



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

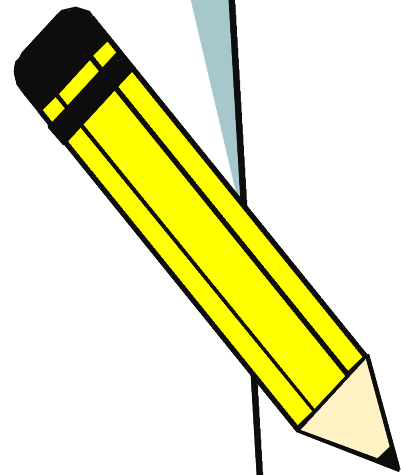
دردوین این جزوه از کتاب:

آموزش شگفت انگیز هندسه ۱ نوشته علی منصف شکری نهایت استفاده شده است.

همچنین از مثال های کتاب های زیر نیز استفاده شده است:

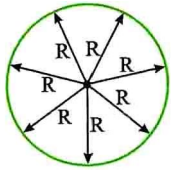
۱- نردبام ریاضی ۲ (علی شهرابی - سروش موئینی - رسول محسنی منش)

۲- آی کیو گاج ریاضی یازدهم تجربی (پیام کریمی نیا)



ترسیم های هندسی

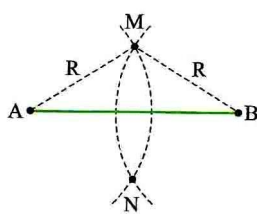
دایره: مجموعه نقاطی از یک صفحه است که به فاصله ثابتی از یک نقطه ثابت مرکز دایره و آن مقدار ثابت شعاع دایره است.



حال برای اینکه بتوانیم مسائل این بخش را به خوبی حل و فصل کنیم بهتر است وضعیت دو دایره را نسبت به هم بدانیم:

وضعیت دو دایره: دو دایره نسبت به هم ۶ وضعیت عمده دارند که برای دانستن وضعیت آن ها باید فاصله مرکزها (طول خط مرکزی) را بدانیم که آن را با $d = AB$ نشان می دهیم و حال باید d را با $R_1 + R_2$ و $R_1 - R_2$ مقایسه کنیم که در این صورت ۶ وضعیت پیش می آید:

<p>❶ متخارج: اگر $d > R_1 + R_2$ باشد، دو دایره متخارج هستند.</p>	<p>❷ مماس خارج: اگر $d = R_1 + R_2$ باشد، دو دایره مماس خارج اند.</p>
<p>❸ مقاطع: اگر $R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$ باشد، دو دایره متقاطع اند.</p>	<p>❹ مماس داخل: اگر $d = R_1 - R_2$ باشد، دو دایره مماس داخل اند.</p>
<p>❺ متداخل: اگر $d < R_1 - R_2$ باشد، دو دایره متداخل اند.</p>	<p>❻ هم مرکز: اگر $d = 0$ باشد دو دایره هم مرکز هستند.</p>



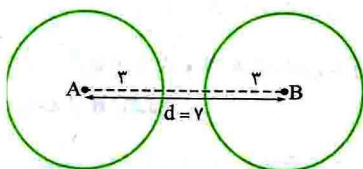
کاربرد اول: پیدا کردن نقاط با فاصله خاص از دو نقطه: اگر دو نقطه A و B به

فاصله L از هم قرار داشته باشند، می توانیم نقاطی پیدا کنیم که به فاصله مساوی از A و B قرار داشته باشند. برای این منظور کافی است دهانه یک پرگار را به اندازه بزرگتر از $\frac{L}{2}$ باز کنیم و به مراکز A و B کمان هایی بزنیم. چون دهانه پرگار بیش از نصف طول پاره خط باز شده است، این کمان ها حتماً همدیگر را قطع می کنند و محل تقاطع آنها از A و B به یک فاصله است.

◀ *مواست باشه!* اگر دهانه پرگار کمتر از $\frac{L}{2}$ باز شود، دو کمان همدیگر را قطع نمی کنند.

سؤال: دو نقطه A و B به فاصله 7 واحد از هم قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصله 3 واحد از هر

کدام آن ها باشد؟



۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴ بی شمار)

۳ (هیچ)

گزینه ۳- نقاطی که به فاصله ۳ واحد از A قرار دارند، روی دایره ای به مرکز A و به شعاع ۳ واقع اند و هم چنین نقاطی که به فاصله ۳ واحد از B واقع اند، روی دایره ای به مرکز B و به شعاع ۳ قرار دارند. اما چون $3+3 < 7$ است این دو دایره همدیگر را قطع نمی کنند و چنین نقطه ای وجود ندارد.

سؤال ۲: دو نقطه A و B به فاصله ۸ واحد از هم واقع اند. چند نقطه وجود دارد که به فاصله ۵ واحد از هر کدام آنها

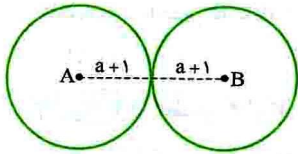
باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) هیچ (۴) بی شمار

گزینه ۲- چون $8 < 5+5$ می باشد دو دایره به مراکز A و B و به شعاع ۵ همدیگر را قطع می کنند و دو نقطه وجود دارد.

سؤال ۳: دو نقطه A و B به فاصله $5a-7$ واحد از هم قرار گرفته اند. اگر تنها یک نقطه وجود داشته باشد که به

فاصله $a+1$ واحد از A و B واقع باشد مقدار a کدام است؟



- (۱) ۴
(۲) ۲/۵
(۳) ۳/۵
(۴) ۳

گزینه ۴- برای این که تنها یک نقطه به فاصله $a+1$ از نقاط A و B وجود داشته باشد، باید دایره های به مراکز A و B و به شعاع $a+1$ مماس خارج باشند یعنی:

$$AB = R_1 + R_2 \Rightarrow 5a - 7 = a + 1 + a + 1 \Rightarrow 3a = 9 \Rightarrow a = 3$$

مماس باشد! در تست فوق امکان این که دو دایره مماس داخل باشند وجود ندارد، چون شعاع های آن ها برابر است و اگر مماس داخل باشند $d = 0$ می شود در حالی که $d = 5a - 7$ است. در ضمن اگر در این حالت هم دو دایره مماس داخل باشند بر هم منطبق شده و بی شمار نقطه ای مشترک دارند.

سؤال ۴: دو نقطه A و B به فاصله $7a-6$ واحد از هم واقع اند. اگر دو نقطه به فاصله $2a+1$ واحد از هر کدام آن ها

وجود داشته باشد، a کدام است؟

- (۱) $a > 2$ (۲) $0 < a < 2$ (۳) $a = 2$ (۴) $\frac{6}{7} < a < \frac{8}{3}$

گزینه ۴- باید دو دایره متقاطع باشند یعنی $|R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2$ بنابراین:

$$0 < 7a - 6 < 2a + 1 + 2a + 1 \Rightarrow \frac{6}{7} < a < \frac{8}{3}$$

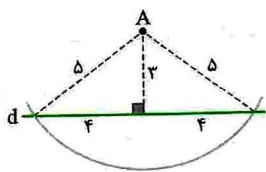
سؤال ۵: دو نقطه A و B به فاصله $5a-4$ واحد از هم واقع اند. اگر تنها یک نقطه به فاصله $2a-1$ واحد از هر دوی آن ها وجود داشته باشد، چند نقطه وجود دارد که به فاصله ۴ واحد از هر کدام باشد؟
 ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (هیچ) ۴ (۴)

گزینه ۲- باید دو دایره به شعاع $2a-1$ بر هم مماس خارج باشند یعنی $d = R_1 + R_2$ باشد:

$$5a - 4 = 2a - 1 + 2a - 1 \Rightarrow a = 2$$

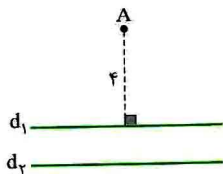
حال فاصله A و B برابر است با $5a - 4 = 6$ حال چون $6 < 4 + 4$ است دو نقطه به فاصله ۴ واحد از هر کدام یافت می شود.

سؤال ۶: نقطه A به فاصله ۳ واحد از خط d قرار دارد، چند نقطه به فاصله ۵ واحد از نقطه A روی خط d وجود دارد؟
 ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (هیچ) ۴ (بی شمار)



گزینه ۲- نقاطی که به فاصله ۵ واحد از A قرار دارند، روی دایره ای به شعاع ۵ و به مرکز A قرار دارند که این دایره چون شعاعش بزرگتر از ۳ است، خط d را در دو نقطه قطع می کند.

