در تدوین این جزوه از تجربیات مؤلفین کتاب های زیر

نیز استفاده شده و ندرتاً برخی از سؤالات که از نظر نگارنده

غیرقابل چشم پوشی بودند عیناً نقل گردیده است.

۱ـ حرف آخر (مهندس منتظری)

۲ـ تخته سیاه (مهندس مهربان)

۳ـ ریاضی۳ نشر الگو (کاظم جلالی ـ ارشک حمیدی)

۴ـ حسابان۲ نشر الگو (کاظم جلالی ـ ارشک حمیدی)

۵ـ ای کیو گاج ریاضی یازدهم و حسابان۱

۶ـ ریاضی یازدهم خیلی سبز

۷ـ ریاضی دوازدهم خیلی سبز

۸ـ حسابان ۱ خیلی سبز

۹ـ نردبام حسابان خیلی سبز

۱۰ـ دیفرانسیل پیشرفته‌ی خیلی سبز

۱۱ـ کتاب درسی ریاضی یازدهم و دوازدهم
رشته‌ی ریاضی و تجربی

تابع معکوس

معکوس توابعی به فرم نمودار پیکانی و مجموعه زوج های مرتب:

به دو تابع رو به رو نگاه کنید و بگید چه رابطه ای بین این دو تابع می بینید.

$$f=\{(۱,۵),(۲,۷),(۴,۸)\}$$
$$g=\{(۵,۱),(۷,۲),(۸,۴)\}$$

اگه در زوج های مرتب تابع f جای x و y رو عوض کنیم به تابع g می رسیم.

در این جا به تابع g می گیم معکوس تابع f و اونو با $f^{-۱}$ نشون می دیم. یعنی: $g=f^{-۱}$

در حالت کلی: $f^{-۱}=\{(y,x)\mid (x,y)\in f\}$

حواستون باشه که معکوس یک تابع به معنی عکس اون تابع نیست. (یعنی $f^{-۱}(x)\neq\frac{۱}{f(x)}$**)**

هر وقت خواستید تابعی رو معکوس کنید کافیه جای x و y اون تابع رو عوض کنید.

در شکل زیر، تابع f رو معکوس کنید.

کافیه جای x و y این تابع رو عوض کنیم:

$f=\{(۱,۵),(۲,۶),(۳,۶),(۴,۸)\}$ $\quad$ $f^{-۱}=\{(۵,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۸,۴)\}$

* به نظر شما آیا $f^{-۱}$ تابعه؟

نه چون $x=۶$ با دو تا y به نام های $y=۲$ و $y=۳$ در رابطه هست.

فکر می کنید چه عاملی باعث شده که $f^{-۱}$ تابع نباشه؟

از اونجایی که f یک به یک نیست، پس $f^{-۱}$ هم نمی تونه تابع باشه.

اگه تابع f
- یک به یک باشه، پس $f^{-۱}$ تابعه.
- یک به یک نباشه، $f^{-۱}$ تابع نیست.

تابع معکوس پذیر:

f^{-1} دو حالت داره، ممکنه تابع باشه یا نباشه. بنابراین: هر وقت بهتون گفتند «تابع f^{-1}» بدونید f یک به یک بوده که f^{-1} تونسته تابع بشه.

تابع f رو در صورتی می گیم معکوس پذیر که f^{-1} تابع بشه.

هر تابع یک به یک معکوس پذیر چون معکوس ۱۰۰٪ یک تابعه.
تابع غیر یک به یک معکوس پذیر نیست چون معکوسش تابع نیست.

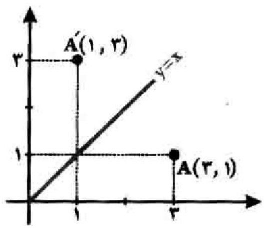
سؤال۱: اگر تابع $f=\{(۴,۴),(k,۱),(۲,۱),(۲k,m)\}$ معکوس پذیر باشد، m چیست؟

$f=\{(۴,۴),(k,۱),(۲,۱),(۲k,m)\} \xrightarrow{k=۲} f=\{(۴,۴),(۲,۱),(۴,m)\} \xrightarrow{\text{تابع } f} m=۴$

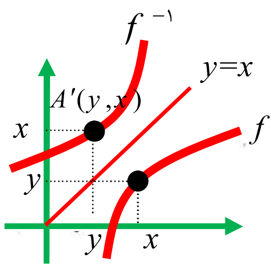
چون f معکوس پذیر است قطعاً یک به یک است یعنی هیچ دو عضو متمایزی نباسد مؤلفه های دومشان یکسان باشد.

