^1 \right|$$

$$= \left| (0) - \left( \frac{1}{4} + 1 \right) \right| + \left| \left( \frac{1}{4} + 1 \right) - (0) \right| = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

سراسری تجربی ۷۹

اگر  $\int \frac{\sqrt{x}-1}{x^2} dx = \frac{f(x)}{x} + C$  ، آنگاه  $f(x)$  کدام است ؟

۲ -  $\sqrt{x}$  (۴)      ۱ -  $2\sqrt{x}$  (۳)       $x + \sqrt{x}$  (۲)       $x - \sqrt{x}$  (۱)      ۶۶

$$\int \frac{\sqrt{x}-1}{x^2} dx = \int \left( \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int (x^{-\frac{3}{2}} - x^{-2}) dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{-2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + C$$

$$= \frac{1}{x} (-2\sqrt{x} + 1) + C \longrightarrow f(x) = 1 - 2\sqrt{x}$$

سراسری تجربی ۷۹

اگر  $F(x) = \int \frac{\cos x}{1 - \cos 2x} dx$  ، حاصل  $F(\frac{\pi}{2}) - F(\frac{\pi}{6})$  کدام است ؟

$\frac{1}{4}$  (۴)       $\frac{1}{2}$  (۳)      ۱ (۲)      ۲ (۱)      ۶۷

**نکته:** در روش تغییر متغیر ، عامل  $u$  ، باید طوری انتخاب شود که مشتق آن جلوی انتگرال باشد .

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$F(x) = \int \frac{\cos x}{1 - \cos 2x} dx = \int \frac{\cos x}{2\sin^2 x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx \xrightarrow{\sin x=t, \cos x dx=dt} \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \int t^{-2} du$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{2t} + C = -\frac{1}{2\sin x} + C \longrightarrow F(\frac{\pi}{2}) - F(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2\sin \frac{\pi}{2}} - \left( -\frac{1}{2\sin \frac{\pi}{6}} \right) = \frac{1}{2}$$

سراسری تجربی ۷۸

مساحت محدود به نمودار تابع با ضابطه  $y = x^3 - 4x$  و خطوط  $x = 2$  و  $x = 0$  و محور  $x$  ها کدام است ؟

$\frac{21}{4}$  (۴)      ۶ (۳)      ۴ (۲)       $\frac{19}{4}$  (۱)      ۶۸



$$y = x^3 - 4x \xrightarrow{y=0} x^3 - 4x = 0 \longrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow \text{True} \\ x = 2 \longrightarrow \text{True} \\ x = -2 \longrightarrow \text{false} \end{cases}$$

$$S = \left| \int_0^2 (x^3 - 4x) dx \right| = \left| \left[ \frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_0^2 \right| = |(4 - 8) - (0)| = 4$$

سراسری تجربی ۷۸  
اگر  $F(b) = \int_{-1}^b \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x}}$  مقدار  $F(0)$  کدام است؟

$\frac{\pi}{6}$  (۴)

$\frac{\pi}{4}$  (۳)

$\frac{\pi}{3}$  (۲)

$\frac{\pi}{2}$  (۱)

۶۹

$$F(b) = \int_{-1}^b \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x}} = \frac{1}{3} \int_{-1}^b \frac{dx}{\sqrt{1 - (x+1)^2}} = \frac{1}{3} \text{Arcsin}(x+1) \Big|_{-1}^b$$

$$F(b) = \frac{1}{3} \text{Arcsin}(b+1) \longrightarrow F(0) = \frac{1}{3} \text{Arcsin}(1) = \frac{1}{3} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$

سراسری تجربی ۷۸  
حاصل  $\int_{-1}^2 \sqrt{x+2} dx$  ، کدام است؟

$\frac{14}{3}$  (۴)

$\frac{13}{3}$  (۳)

$\frac{5}{3}$  (۲)

$\frac{10}{3}$  (۱)

۷۰

$$\int_{-1}^2 \sqrt{x+2} dx = \int_{-1}^2 (x+2)^{\frac{1}{2}} dx = \left[ \frac{2}{3} (x+2)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^2 = \left[ \frac{2}{3} \sqrt{(x+2)^3} \right]_{-1}^2 = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

سراسری تجربی ۷۸  
اگر  $F(x) = \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx$  مقدار  $F(\frac{\pi}{3}) - F(0)$  کدام است؟

$2 - \sqrt{2}$  (۴)

$\sqrt{2} - 1$  (۳)

$2\sqrt{2} - 1$  (۲)

$\frac{1}{2}(2 - \sqrt{2})$  (۱)

۷۱

**نکته:** در روش تغییر متغیر، عامل  $u$ ، باید طوری انتخاب شود که مشتق آن جلوی انتگرال باشد.

$$\cos x = u \longrightarrow -\sin x dx = du \longrightarrow \sin x dx = -du$$

$$F(x) = \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx = \int \frac{-du}{\sqrt{u}} = -\int u^{-\frac{1}{2}} du = -2u^{\frac{1}{2}} + C = -2\sqrt{u} + C = -2\sqrt{\cos x} + C$$

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\sqrt{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{2} + C \quad F(0) = -2 + C \quad F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F(0) = 2 - \sqrt{2}$$

سراسری تجربی ۷۷

مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع  $y = (x-3)^2$  و  $y = -3x+9$  کدام است؟

۷/۵ (۴)

۶ (۳)

۴/۵ (۲)