سؤال ۷: دو خط d_1 و d_2 به فاصله ۲ واحد از هم قرار دارند. نقطه A مطابق شکل به فاصله ۴ واحد از خط d_1 قرار دارد. مجموعاً چند نقطه روی این خطوط وجود دارد که به فاصله ۶ واحد از این نقطه قرار داشته باشند؟



- ۱ (۱)
 ۲ (۲)
 ۳ (۳)
 ۴ (۴)

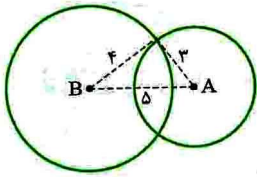
گزینه ۳- نقاطی که به فاصله ۶ واحد از A قرار دارند دایره ای به شعاع ۶ و به مرکز A هستند که خط d_1 را در دو نقطه قطع می کنند و بر d_2 مماس می شوند. یعنی جمعاً ۳ نقطه روی این دو خط وجود دارد.

کاربرد دوم: پیدا کردن نقاطی به فاصله های متفاوت از دو نقطه: اگر دو نقطه A و B به فاصله L از هم قرار داشته باشند می توان نقاطی در صفحه یافت که به فاصله d_1 از A و به فاصله d_2 از B باشد. کافی است به مرکز A و به شعاع d_1 و به مرکز B و به شعاع d_2 دایره ای رسم کنیم. حال وضعیت این دو دایره نسبت به هم تعداد جواب های ممکن را به ما می دهد که چند حالت رخ می دهد:

۱. اگر دو دایره متقاطع باشند، مسئله دو جواب دارد.
 ۲. اگر دو دایره متخارج یا متداخل باشند مسئله جواب ندارد.
 ۳. اگر دو دایره مماس خارج یا داخل باشند مسئله یک جواب دارد.
- برای درک بهتر یک بار دیگر به شکل های وضعیت دو دایره نگاه کنید.

سؤال ۸: نقاط A و B به فاصله ۵ واحد از هم واقع اند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصله ۳ واحد از A و به فاصله ۴ واحد از B باشد؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) هیچ ۴) بی شمار



گزینه ۲- نقاطی که به فاصله ۳ واحد از A قرار دارند، روی دایره ای به مرکز A به شعاع ۳ قرار دارند و هم چنین نقاطی که به فاصله ۴ واحد از B قرار دارند، روی دایره ای به شعاع ۴ و به مرکز B قرار دارند، حال چون $4-3 < 5 < 4+3$ قرار دارد دو دایره متقاطع اند و مسئله دو جواب دارد.

سؤال ۹: دو نقطه A و B به فاصله ۷ واحد از هم قرار دارند، چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصله ۹ واحد از A و به فاصله ۲ واحد از B باشد؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) هیچ ۴) بی شمار

گزینه ۱- چون $9-2=7$ می باشد دو دایره مماس داخل اند و تنها یک نقطه وجود دارد.

سؤال ۱۰: دو نقطه A و B به فاصله $4a+1$ واحد از هم قرار دارند، اگر تنها یک نقطه به فاصله $2a-1$ واحد از A و به فاصله $a+3$ واحد از B وجود داشته باشد، مقدار a کدام است؟

- ۱) $0/6$ و ۲ ۲) $0/8$ و ۱ ۳) $0/6$ و $0/4$ ۴) $0/6$ و ۱

گزینه ۳- باید دایره های به مراکز A و B و به شعاع گفته شده، مماس داخل یا خارج باشند:

$$1) d = R_1 + R_2 \Rightarrow 4a+1 = (2a-1) + (a+3) \Rightarrow a=1$$

$$2) d = |R_1 - R_2| \Rightarrow 4a+1 = |a+3 - (2a-1)| \Rightarrow 4a+1 = |-a+4| \Rightarrow \begin{cases} 4a+1 = -a+4 \Rightarrow 5a=3 \Rightarrow a = \frac{3}{5} = 0/6 \\ 4a+1 = a-4 \Rightarrow 3a = -5 \Rightarrow a = -\frac{5}{3} \text{ غ ق} \end{cases}$$

بنابراین برای a دو جواب ۱ و $0/6$ به دست آمد.

سؤال ۱۱: دو نقطه A و B به فاصله $4a-3$ واحد از هم قرار گرفته اند. اگر هیچ نقطه ای به فاصله $2a$ واحد از A و به فاصله $a+2$ واحد از B وجود نداشته باشد حدود a کدام می تواند باشد؟

- ۱) $0 < a < 5$ ۲) $a = 5$ ۳) $a > 5$ ۴) $2 < a < 5$

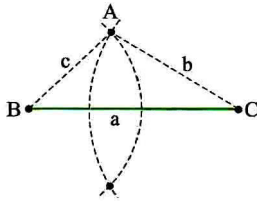
گزینه ۳- دو دایره یا باید متخارج باشند یا متداخل. اگر فرض کنیم متخارج باشند باید $d > R_1 + R_2$ باشد یعنی $4a-3 > 2a+a+2$ در نتیجه $a > 5$ که در گزینه ها وجود دارد. می توان حالت متداخل یعنی $d < |R_1 - R_2|$ را نیز بررسی کرد که البته جواب a در این حالت در گزینه ها نیست.

سؤال ۱۲: دو نقطه A و B به فاصله $3a-2$ واحد از هم قرار گرفته اند. اگر دقیقاً دو نقطه به فاصله $1/5$ واحد از A و به فاصله $2/5$ واحد از B وجود داشته باشد حدود a کدام است؟

(۱) $a > 2$ (۲) $\frac{2}{3} < a < 2$ (۳) $1 < a < 2$ (۴) $\frac{2}{3} < a < 1$

گزینه ۳- باید دو دایره متقاطع باشند یعنی: $1 < a < 2 \Rightarrow 3 < 3a < 6 \Rightarrow 1 < 3a - 2 < 4 \Rightarrow |R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2$

رسم مثلث: اگر اضلاع مثلثی a و b و c باشند برای رسم آن باید ابتدا پاره خطی به طول a رسم کنیم مانند BC



سپس دهانه پرگار را به اندازه b باز کرده و به مرکز C کمانی می زنیم و بار دیگر دهانه پرگار را به اندازه c باز کرده و به مرکز B کمانی می زنیم. اگر این کمان ها همدیگر را قطع کنند محل تقاطع آنها رأس A از مثلث ABC است.

مواست باشه! همان طور که در شکل می بینید اگر کمان ها متقاطع باشند در دو نقطه همدیگر را قطع می کنند و به ظاهر به نظر می رسد که دو مثلث متفاوت به دست می آید

اما اگر دقت کنید متوجه می شوید اضلاع مثلث دوم هم همین a, b, c است یعنی دو مثلث **قابل انطباق** یا **همنهشت** یا به قول معروف عین هم هستند. یعنی تنها یک مثلث با این اضلاع وجود دارد.

حال سوال این است که در چه صورتی با سه ضلع معلوم یک مثلث قابل رسم است؟

راه های هیجان انگیز:

قضیه وجود مثلث: در صورتی یک مثلث به اضلاع a, b و c وجود دارد که هر ضلع آن از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر باشد. یعنی اگر $a > b > c$ باشد باید بزرگترین ضلع مثلث از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر باشد.

$$a < b + c$$

اما اگر ندانیم کدام ضلع کوچکتر یا بزرگتر است یعنی اضلاع پارامتری باشند دو حالت رخ می دهد:

۱. **تنها یک ضلع پارامتری است:** اگر یک ضلع مثلث مجهول و دو ضلع دیگر معلوم باشد در صورتی این مثلث قابل

رسم است که ضلع مجهول بین تفاضل و جمع دو معلوم باشد یعنی:

$$|b - c| < a < b + c$$

۲. **بیش از یک ضلع پارامتری است:** اگر دو ضلع یا هر سه ضلع مثلث برحسب پارامتر داده شده بود مثلاً $2a + 1$ و

$3a - 5$ برای این که ببینیم مقدار پارامتر چه چیزی باید باشد تا مثلث قابل رسم شود، باید هر کدام از اضلاع

را از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر قرار دهید و از نامساوی های به دست آمده اشتراک بگیرید.

مواست باشه! اگر سه عدد داده شده یا با آن ها مثلثی رسم نمی شود یا اگر رسم شود تنها یک مثلث قابل رسم است.