معکوس یک تابع به کمک نمودار:

ازتون می خوام نقطه‌ی $A(۳,۱)$ رو روی دستگاه مختلف رسم کنید و بعد بگید معکوسش چی میشه؟



کافیه جای مؤلفه‌ی اول و دوم این نقطه رو عوض کنیم تا نقطه‌ی $A'(۱,۳)$ پیدا بشه.
یه نکته‌ی جالب: خط $y=x$ محور تقارن این دو نقطه هست.
بنابراین برای رسم معکوس نقطه‌ی $A(۳,۱)$ میشه قرینه‌ی A رو نسبت به خط $y=x$ رسم کرد تا نقطه‌ی $A'(۱,۳)$ به دست بیاد.
فکر می کنید اگه بخوایم معکوس نمودار یک تابع رورسم کنیم چی کار باید بکنیم؟
کافیه قرینه‌ی اون نمودار رو نسبت به خط $y=x$ رسم کنیم. مثلاً:



اگه می خواید بفهمید که نقطه‌ی $A'(\beta,\alpha)$ روی تابع f^{-1} قرار داره یا نه بهتره که غیرمستقیم عمل کنید. یعنی بررسی کنید که $A(\alpha,\beta)$ روی تابع f قرار داره یا نه. اگه A روی f قرار داشت پس A' هم روی f^{-1} قرار داره و در غیر اینصورت خیر.

سؤال۲: نمودار معکوس تابع $f(x)=\dfrac{x}{x^۲+۱}$ از کدام نقطه می گذرد؟

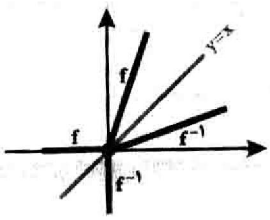
۱) $\left(\dfrac{۱}{۲},۱\right)$ ۲) $(۱,۰)$ ۳) $(۰,۱)$ ۴) $\left(\dfrac{\sqrt{۳}}{۳},\sqrt{۳}\right)$

منظور سؤال اینه که کدوم یک از نقاط داده شده روی تابع f^{-1} قرار داره. کاملاً واضحه که نقطه‌ی $A'\left(\dfrac{۱}{۲},۱\right)$ روی تابع f^{-1} قرار داره و علتش هم اینکه نقطه‌ی $A\left(۱,\dfrac{۱}{۲}\right)$ روی تابع $f(x)=\dfrac{x}{x^۲+۱}$ قرار داره.

سؤال۳: معکوس تابع $f(x)=x+|x|$ را رسم کنید.

: آقا اجازه!! تابع نیست چون f یک به یک نیست.

$$f(x)=x+|x| \Longrightarrow f(x)=\begin{cases} 2x & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$



به نظر شما چه ارتباطی بین دامنه و برد توابع f و f^{-1} وجود داره؟

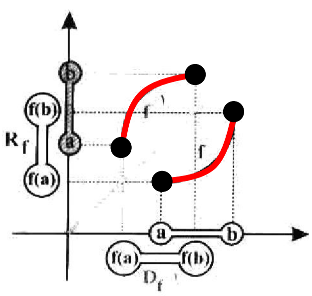
از اونجایی که در عمل معکوس کردن، جای x و y عوض میشه پس می تونیم بگیم که جای دامنه و برد هم عوض میشه.

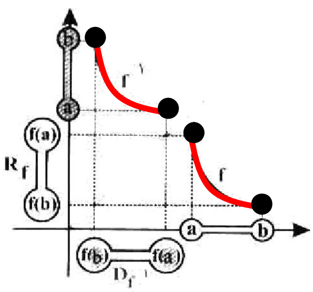
$$\boxed{D_f = R_{f^{-1}} \text{ و } R_f = D_{f^{-1}}}$$

اگه به دو نمودار بعدی دقت کنید می بینید که دارن با ما حرف می زنن و میگن:

اگه تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و اکیداً صعودی باشه، تابع f^{-1} در بازه‌ی $[f(a),f(b)]$ پیوسته و اکیداً صعودی می شه. $\left(D_{f^{-1}}=R_f\right)$

اگه تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و اکیداً نزولی باشه، تابع f^{-1} در بازه‌ی $[f(b),f(a)]$ پیوسته و اکیداً نزولی می شه. $\left(D_{f^{-1}}=R_f\right)$





تعریف ریاضی دو تابع معکوس هم:

تابع $g(x)$ رو معکوس تابع $f(x)$ می گیم اگه دو شرط روبه رو برقرار باشه.

$$g(f(x))=x$$
$$f(g(x))=x$$

در واقع وقتی دو تابع معکوس، با هم ترکیب بشن همدیگه رو خنثی می کنن. یعنی:

$$\left.\begin{aligned} f(f^{-1}(\bigcirc)) &= \bigcirc \\ f^{-1}(f(\bigcirc)) &= \bigcirc \end{aligned}\right\}$$