۳ (۱)

$$\begin{cases} y = (x-3)^2 \\ y = -3x+9 \end{cases} \longrightarrow x^2 - 6x + 9 = -3x + 9 \longrightarrow x^2 - 3x = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

۷۲

$$S = \left| \int_0^3 (x^2 - 3x) dx \right| = \left| \left( \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_0^3 \right| = \left| \left( 9 - \frac{27}{2} \right) - (0) \right| = \left| -\frac{9}{2} \right| = \frac{9}{2}$$

سراسری تجربی ۷۷

اگر  $\int \frac{(1-\sqrt{3x})(1+\sqrt{3x})}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{x}.f(x) + C$  ، آنگاه  $f(x)$  ، کدام است؟

۱+x (۴)

۱+۲x (۳)

۲-x (۲)

۲-۲x (۱)

$$\int \frac{(1-\sqrt{3x})(1+\sqrt{3x})}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{(1-3x)}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int \left( \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{3x}{x^{\frac{1}{2}}} \right) dx = \int (x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}}) dx$$

۷۳

$$= \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - 3 \times \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = 2\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + C = \sqrt{x}(2-2x) + C \longrightarrow f(x) = 2-2x$$

سراسری تجربی ۷۷

اگر  $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{1+\sqrt[3]{t}}$  ، مقدار مشتق  $F(x^3)$  به ازای  $x=2$  چقدر است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۷۴

$$y = \int_a^u f(t) dt \longrightarrow y' = u' \times f(u)$$

**نکته:** با توجه به اولین قضیه بنیادی حساب انتگرال ، داریم :

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{1+\sqrt[3]{t}} \rightarrow F'(x) = \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}} \rightarrow F'(x^3) = \frac{1}{1+\sqrt[3]{x^3}} = \frac{1}{1+x}$$

$$y = F(x^3) \rightarrow y' = 3x^2 \times F'(x^3) \rightarrow y' = \frac{3x^2}{1+x} \xrightarrow{x=2} y'(2) = \frac{12}{3} = 4$$

سراسری تجربی ۷۶

حاصل انتگرال  $\int \frac{(1+\cos x)^2}{\sin^2 x} dx$  کدام است؟

۷۵

(۱)  $\cot x + x + C$  (۲)  $\tan x + x + C$  (۳)  $-\cot \frac{x}{2} + x + C$  (۴)  $-\cot \frac{x}{2} - x + C$

$$\int \frac{(1+\cos x)^2}{\sin^2 x} dx = \int \frac{(1+\cos x)^2}{1-\cos^2 x} dx = \int \frac{(1+\cos x)^2}{(1-\cos x)(1+\cos x)} dx = \int \frac{1+\cos x}{1-\cos x} dx$$

$$= \int \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int \cot^2 \frac{x}{2} dx = \int \left[ (1 + \cot^2 \frac{x}{2}) - 1 \right] dx = -\frac{1}{2} \cot \frac{x}{2} - x + C$$

$$= -\cot \frac{x}{2} - x + C$$

با توجه به نمودار تابع  $f(x) = |2x-1|-3$ ، حاصل انتگرال  $\int_{-2}^3 f(x)$  کدام است؟

(۱) ۰ (۲)  $2/5$  (۳)  $-2/5$  (۴)  $6/5$

ابتدا محل برخورد نمودار تابع با محور X ها را به دست می آوریم.

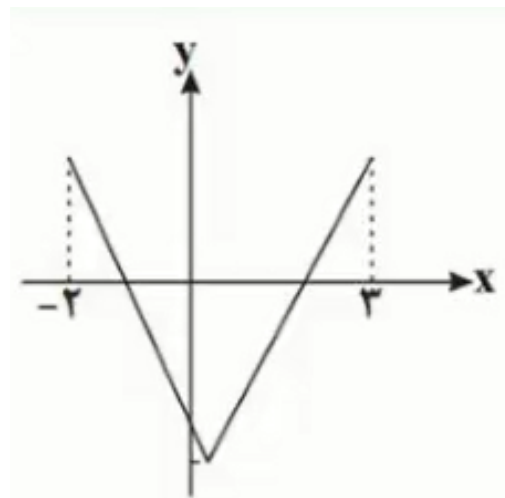
$$f(x) = |2x-1|-3 \xrightarrow{y=0} |2x-1|=3$$

$$2x-1=3 \rightarrow x=2$$

$$2x-1=-3 \rightarrow x=-1$$

$$f(-2) = f(3) = 2$$

$$\int_{-2}^3 f(x) dx = \frac{1 \times 2}{2} - \frac{3 \times 3}{2} + \frac{1 \times 2}{2} = -\frac{5}{2}$$



۷۶



همکاران و دانش آموزان عزیز ، تست هائی که در اختیار شما قرار گرفته است ، زحمات چندین ساله بنده می باشد ، به همین خاطر قبل از مطالعه هزینه این جزوات را پرداخت کنید و هزینه آن یک صلوات و یک فاتحه برای روح پدر عزیزم است .

با تشکر : **سید علی موسوی**

همکاران و دانش آموزان عزیز اگر اشکال تایپی یا راه حل های بهتری داشتید بنده را  
همراهی کنید و پیشنهادات و نظرات خود را به آدرس تلگرام ( ۰۹۱۵۳۲۱۵۶۱۴ )  
و یا به ایمیل [seyedalimousavi48@gmail.com](mailto:seyedalimousavi48@gmail.com) ارسال فرمائید .

با سپاس فراوان از شما عزیزان