(مثلث های دیگر در صورت وجود قابل انطباق و همنهشت با همین مثلث هستند.)

سؤال ۱۳: با کدام یک از اعداد داده شده می توان یک مثلث رسم کرد؟

(۱) ۵، ۳، ۲ (۲) ۸، ۴، ۳ (۳) ۹، ۸، ۴ (۴) ۱۰، ۷، ۲/۵

گزینه ۳- چون هر سه ضلع معلوم است هنگامی مثلث قابل رسم است که مجموع دو عدد کوچکتر بیش از عدد بزرگتر

باشد، که تنها گزینه ۳ به این صورت است: $4 + 8 > 9$

سؤال ۱۴: با کدام سه طول داده شده می توان یک مثلث رسم کرد؟ ($a, b > 0$)

(۱) $a, b, a+b+1$ (۲) $a+1, b+1, a+b$

(۳) $a^2, (a+1)^2, a^2+3a+1$ (۴) $a-2, 2a, 3a$

گزینه ۲- چون جمع دو ضلع کوچک یعنی $a+1$ و $b+1$ همواره از $a+b$ بزرگتر است.

سؤال ۱۵: چند مثلث وجود دارد که اضلاع آن $\frac{3}{5}$ ، 11 و 8 باشد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) هیچ (۴) بی شمار

گزینه ۱- چون $\frac{3}{5} + 8 < 11$ است بنابراین یک مثلث وجود ندارد.

سؤال ۱۶: چند مثلث با محیط ۱۷ وجود دارد که اندازه یکی از اضلاع آن ۹ باشد؟

(۱) ۱ (۲) هیچ (۳) ۲ (۴) بی شمار

گزینه ۲- اگر اندازه یک ضلع ۹ باشد چون محیط ۱۷ است جمع دو ضلع دیگر باید ۸ باشد که غیرممکن است.

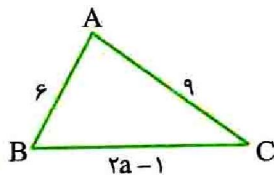
سؤال ۱۷: اگر بتوان مثلثی به اضلاع $a-1$ ، 3 و 7 رسم کرد حدود a کدام است؟

(۱) $4 < a < 10$ (۲) $5 < a < 11$ (۳) $4 < a < 8$ (۴) $3 < a < 7$

گزینه ۲- چون یک ضلع مجهول و دو ضلع دیگر معلوم است این ضلع باید بین تفاضل و جمع دو معلوم قرار گیرد یعنی:

$$7 - 3 < a - 1 < 7 + 3 \Rightarrow 4 < a - 1 < 10 \xrightarrow{+1} 5 < a < 11$$

سؤال ۱۸: با توجه به شکل زیر حدود a کدام است؟



(۱) $0 < a < 6$

(۲) $1 < a < 7$

(۳) $3 < a < 9$

(۴) $2 < a < 8$

گزینه ۴- $9 - 6 < 2a - 1 < 9 + 6 \Rightarrow 3 < 2a - 1 < 15 \Rightarrow 4 < 2a < 16 \Rightarrow 2 < a < 8$

سؤال ۱۹: سه پاره خط به طول های $a+1$ ، $2a-1$ و 7 اضلاع مثلثی هستند حدود a کدام است؟

(۱) $2 < a < 8$ (۲) $3 < a < 9$ (۳) $\frac{7}{3} < a < 9$ (۴) $\frac{7}{3} < a < 11$

گزینه ۳- چون بیش از یک ضلع پارامتری است باید مجموع هر دو ضلع دلخواه را بزرگتر از ضلع سوم قرار دهیم:

$$\left. \begin{array}{l} 7 + 2a - 1 > a + 1 \Rightarrow a > -5 \\ 7 + a + 1 > 2a - 1 \Rightarrow a > 9 \\ a + 1 + 2a - 1 > 7 \Rightarrow a > \frac{7}{3} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \frac{7}{3} < a < 9$$

سؤال ۲۰: سه پاره خط به طول های $4x-4$ ، $x+7$ و $6x$ اضلاع مثلثی هستند مقادیر x به کدام صورت است؟

(داخل ریاضی ۹۲)

$$\frac{11}{9} < x < 4 \quad (4) \quad 2 < x < 3 \quad (3) \quad \frac{5}{3} < x < 3 \quad (2) \quad \frac{11}{9} < x < 3 \quad (1)$$

گزینه ۱- چون هر سه ضلع مجهول است باید هر سه حالت نامساوی مثلثی را بنویسیم:

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 3 > 6x \Rightarrow x < 3 \\ 10x - 4 > x + 7 \Rightarrow x > \frac{11}{9} \\ 7x + 7 > 4x - 4 \text{ بدیهی} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{11}{9} < x < 3$$

سؤال ۲۱: در مثلثی که محیط آن ۱۸ است، مقادیر بزرگترین ضلع مثلث به کدام صورت است؟

$$a > 9 \quad (1) \quad 6 < a \leq 9 \quad (2) \quad 0 < a < 9 \quad (3) \quad 6 \leq a < 9 \quad (4)$$

گزینه ۴- بزرگترین ضلع مثلث باید از نصف محیط کوچکتر باشد چون به عنوان مثال اگر در همین تست بزرگترین ضلع را ۱۰ فرض کنید، مجموع دو ضلع دیگر ۸ خواهد شد که با $a < b + c$ در تناقض است. در ضمن بزرگترین ضلع مثلث هرگز نمی تواند از ثلث $\left(\frac{1}{3}\right)$ محیط کمتر باشد. به عنوان مثال اگر بزرگترین ضلع را ۵ فرض کنید دو ضلع دیگر کوچکتر یا مساوی ۵ خواهند بود و جمع آنها به ۱۸ نمی رسد بنابراین باید $a \geq 6$ باشد.

نتیجه هیجان انگیز: اگر a ، b و c اضلاع مثلثی باشند که $c \leq b \leq a$ یعنی a بزرگترین ضلع و c کوچکترین ضلع

باشد آن گاه:

$$\text{ثلث محیط } 0 < c \leq$$

$$\text{نصف محیط } a < \leq \text{ثلث محیط}$$

سؤال ۲۲: در مثلثی اندازه بزرگترین ضلع ۱۲ است. محیط این مثلث کدام عدد می تواند باشد؟

$$27 \quad (4) \quad 23/5 \quad (3) \quad 24 \quad (2) \quad 37 \quad (1)$$

گزینه ۲- بزرگترین ضلع باید بزرگتر یا مساوی ثلث محیط و کمتر از نصف محیط باشد که در این شرایط تنها عدد ۲۷ است که $\frac{27}{2} < 12 < \frac{27}{3}$ می باشد.

سؤال ۲۳: در یک مثلث متساوی الساقین با محیط ۱۸ ساق مثلث در کدام نامساوی صدق می کند؟

$$6 < a < 9 \quad (1) \quad 9 < a < 15 \quad (2) \quad 4/5 < a < 9 \quad (3) \quad 6 < a < 12 \quad (4)$$

گزینه ۳- اگر ساق مثلث را a و قاعده را b فرض کنیم داریم:

$$2a + b = 18 \Rightarrow b = 18 - 2a > 0 \Rightarrow a < 9 = \frac{18}{2}$$

حال نامساوی مثلثی را برای اضلاع مینویسیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} a + a > b \Rightarrow 2a > b \Rightarrow 2a > 18 - 2a \Rightarrow 4a > 18 \Rightarrow a > 4/5 = \frac{18}{4} \\ a + b > a \text{ بدیهی} \end{array} \right.$$

$$\text{بنابراین } 4/5 < a < 9 \text{ یا } \frac{18}{4} < a < \frac{18}{2}$$

نتیجه هیجان انگیز: هر ساق مثلث متساوی الساقین از ربع محیط مثلث بزرگتر و از نصف محیط مثلث کوچکتر است؛ یعنی اگر اضلاع مثلث a, b, b و محیط مثلث $2P$ باشد داریم:

$$\frac{P}{2} < b < P$$

سؤال ۱۴: در مثلث متساوی الساقین با محیط ۳۰ قاعده مثلث در کدام بازه قرار دارد؟

- (۱) $10 < a < 15$ (۲) $0 < a < 15$ (۳) $0 < a < 10$ (۴) $5 < a < 15$

گزینه ۲- قاعده مثلث های متساوی الساقین می تواند تا بی نهایت کوچک شود و هیچ کران پایینی به جز صفر برای آن وجود ندارد اما طبق نامساوی مثلثی همیشه باید از نصف محیط کمتر باشد چون:

$$a + b + b = 30 \Rightarrow a + 2b = 30$$

حال طبق نامساوی مثلثی باید $b + b > a$ باشد در نتیجه $30 - a > a$ و آنگاه $a < 15$ خواهد بود یعنی $0 < a < 15$ و این یعنی: قاعده مثلث های متساوی الساقین بین صفر و نصف محیط است.