سؤال۴: بررسی کنید دو تابع $f(x)=(x-1)^3$ و $g(x)=\sqrt[3]{x}+1$ معکوس هم هستند یا نه؟

کافیه که یه بار g رو تو دل f بنداریم یه بار دیگه f رو تودل g. یعنی:

$$f(g(x))=f(\sqrt[3]{x}+1)\underset{\downarrow}{=}(\boxed{\sqrt[3]{x}+1}-1)^3=(\sqrt[3]{x})^3=x\Rightarrow f(g(x))=x$$

$$\boxed{f(x)=(x-1)^3}$$

$\Rightarrow$ f و g معکوس همند.

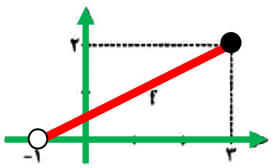
$$g(f(x))=g((x-1)^3)\underset{\downarrow}{=}(\sqrt[3]{\boxed{(x-1)^3}}+1)^3=(x-1)+1=x\Rightarrow g(f(x))=x$$

$$\boxed{g(x)=\sqrt[3]{x}+1}$$

تابع $y=f(f^{-1}(x))$ برابره با: $\boxed{y=x,D=D_{f^{-1}}}$

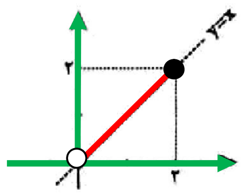
تابع $y=f^{-1}(f(x))$ برابره با: $\boxed{y=x,D=D_{f}}$

سؤال۵: نمودار تابع f شکل مقابل است. نمودار تابع $y=f(f^{-1}(x))$ و $y=f^{-1}(f(x))$ را رسم کنید.

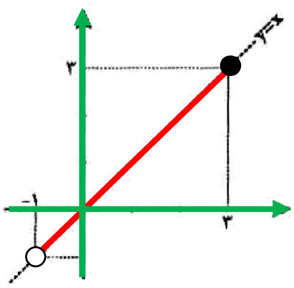


$\Rightarrow$ $\begin{cases}D_f=(-1,3]\\R_f=(0,2]\end{cases}$

۱) $y=f(f^{-1}(x))$ $\Rightarrow$ $\boxed{y=x\ ,\ D=D_{f^{-1}}=R_f=(0,2]}$ $\xrightarrow{\text{نمودار}}$



۲) $y=f^{-1}(f(x))$ $\Rightarrow$ $\boxed{y=x\ ,\ D=D_f=(-1,3]}$ $\xrightarrow{\text{نمودار}}$



ضابطه‌ی تابع معکوس:

همونطور که می دونید برای معکوس کردن یک تابع باید جای x و y اون تابع رو عوض کنید.

سؤال۶: معکوس تابع $y=\sqrt[3]{x-1}-2$ رو به دست بیارید.

$$x=\sqrt[3]{y-1}-2 \Rightarrow \sqrt[3]{y-1}=x+2 \Rightarrow y-1=(x+2)^3 \Rightarrow \underbrace{y=(x+2)^3+1}_{\text{تنها شد } y}$$

نتیجه
$$\overset{f}{\boxed{y=\sqrt[3]{x-1}-2}} \Rightarrow \overset{f^{-1}}{\boxed{y=(x+2)^3+1}}$$

سؤال۷: معکوس تابع $y=x^3-3x^2+3x+3$ رو به دست بیارید؟

مرحله۱) جای x و y رو عوض می کنیم. مرحله۲) y رو تنها می کنیم.

$$y=x^3-3x^2+3x+3 \xrightarrow[\text{(معکوس کردن)}]{\text{عوض کردن جای x و y}} x=y^3-3y^2+3y+3 \xrightarrow{\text{تنها کردن y}} x=(y-1)^3+4$$

$$\Rightarrow (y-1)^3=x-4 \Rightarrow y-1=\sqrt[3]{x-4} \Rightarrow \boxed{y=\sqrt[3]{x-4}+1}$$

سؤال۸: معکوس تابع $y=x^2-2x+3$ رو با شرط $x<1$ به دست بیارید.

$$y=x^2-2x+3\ ,\ x<1 \xrightarrow{\text{(معکوس کردن)}} x=y^2-2y+3\ ,\ y<1 \xrightarrow{\text{تنها کردن y}} x=(y-1)^2+2$$

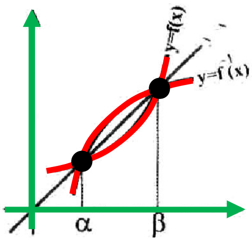
$$\Rightarrow (y-1)^2=x-2 \Rightarrow |y-1|=\sqrt{x-2} \xrightarrow{y<1} -(y-1)=\sqrt{x-2} \Rightarrow y-1=-\sqrt{x-2} \Rightarrow \boxed{y=-\sqrt{x-2}+1}$$

سؤال۹: در صورتی که f^{-1} و g^{-1} تابع باشند معکوس تابع $f(x)=g(2x+1)+1$ را بدست آورید.

$$\overset{f(x)}{\boxed{y=g(2x+1)+1}} \xrightarrow{\text{معکوس}} x=g(2y+1)+1 \xrightarrow{\text{تنها کردن y}} g(2y+1)=x-1$$

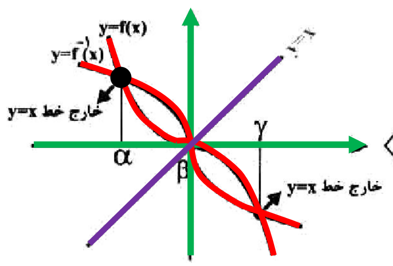
$$\xrightarrow[\text{می گیریم}]{\text{از طرفین تساوی } g^{-1}} g^{-1}(g(2y+1))=g^{-1}(x-1) \Rightarrow 2y+1=g^{-1}(x-1) \Rightarrow 2y=g^{-1}(x-1)-1 \Rightarrow \overset{f^{-1}(x)}{\boxed{y=\frac{g^{-1}(x-1)-1}{2}}}$$

نقاط برخورد دو تابع f و f^{-1} :



اگه f اکیداً صعودی باشه و نقاط برخورد تابع f با f^{-1} رو بخوان کافیه به جای حل معادله‌ی $f(x)=f^{-1}(x)$، معادله‌ی $y=f(x)$ رو حل کنیم.

اگه تابع f اکیداً صعودی باشه اون موقع نقاط برخورد f با f^{-1} روی خط $y=x$ قرار داره.



$f(x)=f^{-1}(x) \xrightarrow{\text{جواب معادله}} \begin{cases} x=\alpha \\ x=\beta \\ x=\gamma \end{cases}$

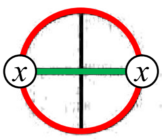
$f(x)=x \xrightarrow{\text{جواب معادله}} x=\beta$

📖 سؤال۱۰: طول نقاط برخورد دو تابع $f(x)=x+\sin x$ و معکوسش کدامست؟

اول باید بررسی کنیم تابع f اکیداً صعودی هست یا نه. یعنی:

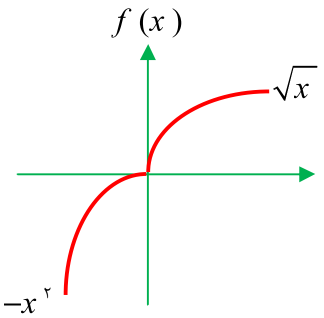
$f(x)=x+\sin x \Rightarrow f'(x)=1+\underbrace{\cos x}_{-1\le \ <1} \Rightarrow f'(x)\ge 0 \Rightarrow$ f اکیداً صعودی

حالا که تابع اکیداً صعودیه می تونه به جای حل معادله‌ی $f(x)=f^{-1}(x)$، معادله‌ی $f(x)=x$ رو حل می کنیم یعنی:

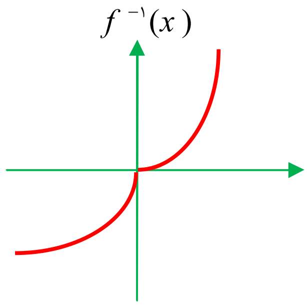
$x+\sin x=x \Rightarrow \sin x=0 \Rightarrow$  $\Rightarrow \boxed{x=k\pi}\ , k\in \mathbb{Z}$

طول نقاط برخورد f و f^{-1}

📖 سؤال۱۱: نمایش هندسی تابع معکوس تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\ge 0 \\ -x^2 & x<0\end{cases}$ کدام است؟ (آزاد ۷۵)



قرینه نسبت به خط $y=x$ ⟶



سؤال۱۲: نمایش هندسی تابع معکوس تابع $y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ از کدام نقطه می گذرد؟ (آزاد ۷۹)

۱) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},2\right)$ ۲) $(1,0)$ ۳) $(0,1)$ ۴) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right)$

پاسخ: گزینه (۴)

کافیه در گزینه ها جای x , y رو عوض کنیم هر کدام در f صدق کرد نتیجه می گیریم که نقطه متناظر آن در f^{-1} صدق می کند.