سؤال ۷: نقطه A به فاصله $4 - 3m$ از خط d مفروض است. اگر فقط یک نقطه بر خط d وجود داشته باشد که از نقطه A به فاصله ۵ باشد درباره m می توان گفت:

- (۱) $\frac{4}{3} < m < 3$ (۲) $m > 3$ (۳) $m < \frac{4}{3}$ (۴) $m = 3$

پاسخ: گزینه ۴

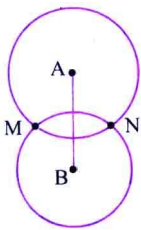
از آن جا که فقط یک نقطه روی d وجود دارد که فاصل اش از A برابر با ۵ است می توان گفت فاصله نقطه A و خط d، ۵ است. حال از فرض سوال نتیجه می گیریم:

$$d \text{ از } A \text{ فاصله} = 3m - 4 = 5 \Rightarrow m = 3$$

سؤال ۹: نقاط A, B به فاصله ۱۰ سانتی متر از هم مفروض اند. چند نقطه در صفحه می توان یافت که از A به فاصله ۴ و از B به فاصله ۷ باشند؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) حداکثر ۲

پاسخ: گزینه ۳



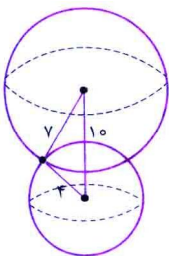
طبق شکل دایره های $C_1(A, 4)$ و $C_2(B, 7)$ به ترتیب مکان هندسی نقاطی هستند که از A, B فاصله شان ۴ و ۷ است به وضوح نقاط M و N از A به فاصله ۴ و از B به فاصله ۷ هستند، پس دو نقطه با این خاصیت موجود است.

تذکر: از آن جا که مجموع شعاع های دو دایره بیشتر از فاصله مراکز آنها است، این دو دایره در دو نقطه برخورد می کنند.

سؤال ۱۰: نقاط A, B به فاصله ۱۰ سانتی متر از هم مفروض اند. چند نقطه در صفحه می توان یافت که از A به فاصله ۴ و از B به فاصله ۷ باشند؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) بی شمار

پاسخ: گزینه ۴

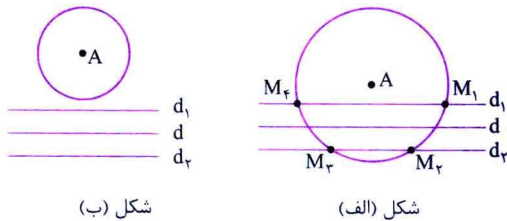


مکان هندسی نقاطی در فضا که از نقطه A به فاصله ۴ و از نقطه B به فاصله ۷ سانتی متر باشند به ترتیب کره هایی به شعاع های ۴ و ۷ می باشند. با توجه به این که فاصله نقطه A و B، ۱۰ سانتی متر است ($r + r' > 10$) این دو کره با هم تلاقی خواهند داشت و محل تلاقی آنها با توجه به شکل، شامل بی نهایت نقطه خواهد بود.

سؤال ۱۲: نقطه A خارج خط d مفروض است. چند نقطه می توان یافت که از نقطه A به فاصله ۵ و از خط d به فاصله ۲ باشند؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) حداکثر ۲ (۴) حداکثر ۴

پاسخ: گزینه ۴



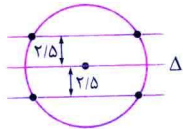
مجموعه نقاطی که از A به فاصله ۵ قرار دارد تشکیل یک دایره می دهند و همچنین نقاطی که از خط d به فاصله ۲ باشند دو خط موازی d است پس با توجه به شکل زیر تعداد نقاط مورد نظر حداکثر ۴ است که در (۴) آمده است (شکل الف)

(شکل ب) (۱) و (۲) را حذف می کنند.

سؤال ۱۳: حداکثر چند نقطه روی دایره C به شعاع ۵ وجود دارد که از خط Δ به فاصله ۲/۵ باشند؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳



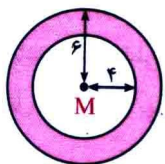
مکان هندسی نقاطی که از خط مفروض Δ به فاصله ثابت h باشند دو خط موازی با Δ و به فاصله h از آن است. این دو خط دایره C را حداکثر در ۴ نقطه قطع می کنند.

سؤال ۱۴: نقطه ثابت m را در صفحه ای در نظر بگیرید. نقاطی از این صفحه که فاصله آنها از M بیشتر از ۴ و کمتر

از ۶ باشد، یک ناحیه تشکیل می دهند مساحت این ناحیه کدام عدد است؟

- (۱) 20π (۲) 16π (۳) 24π (۴) 12π

پاسخ: گزینه ۱



نقاطی از صفحه که فاصله آنها از نقطه M بیشتر از ۴ است خارج دایره ای به مرکز M و به شعاع ۴ هستند. از طرفی نقاطی که فاصله آنها از نقطه M کمتر از ۶ است داخل دایره ای به مرکز M و به شعاع ۶ هستند. بنابراین نقاطی که دارای ویژگی های فواسته شده در صورت مسأله هستند در شکل مقابل در قسمت رنگی قرار می گیرند و می توان نوشت:

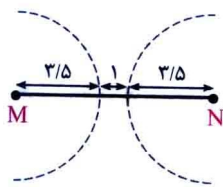
$$\text{مساحت قسمت رنگی} = \pi(6)^2 - \pi(4)^2 = 36\pi - 16\pi = 20\pi$$

سؤال ۱۵: پاره خط MN به طول ۸ مفروض است. چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصله ۳/۵ واحد از هر یک

از نقاط M و N باشد؟

- (۱) بی شمار (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

پاسخ: گزینه ۴



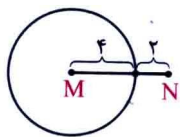
نقاطی در صفحه که از نقطه ثابت به فاصله $\frac{3}{5}$ واحد باشند یک دایره به مرکز M و به شعاع $\frac{3}{5}$ هستند. به طور مشابه یک دایره هم به مرکز n و به شعاع $\frac{3}{5}$ داریم و چون فاصله دو نقطه M و N برابر ۸ واحد است پس این دو دایره با هم برخورد ندارند $(MN = 8 > \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = R_1 + R_2)$ و در نتیجه هیچ نقطه ای با این ویژگی در صفحه وجود ندارد. شکل مقابل را ببینید.

سؤال ۱۶: نقاط M و N را با فاصله ۶ از هم در یک صفحه در نظر بگیرید. نقاط A و B به فاصله ۴ از M و k از N

قرار دارند. چند مقدار طبیعی برای k وجود دارد؟

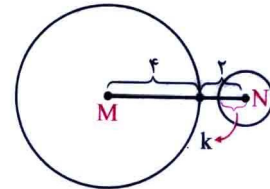
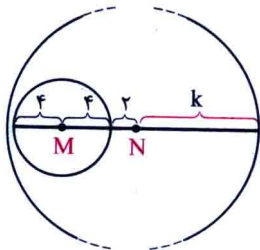
- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۵

پاسخ: گزینه ۴



می گوید نقاط A, B به فاصله ۴ از نقطه M قرار دارند پس این دو نقطه به طور هم روی دایره ای به مرکز M و شعاع ۴ قرار دارند. حال باید نقاط A, B روی دایره ای به مرکز N و به شعاع k هم قرار داشته باشند.