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\in R\to\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right)\in f^{-1}$$

سؤال۱۳: نمودار تابع $f(x)=-x^3+ax+b$ در نقطه $\left(-1,\frac{1}{3}\right)$ نمودار تابع وارونش را قطع می کند مقدار $a+b$ کدام است.(سه سطحی قلم چی)

۱) $-\frac{1}{9}$ ۲) $-\frac{10}{9}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{13}{9}$

اگر (m, n) نقطه تقاطع نمودار f, f^{-1} باشد داریم: $f(m)=n, f(n)=m$ بنابراین:

$$\begin{cases}f(-1)=\frac{1}{3}\Rightarrow 1-a+b=\frac{1}{3}\\ f\left(\frac{1}{3}\right)=-1\Rightarrow -\frac{1}{27}+\frac{a}{3}+b=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a+b=-\frac{2}{3}\\ a+3b=\frac{-26}{9}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{2}{9}\\ b=-\frac{8}{9}\end{cases}\Rightarrow a+b=-\frac{10}{9}$$

سؤال۱۴: اگر تابع $f(x)=(a+1)x^4+(a+2)x^3+(a+1)x^2+3x$ با دامنه R معکوس پذیر باشد معکوس آن خط $y=x$ را در چند نقطه قطع می کند؟

برای اینکه تابع معکوس پذیر باشد با یک یک به یک باشد و یک چند جمله ای زمانی یک به یک است که در $f(x)$ درجه زوج نداشته باشیم یعنی با: $a+1=0\to a=-1$

$$f(x)=x^3+3x^2+3x$$
$$\to f(x)=x\to x^3+3x^2+3x=x\to x^3+3x^2+2x=0$$
$$\to x(x^2+3x+2)=x(x+1)(x+2)=0\to x=0,-1,-2$$

سؤال۱۵: اگر تابع $f(x)=ax^3+(a-2)x^2-3x$ معکوس پذیر باشد حدود a کدام است؟ (سه سطحی قلم چی)

۱) $[-4,+\infty)$ ۲) $[-4,-1]$ ۳) $(-\infty,0)$ ۴) $[0,4)$

$$f'(x)=3ax^2+2(a-2)x-3$$

برای اینکه تابع معکوس پذیر باشد باید اکیداً یکنوا باشد بنابراین تابع یا باید صعودی اکید یا نزولی اکید باشد بنابراین f' که معادله درجه دوم است نباید تغییر علامت بدهد یعنی:

$$\Delta\le 0\Rightarrow(2(a-2))^2-4(-3)(3a)\le 0\Rightarrow 4a^2-16a+16+36a\le 0$$
$$\Rightarrow 4(a^2+5a+4)\le 0\Rightarrow(a+4)(a+1)\le 0\Rightarrow -4\le a\le -1$$

سؤال۱۶: تابع $f(x)=(x-2)^3+ax^2+1$ معکوس پذیر است. حاصل $f^{-1}(-7)$ کدام است.

۱) ۱ ۲) ۲- ۳) ۱- ۴) صفر

$f^{-1}(-7)=x \Rightarrow f(x)=-7 \Rightarrow (x-2)^3+ax^2+1=-7$

$\Rightarrow x^3-6x^2+12x-8+ax^2+1=-7 \Rightarrow x^3-6x^2+12x-8+ax^2+8=0$

$\Rightarrow x^3+(a-6)x^2+12x=0 \Rightarrow x(x^2+(a-6)x+12)=0 \rightarrow$

f معکوس پذیر است پس باید $x^2+(a-2)x+12$ ریشه نداشته باشد:

$x=0 \Rightarrow f^{-1}(-7)=0$

📖 سؤال ۱۷: اگر $f(x)=1+\sqrt{x}$, $g(x)=x^2$ و $(x>0)$ آنگاه $g^{-1}of^{-1}$ کدام است؟

نکته:

$(fog)^{-1}(x)=g^{-1}of^{-1}(x)$

$(gof)^{-1}(x)=f^{-1}og^{-1}(x)$

$g^{-1}of^{-1}=(fog)^{-1}(x)$

$f(g(x))=1+\sqrt{x^2}=1+|x|\xrightarrow{x>0}1+x$

$y=1+x \rightarrow x=1-y \xleftrightarrow{x\leftrightarrow y} y=1-x$

$\rightarrow f^{-1}(x)=1-x$

📖 سؤال ۱۸: با توجه به ماشین $x \rightarrow \boxed{f} \text{——} \boxed{g} \rightarrow x$ اگر $f(x)=2x-1$ آنگاه $g(0)$ کدام است؟

(سراسری ۸۲)

$g(f(x))=x \rightarrow g(2x-1)=x \rightarrow 2x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2} \rightarrow g(0)=\frac{1}{2}$

📖 سؤال ۱۹: معکوس تابع $y=\frac{2x-1}{x-2}$ خط $y=x$ را در چند نقطه قطع می کند؟

$\frac{2x-1}{x-2}=x \rightarrow x^2-2x=2x-1 \rightarrow x^2-4x+1=0 \xrightarrow{\Delta>0}$ دو ریشه و در نتیجه دو نقطه تلاقی داریم.