بچه های عزیزم توجه داشته باشید که دایره به مرکز N در دو حالت زیر نمی تواند دایره به مرکز M را قطع کند ببینید:
 (۱) اگر $k < 2$ باشد آنگاه داریم;
 (۲) اگر $k > 10$ باشد آنگاه داریم;



در نتیجه اگر $2 < k < 10$ باشد آنگاه دو دایره یکدیگر را در نقاط A, B قطع می کنند، بنابراین ۷ مقدار طبیعی برای k وجود دارد $k \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

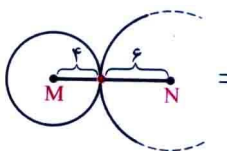
سؤال ۱۷: پاره خط MN به طول ۱۰ را در نظر بگیرید. به ازای چه مقداری از x ، فقط یک نقطه در صفحه وجود دارد

که به فاصله ۴ از M و $\frac{2x}{3} - 2$ از N قرار داشته باشد؟

- (۱) ۱۲ یا ۲۴ (۲) ۱۲ یا ۸ (۳) فقط ۱۲ (۴) فقط ۲۴

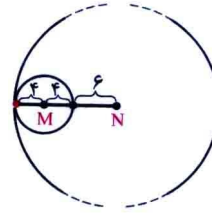
پاسخ: گزینه ۱

نقاطی در صفحه که به فاصله ۴ از نقطه M قرار دارند یک دایره به مرکز m و به شعاع ۴ تشکیل می دهند. هم چنین نقاطی که به فاصله $\frac{2x}{3} - 2$ از نقطه N قرار دارند یک دایره به مرکز N و به شعاع $\frac{2x}{3} - 2$ تشکیل می دهند. حال برای این که فقط یک نقطه در صفحه وجود داشته باشد که ویژگی فواسته شده را دارا باشد باید یکی از دو حالت زیر اتفاق بیفتد:



$$\Rightarrow \text{حالت ۱} \Rightarrow \frac{2x}{3} - 2 = 6 \Rightarrow \frac{2x}{3} = 8 \Rightarrow 2x = 24 \Rightarrow x = 12$$

$$2 \text{ حالت } 2 \Rightarrow \frac{2x}{3} - 2 = 14 \Rightarrow \frac{2x}{3} = 16 \Rightarrow 2x = 48 \Rightarrow x = 24$$



در نتیجه X باید مساوی ۱۲ یا ۲۴ باشد.

سؤال ۱۸: نقاط A و B روی محیط مربعی به طول ضلع ۲ قرار دارند، به طوری که به فاصله هر یک از آنها از یک رأس

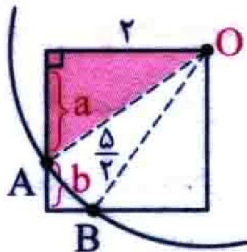
مربع برابر $\frac{5}{2}$ است. فاصله نزدیکترین رأس مربع تا هر یک از آن دو نقطه برابر کدام است؟

- (۱) ۰/۲۵ (۲) ۱ (۳) ۰/۷۵ (۴) ۰/۵

پاسخ: گزینه ۴

اگر به مرکز رأس O و به شعاع $\frac{5}{2}$ یک دایره رسم کنیم این دایره مربع را در دو نقطه که همان A و B هستند قطع می کند پس داریم:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = 2^2 + a^2 \Rightarrow \frac{25}{4} - 4 = a^2 \Rightarrow \frac{9}{4} = a^2 \Rightarrow a = \frac{3}{2} \Rightarrow b = 2 - a = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = 0/5$$



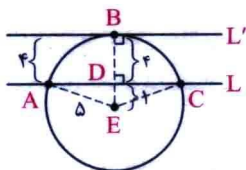
بنابراین فاصله نزدیکترین رأس مربع تا هر یک از دو نقطه مطلوب برابر $b = 0/5$ است.

سؤال ۱۹: خطوط موازی L و L' را با فاصله ۴ از هم در یک صفحه در نظر بگیرید. اگر نقطه E خارج از این دو خط

باشد و سه نقطه روی این دو خط داشته باشیم، به طوری که فاصله هر یک از آنها از E برابر ۵ باشد مجموع فواصل نقطه E تا دو خط L و L' کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۵ (۴) ۶

پاسخ: گزینه ۴



با توجه به معلومات مسره شکل روبه رو را فوایم داشت:

بنابراین مجموع فواصل نقطه E تا دو خط L و L' برابر است با: $ED + EB = 1 + 5 = 6$

سؤال ۲۰: مربع MNPQ به ضلع ۶ مفروض است. نقطه E را درون مربع در نظر بگیرید. اگر فاصله دو رأس M و N و

وسط ضلع PQ از نقطه E یکسان باشد طول EP چند برابر $\sqrt{41}$ است؟

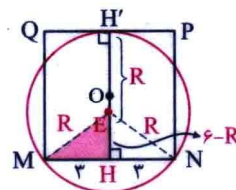
- (۱) ۰/۸۵ (۲) ۰/۸ (۳) ۰/۶ (۴) ۰/۷۵

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به معلومات مسأله شکل زیر را فوایم داشت:

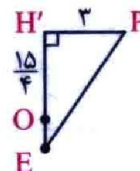
$$\Delta MHE : R^2 = (6 - R)^2 + 3^2 \Rightarrow R^2 = 36 - 12R + R^2 + 9$$

$$\Rightarrow 12R = 45 \Rightarrow R = \frac{45}{12} = \frac{15}{4}$$



در نتیجه می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \Rightarrow EP &= \sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{\frac{225}{16} + 9} = \sqrt{\frac{369}{16}} = \sqrt{\frac{3^2 \times 41}{16}} \\ &= \frac{3}{4} \sqrt{41} = 0.75 \sqrt{41} \end{aligned}$$



سؤال ۱۱: نقطه A روی خط d واقع است. نقاطی در صفحه وجود دارند که به فاصله ۲k از خط d و به فاصله $2\sqrt{3}$ از

نقطه A قرار دارند. به ازای چه مقدار k، ای نقاط رؤوس یک مربع هستند؟

- (۱) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۲) $\sqrt{6}$ (۳) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{6}}{8}$

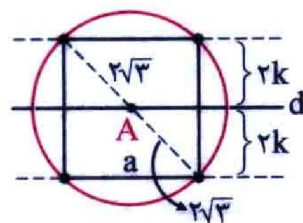
پاسخ: گزینه ۱

نقاطی از صفحه که به فاصله ۲k از خط d قرار دارند دو خط موازی خط d در هر دو طرف آن هستند. از طرفی نقاطی از صفحه که به فاصله $2\sqrt{3}$ از نقطه A قرار دارند تشکیل یک دایره به مرکز A و به شعاع $\sqrt{3}$ می دهند. چون گفته شده نقاطی که این ویژگی ها را دارند رؤوس یک مربع هستند پس شکل زیر را فوایم داشت و در نتیجه می توان نوشت:

$$\begin{cases} \text{طول قطر مربع} = 4\sqrt{3} \\ \text{طول ضلع مربع} = a \end{cases} \Rightarrow (4\sqrt{3})^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow 48 = 2a^2$$

$$\Rightarrow 24 = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\text{طول ضلع مربع} = 4k = 2\sqrt{6} \Rightarrow k = \frac{2\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$



برخی خواص نیمساز و ترسیم آن: کم و بیش با واژه نیمساز آشنایی دارید. نیمساز هر زاویه نیم خطی است که از

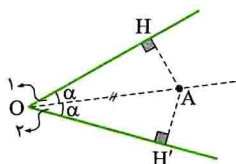
رأس زاویه رسم می شود و زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند. حال به یکی از خاصیت های مهم نیمساز می پردازیم:

✓ **خاصیت نیمساز:** هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد از دو ضلع

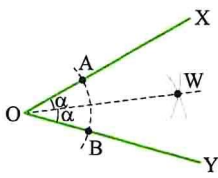
به یک فاصله است و برعکس هر نقطه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد روی

$$AH = AH' \Leftrightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

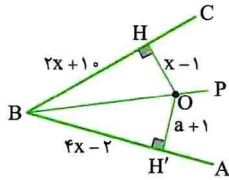
نیمساز آن زاویه قرار دارد.



✓ **رسم نیمساز:** برای رسم نیمساز زاویه $X\hat{O}Y$ به مرکز O کمانی می زنیم تا نیم خط های OY و OX را در A و B قطع کند، حال دهانه پرگار را کمی بیش از نصف فاصله AB باز کرده و به مراکز A و B کمانی می زنیم تا همدیگر را در W قطع کنند. از W به O وصل می کنیم. مثلث های OAW و OBW با سه ضلع برابر همنهشت هستند و در نتیجه $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ خواهد بود.



سؤال ۲۵: در شکل مقابل اگر BP نیمساز زاویه CBA باشد مقدار a کدام است؟



۴ (۱)

۳ (۲)

۵ (۳)

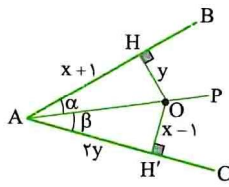
۷ (۴)

گزینه ۱- اگر BP نیمساز باشد مثلث های OBH و OBH' همنهشت خواهند بود و در نتیجه اضلاع نظیر در دو مثلث باسد برابر باشند، یعنی:

$$2x + 10 = 4x - 2 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6$$

$$x - 1 = a + 1 \Rightarrow a = 4$$

سؤال ۲۶: در شکل مقابل اگر OA اندازه OA کدام است؟



۲ (۱)

۳ (۲)

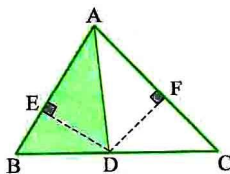
۵ (۳)

$2\sqrt{5}$ (۴)

گزینه ۴-

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ x + 1 = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ 2y - x = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 2, x = 3 \Rightarrow OA^2 = y^2 + (x + 1)^2 = 4 + 16 = 20 \Rightarrow OA = 2\sqrt{5}$$

سؤال ۲۷: در مثلث ABC به اضلاع $AB = 6, AC = 7, BC = 8$ نیمساز AD را رسم کرده ایم. از نقطه D دو عمود بر اضلاع AC و AB رسم کرده ایم کدام رابطه درست است؟



۱) $6DE = 7DF$

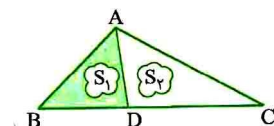
۲) $7DE = 6DF$

۳) $DE = DF$

۴) $DF > DE$

گزینه ۳- همان طور که گفتیم هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه به یک فاصله است یعنی: $DE=DF$

سؤال ۲۸: مطابق شکل در مثلث ABC به اضلاع $AB = 4, AC = 6, BC = 8$ نیمساز AD را رسم کرده ایم. اگر



۱) $S_1 = S_2$

۲) $2S_1 = 3S_2$

۳) $3S_1 = 2S_2$

۴) $S_1 > S_2$

گزینه ۳- چون هر نقطه روی نیمساز فاصله اش از دو ضلع یکسان است پس اندازه ارتفاع DH و DH' از دو مثلث یکسان است در نتیجه:

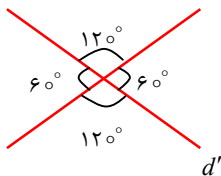
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}DH \times 4}{\frac{1}{2}DH' \times 6} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3S_1 = 2S_2$$

سؤال ۱: همه نقاطی که از دو خط متقاطع d و d' که با هم زاویه 60° می سازند به یک فاصله اند، تشکیل چه

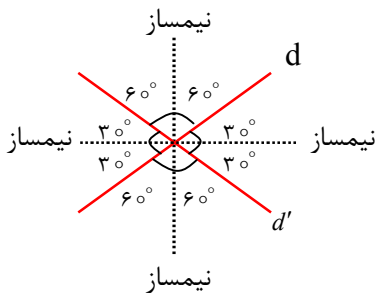
شکلی می دهند؟

- (۱) یک خط
 (۲) دو خط عمود بر هم
 (۳) دو خط با زاویه 120°
 (۴) چهار نقطه که رؤس یک مربع هستند.

پاسخ: گزینه ۲



دو خط d و d' با هم متقاطع اند و همانطور که در شکل پیداست با هم تشکیل 4 زاویه می دهند. در هر زاویه نقاط روی نیمساز آن زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.



این نیمسازها با هم دو خط متقاطع تشکیل می دهند که زاویه بینشان 90° است پس نقاطی که سوال از ما می خواهد، نقاط روی دو خط متقاطع عمود بر هم هستند.

سؤال ۱۱: شکل حاصل از مراکز دوایری در یک صفحه که بر دو خط متقاطع مماس اند کدام است؟

- (۱) دو خط عمود بر هم
 (۲) دو خط موازی
 (۳) دو خط متقاطع غیرمتعامد
 (۴) یک خط

پاسخ: گزینه ۱

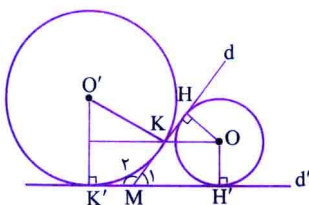
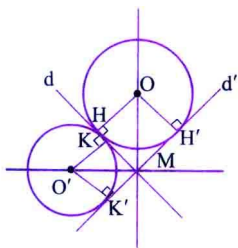
مطابق شکل اگر دایره $C(O, r)$ دارای ویژگی گفته شده باشد خواهیم داشت:

$$OH = OH' = r \Rightarrow \text{همپنین}$$

O روی نیمساز \hat{M}_1 قرار دارد. $C(O', r')$: $O'K = O'K' = r' \Rightarrow$

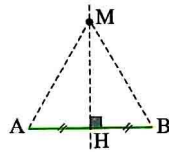
O' روی نیمساز \hat{M}_2 قرار دارد. چون نیمسازهای \hat{M}_1 و \hat{M}_2 بر هم عمودند مکان هندسی دو

خط عمود بر هم می شود.

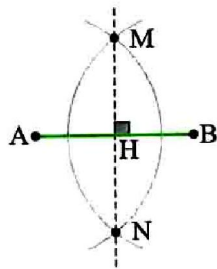


برخی خواص عمود منصف و ترسیم آن: عمود منصف هر پاره خط، خطی است که بر آن پاره خط عمود است و آن را نصف می کند. حال به یکی از خاصیت های مهم عمود منصف می پردازیم:

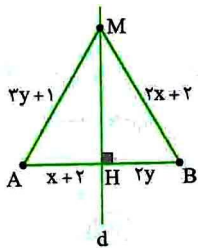
خاصیت عمود منصف: هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره خط باشد از دو سر پاره خط به یک فاصله است و برعکس هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد روی عمود منصف پاره خط واقع است.



ترسیم عمود منصف: برای رسم عمود منصف پاره خط AB دهانه پرگار را بیش از نصف طول AB باز می کنیم و یک بار به مرکز A و یک بار به مرکز B کمان هایی رسم می کنیم. سپس محل تقاطع های این کمان ها را به هم وصل می کنیم چون نقاط M و N هم از A و هم از B به یک فاصله اند روی عمود منصف AB قرار دارند.



سؤال ۲۹: مطابق شکل خط d عمود منصف پاره خط AB است اندازه MH کدام است؟



- ۱۲ (۱)
- ۸ (۲)
- ۵ (۳)
- ۶ (۴)

گزینه ۲- می دانیم که عمود منصف پاره خط را نصف می کند و هر نقطه روی آن از دو سر پاره خط به یک فاصله است، بنابراین:

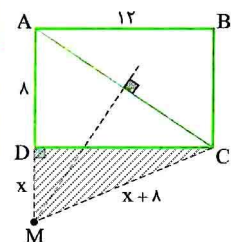
$$\begin{cases} x + 2 = 2y \\ 3y + 1 = 2x + 2 \end{cases} \Rightarrow -2 \times \begin{cases} 2y - x = 2 \\ 3y - 2x = 1 \end{cases} \Rightarrow -y = -3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow x = 4$$

با این مقادیر برای x و y داریم: $MB = 10$ و $HB = 6$. بنابراین براساس قضیه فیثاغورس $MH = 8$ خواهد بود.

سؤال ۳۰: در یک مستطیل به اضلاع ۸ و ۱۲ عمود منصف قطر امتداد عرض مستطیل را در M قطع می کند. فاصله

M از یکی از دو سر قطر کدام است؟

- ۱۳ (۴)
- ۱۵ (۳)
- ۱۷ (۲)
- ۱۹ (۱)

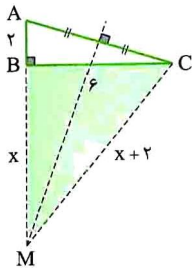


گزینه ۴- عمود منصف قطر AC را مطابق شکل رسم می کنیم و فاصله آن تا رأس D را x در نظر می گیریم. حال فاصله M از رأس A برابر $x + 8$ است پس باید تا رأس C (سر دیگر پاره خط AC) نیز $x + 8$ باشد. حالا به مثلث قائم الزاویه رنگ شده نگاه کنید. اضلاع آن x، ۱۲ و $x + 8$

است. اگر یادتان هست که ۵، ۱۲ و ۱۳ فیثاغورسی اند که $x=5$ پیدا شده در غیر این صورت رابطه فیثاغورس را می نویسید و x را پیدا می کنید:

$$(x+8)^2 = 13^2 + x^2 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow AM = MC = 13$$

سؤال ۳۱: در مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع قائم ۶ و ۲ عمود منصف وتر امتداد ضلع کوچکتر را در M قطع کرده



است. فاصله M از نزدیکترین رأس مثلث کدام است؟ (داخل ریاضی ۸۴)

۸ (۲)

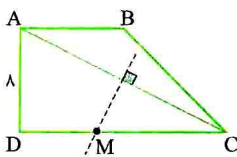
۷/۵ (۱)

$\frac{25}{3}$ (۴)

$\sqrt{10}$ (۳)

گزینه ۲- در مثلث MBC اعداد x ، ۶ و $x+2$ فیثاغورسی هستند که واضح است $x=8$ است.