📖 سؤال ۲۰: معکوس تابع $y=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ با شرط $x>2$ کدام است؟ (آزاد ۸۸)

$y=\sqrt{(x-1)-2\sqrt{x-1}+1}=\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}=|\sqrt{x-1}-1|\xrightarrow{x>2}\sqrt{x-1}-1>0$

$\rightarrow y=\sqrt{x-1}-1 \rightarrow y+1=\sqrt{x-1} \rightarrow y^2+2y+1=x-1$

$\rightarrow x=y^2+2y+2 \xleftrightarrow{x\leftrightarrow y} f^{-1}(x)=x^2+2x+2$

📖 سؤال ۲۱: در تابع با ضابطه $f(x)=-x+\sqrt{-2x}$ مقدار $f^{-1}(4)$ کدام است؟

کافیه ببینیم به ازای چه x هایی مقدار تابع f مساوی ۴ می شود:

$f^{-1}(4)=x \Rightarrow f(x)=4$

$\rightarrow -x+\sqrt{-2x}=4 \rightarrow \sqrt{-2x}=x+4 \rightarrow$ توان ۲ $\rightarrow -2x=x^2+8x+16 \rightarrow (x+2)(x+8)=0 \rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-8 \end{cases}$

اما $x=-8$ قابل قبول نیست زیرا در معادله بالا صدق نمی کند:

$f^{-1}(4)=-2$

📖 **سؤال۲۲:** اگر $f^{-1}(x)=x+\sqrt{x}\,,\,g(x)=f(۳x-۴)$ حاصل $g^{-1}(۱۶)$ کدام است؟ (سراسری ۸۹)

فرض کنیم $g^{-1}(۱۶)=x$ یعنی: $g(x)=۱۶$

$$f(۳x-۴)=۱۶\rightarrow ۳x-۴=f^{-1}(۱۶)\xrightarrow[f^{-1}(۱۶)=۱۶+\sqrt{۱۶}=۱۶+۴=۲۰]{f^{-1}(x)=x+\sqrt{x}}۳x-۴=۲۰\rightarrow ۳x=۲۴\rightarrow x=۸$$

📖 **سؤال۲۳:** اگر $f^{-1}(x)=\sqrt[۳]{۲x}\,,\,g(x)=f(x)+\sqrt{f(x)}$ حاصل $g^{-1}(۶)$ کدام است؟ (خارج از کشور ۸۹)

فرض می کنیم $g^{-1}(۶)=x$ یا $g(x)=۶$

$$f(x)+\sqrt{f(x)}=۶\xrightarrow{\sqrt{f(x)}=t\geq ۰}t^{۲}+t=۶\rightarrow t^{۲}+t-۶=۰$$

$$\rightarrow (t+۳)(t-۲)=۰\rightarrow\begin{cases}t=-۳\\ t=۲\end{cases}\rightarrow\sqrt{f(x)}=۲\rightarrow f(x)=۴$$

$$\underline{f^{-1}(۴)=x}\xrightarrow{f^{-1}(x)=\sqrt[۳]{۲x}}f^{-1}(۴)=\sqrt[۳]{۸}=۲\rightarrow \underline{g^{-1}(۶)=x}=۲$$

📖 **سؤال۲۴:** اگر $f(x)=x+\sin\left(\frac{\pi}{۴}x\right)$ نمودارهای دو تابع f و f^{-1} در بازه $[-۱,۹]$ چند نقطه مشترک دارند؟

(خارج از کشور ۹۰)

$$f'=۱+\frac{\pi}{۴}\cos\left(\frac{\pi}{۴}x\right)$$

$$-۱\leq\cos\left(\frac{\pi}{۴}x\right)\leq ۱\rightarrow -\frac{\pi}{۴}\leq\frac{\pi}{۴}\cos\left(\frac{\pi}{۴}x\right)\leq\frac{\pi}{۴}\rightarrow ۰<۱-\frac{\pi}{۴}\leq ۱+\frac{\pi}{۴}\cos\left(\frac{\pi}{۴}x\right)\leq ۱+\frac{\pi}{۴}$$

پس $f'>۰$ و تابع صعودی است پس نقاط برخورد نمودارهای f و f^{-1} همان نقاط برخورد تابع f و خط $y=x$ است.