سؤال ۳۲: در دوزنقه $ABCD$ مطابق شکل $AB=8$ و $CD=16$ است. عمود منصف قطر AC قاعده CD را در M قطع می کند. فاصله M از نقطه C چقدر است؟



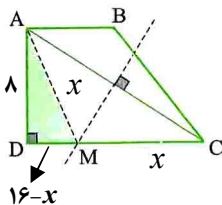
گزینه ۱- می دانیم هر نقطه روی عمود منصف از دو سر پاره خط به یک فاصله است. پس اگر فرض کنیم $MC = x$ در این صورت $MA = x$ خواهد بود و $DM = 16-x$. حال در مثلث قائم الزاویه ADM با استفاده از فیثاغورس x را به دست می آوریم:

۶ (۲)

۱۰ (۱)

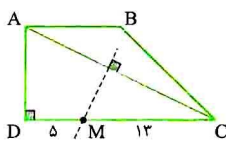
۷ (۴)

۹ (۳)



$$x^2 = 8^2 + (16-x)^2 \xrightarrow{6, 8, 10} x = 10$$

سؤال ۳۳: در یک دوزنقه قائم الزاویه عمود منصف قطر بزرگ قاعده بزرگ دوزنقه را به فاصله ۱۳ و ۵ واحد از دو سر آن قطع کرده است. ارتفاع دوزنقه کدام است؟

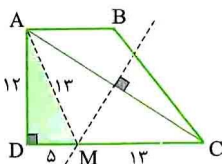


۴ (۱)

۸ (۲)

۱۲ (۳)

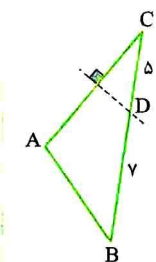
۱۰ (۴)



گزینه ۳- نقطه M روی عمود منصف AC واقع است. پس $AM=MC$ حال در مثلث AMD ضلع $AD=12$ به دست می آید.

گزینه ۱- می دانیم هر نقطه روی عمود منصف از دو سر پاره خط به یک فاصله است. پس اگر فرض کنیم $MC = x$ در این صورت $MA = x$ خواهد بود و $DM = 16-x$. حال در مثلث قائم الزاویه ADM با استفاده از فیثاغورس x را به دست می آوریم:

سؤال ۳۴: در شکل مقابل عمود منصف ضلع AC ضلع BC را در D قطع کرده است. محیط مثلث ABD کدام عدد ممکن است باشد؟



۱۴ (۱)

۲۳ (۲)

۲۴ (۳)

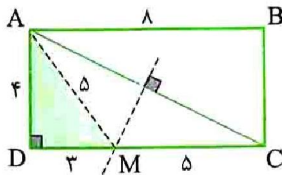
۲۶ (۴)

گزینه ۲- کافی است از A به D وصل کنیم، هر نقطه روی عمود منصف از دو سر پاره خط به یک فاصله است بنابراین $AD=5$. حال در مثلث ABD دو ضلع معلوم و ضلع سوم مجهول است بنابراین:

$$7-5 < AB < 7+5 \Rightarrow 2 < AB < 12 \Rightarrow \text{محیط} = AB + \underbrace{AD + BD}_{12} \Rightarrow 14 < AB + 12 \Rightarrow 14 < \text{محیط} < 24$$

سؤال ۳۵: در یک مستطیل به طول ۸ واحد عمود منصف قطر، طول مستطیل را به فاصله ۳ واحد از نزدیکترین رأس مستطیل قطع کرده است. محیط مستطیل کدام است؟

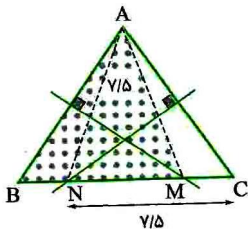
- ۱۲ (۱) ۲۴ (۲) ۲۰ (۳) ۲۶ (۴)



گزینه ۲- نقطه m روی عمود منصف است پس $MA=MC$ ؛ حال چون طول مستطیل ۸ است پس $MC=8-3=5$ ، حال در مثلث AMD طبق فیثاغورس $AD=4$ خواهد بود و محیط مستطیل برابر ۲۴ به دست می آید.

سؤال ۳۶: در مثلث متساوی الساقین ABC اندازه قاعده ۱۲ است. عمود منصف ساق های AB و AC قاعده را در M و N قطع کرده اند. اگر فاصله هر کدام از این نقاط تا رأس A برابر $7/5$ واحد باشد فاصله MN چقدر است؟

- ۲/۵ (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۴/۵ (۴)

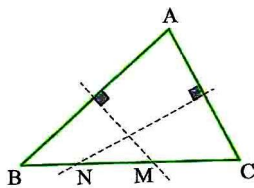


گزینه ۲- چون هر نقطه روی عمود منصف از دو سر پاره خط به یک فاصله است، پس اگر $AM=7/5$ باشد $BM=7/5$ خواهد بود

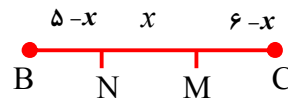
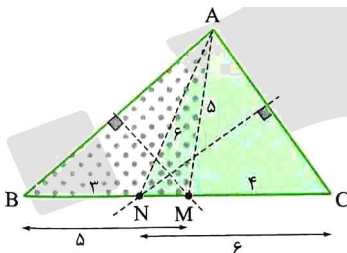
$$7/5 - x \quad x \quad 7/5 - x \quad 7/5 - x + x + 7/5 - x = 12 \Rightarrow 15 - x = 12 \Rightarrow x = 3$$

سؤال ۳۷: در مثلث ABC اگر $BC=9$ باشد و عمود منصف های اضلاع AB و AC ضلع BC را در نقاط M و N به فاصله های ۵ و ۶ واحد از رأس A قطع کنند اندازه MN کدام است؟

- ۲ (۱) ۱/۵ (۲) ۳ (۳) ۲/۵ (۴)



گزینه ۱- چون M روی عمود منصف است پس $MA=MB=5$ و هم چنین N نیز روی عمود منصف می باشد، بنابراین $NA=NC=6$.



$$5 - x + x + 6 - x = 9 \Rightarrow 11 - x = 9 \Rightarrow x = 2$$

سؤال ۲: دو نقطه A و B و خط d در یک صفحه واقع اند. می خواهیم نقطه ای روی خط d پیدا کنیم که از دو نقطه A و B به یک فاصله باشد. تعداد جواب های این مسئله کدام است؟

- (۱) صفر، ۱ و ۲ (۲) صفر، ۱ و بی شمار (۳) صفر، ۲ و بی شمار (۴) ۱ و بی شمار

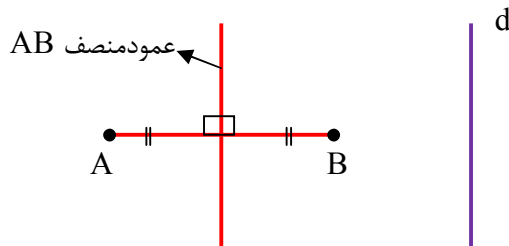
پاسخ: گزینه ۲

نقطه مورد نظر دارای دو شرط است: (۱) از دو نقطه A, B به یک فاصله باشد. (۲) روی خط d باشد.

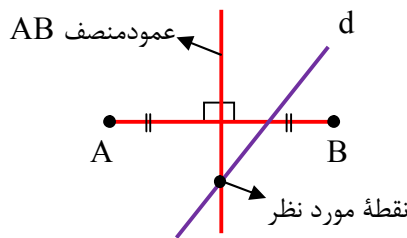
بین این دو شرط باید اشتراک بگیریم تا نقطه یا نقاط مورد نظر به دست آیند.