$$f(x)=x\rightarrow x+\sin\left(\frac{\pi}{۴}x\right)=x\rightarrow\sin\left(\frac{\pi}{۴}x\right)=۰$$

$$\frac{\pi}{۴}x=k\pi\rightarrow x=۴k\xrightarrow{x\in[-۱,۹]}x=۰,۴,۸$$

📖 **سؤال۲۵:** دو تابع $g=\{(۲,۱),(۳,۲),(۵,۴)\}\,,\,f=[(۱,۲),(۲,۳),(۴,۵),(۳,۴)]$ مفروضند تابع $g^{-1}of^{-1}$ کدام است؟

(خارج از کشور ۹۰)

$$g^{-1}of^{-1}=(fog)^{-1}$$

$$fog:\begin{cases}۲\xrightarrow{g}۱\xrightarrow{f}۲\\ ۳\xrightarrow{g}۲\xrightarrow{f}۳\\ ۵\xrightarrow{g}۴\xrightarrow{f}۵\end{cases}\rightarrow fog=\{(۲,۲),(۳,۳),(۵,۵)\}$$

$$(fog)^{-1}=\{(۲,۲),(۳,۳),(۵,۵)\}$$

📖 **سؤال۲۶:** معکوس تابع $y=x^{۵}+۲x-۳$ از کدام نقطه می گذرد؟ (خارج از کشور ۹۰)

۱) $(۲,۶)$ ۲) $(۰,-۳۰)$ ۳) $(۱,۱)$ ۴) $(۶,۲)$

📢 **پاسخ:** گزینه (۴)

باز هم سؤال تکراری! $(۲,۶)\in f\rightarrow (۶,۲)\in f^{-1}$

سؤال۲۷: دو تابع $f=\{(۵,۲),(۷,۳),(۱,۴),(۳,۶),(۹,۱)\}$ و $g(x)=\sqrt{۵x+۹}$ مفروض اند. اگر $(g^{-۱}of^{-۱})(a)=۸$ باشد a کدام است؟ (خارج تجربی ۹۶)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۷

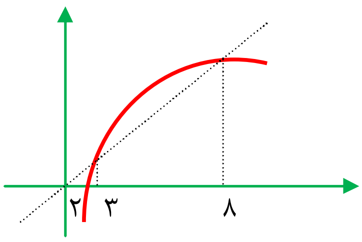
$$(g^{-۱}of^{-۱})(a)=(fog)^{-۱}(a)=۸\Rightarrow fog(۸)=a$$
$$\Rightarrow f(g(۸))=a\Rightarrow f(\sqrt{۵\times۸+۹})=f(\sqrt{۴۹})=f(۷)=۳\Rightarrow a=۳$$

سؤال۲۸: دو تابع $f=\{(۲,۵),(۶,۳),(۳,۷),(۴,۱),(۱,۹)\}$ و $g(x)=\dfrac{x}{x-۱}$ مفروض اند. اگر $f^{-۱}(g(۲a))=۶$ باشد a کدام است. (داخل تجربی ۹۶)

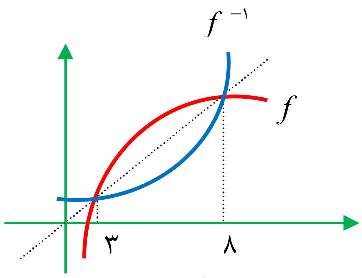
۱) $\dfrac{۱}{۲}$ ۲) $\dfrac{۳}{۴}$ ۳) $\dfrac{۳}{۲}$ ۴) $\dfrac{۵}{۲}$

$$f^{-۱}(g(۲a))=۶\Rightarrow f(۶)=g(۲a)\Rightarrow ۳=g(۲a)\Rightarrow\frac{x}{x-۱}=۳\Rightarrow ۳x-۳=x$$
$$\Rightarrow ۲x=۳\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۲a=\frac{۳}{۲}\Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$$

سؤال۲۹: شکل رو به رو نمودار تابع $y=f(x)$ و نیمساز ناحیه اول و سوم است.دامنه تابع با ضابطه $y=\sqrt{x-f^{-۱}(x)}$ کدام است. (داخل تجربی ۹۴)



۱) $[۰,۲]$ ۲) $[۲,۳]$
۳) $[۲,۸]$ ۴) $[۳,۸]$



نمودار f و $f^{-۱}$ نسبت به خط $y=x$ قرینه هستند پس نمودار $f^{-۱}$ را رسم می کنیم.

اگر دقت کنید هر جا که f بالای نیمساز باشد نمودار $f^{-۱}$ پایین نیمساز است و بالعکس.