نقطه ای که از دو نقطه A, B به یک فاصله باشد روی عمودمنصف AB قرار دارد. عمود منصف AB با خط d چند حالت مختلف می تواند داشته باشد. آنها را با هم می بینیم:

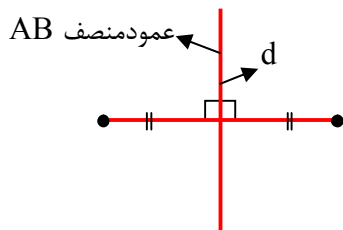
(۱) عمود منصف AB با خط d موازی باشد در این حالت نقطه مورد نظر وجود ندارد پس مسئله صفر جواب دارد.



(۲) عمود منصف AB با خط d متقاطع باشد. در این حالت یک نقطه با ویژگی مورد نظر وجود دارد پس مسئله یک جواب دارد.



(۳) عمود منصف AB بر خط d منطبق باشد در این حالت تمام نقاط روی d جواب هستند و مسئله بی شمار جواب دارد.

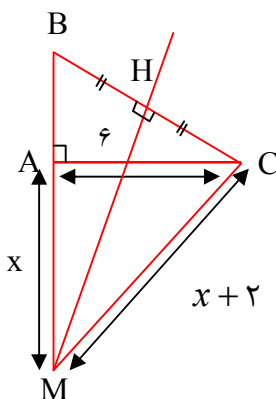


سؤال ۳: اندازه دو ضلع قائمه از مثلث قائم الزاویه ای ۲ و ۶ واحد است. عمود منصف وتر، امتداد ضلع کوچکتر را در M قطع می کند. فاصله M از نزدیکترین رأس مثلث چند واحد است؟

- (۱) $\frac{7}{5}$ (۲) ۸ (۳) $4\sqrt{5}$ (۴) $\frac{25}{5}$

پاسخ: گزینه ۲

اول یک شکل فوب می کشیم:



MH عمود منصف وتر BC است. فاصله M تا A را که سوال از ما می خواهد X می گیریم. می دانیم هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن به یک فاصله است پس

نقطه M از B و C به یک فاصله است و در نتیجه: $MC = 2 + x$
 در مثلث ACM رابطه فیثاغورس می نویسیم:

$$(x+2)^2 = x^2 + 6^2 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + 36 \Rightarrow x = 8$$

سؤال ۵: شکل حاصل از مراکز دوابری که از دو نقطه ثابت A و B می گذرند، کدام است؟

- (۱) خطی موازی AB (۲) عمود منصف AB
 (۳) دو خط عمود بر AB (۵) دو خط موازی AB

پاسخ: گزینه ۲

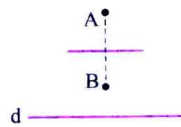
مراکز دایره هایی که از دو نقطه A و B می گذرند، از A و B به یک فاصله هستند؛ لذا مرکز این دوایر روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارد.

سؤال ۶: نقاط A و B و خط d مفروض اند. چند نقطه روی خط d وجود دارد که از A و B به یک فاصله باشند؟ (d) عمود منصف AB نیست.

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) حداکثر ۱

پاسخ: گزینه ۴

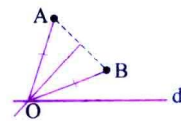
نقاط روی عمود منصف AB از A و B به یک فاصله اند؛ پس نقطه مورد نظر باید محل برخورد عمود منصف AB و خط d باشد. حال دو حالت داریم:



در این حالت عمود منصف AB موازی d است و تعداد نقاط صفر می شود.

$$(۱) AB \perp d$$

اما در این حالت عمود منصف AB و d در نقطه ای مثل O با یکدیگر برخورد می کنند. پس در کل حداکثر ۱ نقطه با این ویژگی می توان پیدا کرد.



$$(۲) AB \not\perp d$$

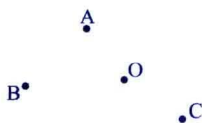
سؤال ۸: نقاط A, B, C در یک صفحه مفروض اند. در این صفحه چند نقطه وجود دارد که از هر سه نقطه به یک فاصله باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) بی شمار (۴) حداکثر ۱

پاسخ: گزینه ۴

اگر یکی از این نقاط را با O نمایش دهیم فواید داشت:

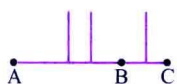
❖ حالت اول) A, B, C هم خط نباشند.



$$OA = OB = OC \Rightarrow \begin{cases} OA = OB \\ OA = OC \end{cases}$$

پس نقطه O محل همسری عمود منصف هاست و یک نقطه داریم.

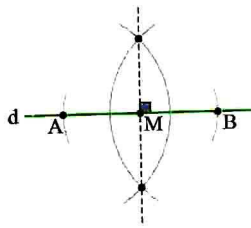
❖ حالت دوم) A, B, C روی یک خط باشند.



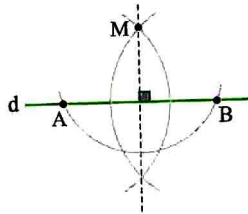
همانطور که مشاهده می شود عمود منصف های خطوط AB, BC, AC همسری نیستند و در نتیجه هیچ

نقطه ای با ویژگی گفته شده نخواهیم داشت. پس حداکثر ۱ نقطه با این خاصیت وجود دارد.

رسم خط عمود بر یک خط از نقطه ای واقع بر آن: فرض کنیم نقطه M روی خط d قرار دارد و می خواهیم به

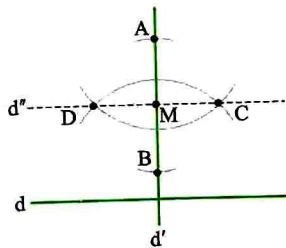


کمک خط کش و پرگار خطی عمود بر d و گذرا از M رسم کنیم کافی است به مرکز M و به شعاع دلخواه کمانی بزنیم تا خط d را در A و B قطع کند. حال کافی است عمود منصف پاره خط AB را طبق آن چه یاد گرفتیم رسم کنیم.



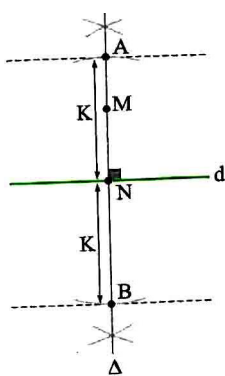
رسم خط عمود بر یک خط از نقطه ای خارج از آن: فرض کنید نقطه M خارج

خط d باشد برای رسم خطی که از M بگذرد و بر d عمود باشد کافی است به مرکز M و به شعاع دلخواه کمانی بزنیم طوری که خط d را در نقطه های A و B قطع کند. حال عمود منصف پاره خط AB را رسم می کنیم که از M می گذرد. (چون $BM=AM$ است M روی عمود منصف خواهد بود).



رسم خطی موازی با یک خط از نقطه ای خارج از آن: فرض کنید نقطه M

خارج از خط d قرار دارد می خواهیم خطی از M عبور دهیم که موازی d باشد. ابتدا طبق آن چه گفتیم خطی گذرا از M و عمود بر d رسم می کنیم و آن را d' می نامیم، حال نقطه M واقع بر d' است. حالا دوباره خطی گذرا از M و عمود بر d' رسم می کنیم و آن را d'' می نامیم در نتیجه $d'' \parallel d$ خواهد بود.



پیدا کردن نقاطی به فاصله k از یک خط: خط d مطابق شکل مفروض است. فرض

کنید می خواهیم نقاطی را پیدا کنیم که به فاصله k واحد از این خط قرار دارند کافی است نقطه ای دلخواه مانند M خارج آن در نظر بگیریم و طبق شرایط گفته شده خط عمود بر d و گذرا از M (که آن را Δ می نامیم) را رسم کنیم تا خط d را در N قطع کند. حال به مرکز N و به شعاع k کمانی می زنیم تا این خط عمود را در A و B قطع کند. مجدداً از نقاط A و B واقع بر خط Δ عمودهایی بر آن رسم می کنیم این دو خط شامل همه نقاطی هستند که به فاصله k واحد از خط d قرار دارند.

سؤال ۴: مجموعه نقاط مراکز دوایری به شعاع معلوم در یک صفحه که بر یک خط مستقیم مماس اند، کدام است؟

- (۱) یک خط موازی خط مفروض
- (۲) دو خط موازی خط مفروض
- (۳) یک خط عمود بر خط مفروض
- (۴) محیط یک مستطیل

پاسخ: گزینه ۲

اگر شعاع دایره ها را R فرض کنیم مکان هندسی مورد نظر طبق شکل زیر، دو خط موازی به فاصله R از خط مفروض می شود.