دامنه تابع y: $x-f^{-۱}(x)\geq ۰\Rightarrow x\geq f^{-۱}(x)$

پس باید بازه ای را پیدا کنیم که نمودار $f^{-۱}(x)$ زیر خط $y=x$ باشد یعنی همان جاهایی که $f(x)$ بالای خط $y=x$ است یعنی بازه $[۳,۸]$ قابل قبول است.

سؤال۳۰: اگر $f(x)=\frac{۱}{۲}(x+\sqrt{x^۲+۴})$ باشد حاصل $f^{-۱}(x)+f^{-۱}\left(\dfrac{۱}{x}\right)$ کدام است. (داخل ریاضی ۹۵)

۱) $۲x$ ۲) $\dfrac{۲}{x}$ ۳) $x^۲-۱$ ۴) صفر

$$y=\frac{۱}{۲}(x+\sqrt{x^۲+۴})\Rightarrow ۲y=x+\sqrt{x^۲+۴}\Rightarrow ۲y-x=\sqrt{x^۲+۴}\xrightarrow{\text{به توان۲}}$$
$$\Rightarrow ۴y^۲-۴xy+x^۲=x^۲+۴\Rightarrow ۴y^۲-۴=۴xy\Rightarrow x=\frac{y^۲-۱}{y}=y-\frac{۱}{y}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=x-\frac{۱}{x}\Rightarrow f^{-۱}(x)+f^{-۱}\left(\frac{۱}{x}\right)=\left(x-\frac{۱}{x}\right)+\left(\frac{۱}{x}-x\right)=۰$$

سؤال ۳۱: ضابطه وارون تابع $y=\frac{x}{1+|x|}$ کدام است. (داخل تجربی ۹۱)

۱) $y=\frac{x}{1-|x|},|x|<1$ ۲) $y=\frac{1-|x|}{|x|},|x|>1$

۳) $y=\frac{x}{|x|-1},|x|>1$ ۴) $y=\frac{|x|-1}{x},|x|<1$

$$\begin{cases} x\ge 0: y=\frac{x}{1+x}\Rightarrow y+yx=x\Rightarrow x=\frac{y}{1-y}\xrightarrow{x\ge 0} 0\le y<1 \\ x<0: y=\frac{x}{1-x}\Rightarrow y-yx=x\Rightarrow x=\frac{y}{1+y}\xrightarrow{x<0} -1<y<0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{y}{1-y} & 0\le y<1\\ \frac{y}{1+y} & -1<y<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=\frac{y}{1-|y|},|y|<1\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{1-|x|},|x|<1$$

روش دوم) $y=\frac{x}{1+|x|}\xrightarrow[\text{هم علامت هستند } x,y]{\text{مخرج کسر همواره مثبت است}}|y|=\frac{|x|}{1+|x|}\Rightarrow|y|+|y||x|=|x|\Rightarrow|x|(1-|y|)=|y|$

$$\Rightarrow|x|=\frac{|y|}{1-|y|}\xrightarrow{|x|\ge 0}1-|y|>0\Rightarrow|y|<1\Rightarrow x=\frac{y}{1-|y|},|y|<1\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{1-|x|},|x|<1$$

روش سوم) $\begin{vmatrix}1\\ \frac{1}{2}\end{vmatrix}\in f\Rightarrow\begin{vmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\end{vmatrix}\in f^{-1}\Rightarrow$ گزینه ۱ درست است.

توجه کنید در گزینه۳ هم به ازای $\frac{1}{2}$ مقدار ۱ بدست می آید اما $\frac{1}{2}$ در دامنه آن نیست.

سؤال ۳۲: اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ باشد ضابطه تابع $f^{-1}(\sin x)$ کدام است. (داخل ریاضی ۹۰)

۱) $\tan x$ ۲) $\frac{|\cos x|}{\sin x}$ ۳) $\cot x$ ۴) $\frac{\sin x}{|\cos x|}$

$$y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\xrightarrow{\text{هم علامت اند } x,y}y^2=\frac{x^2}{1+x^2}\Rightarrow y^2+y^2x^2=x^2\Rightarrow x^2(1-y^2)=y^2$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{y^2}{1-y^2}\Rightarrow x=\pm\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\xrightarrow{\text{هم علامت اند } x,y}x=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow f^{-1}(\sin x)=\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x}}=\frac{\sin x}{|\cos x|}$$

سؤال ۳۳: اگر $f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ ضابطه $f^{-1}(\sec x)$ کدام است؟

۱) $\frac{\cos x}{|\sin x|}$ ۲) $\frac{\sin x}{|\cos x|}$ ۳) $\frac{|\cos x|}{\sin x}$ ۴) $\frac{|\sin x|}{\cos x}$

$$f^{-1}(\sec x)=\alpha \Rightarrow f(f^{-1}(\sec x))=f(\alpha) \Rightarrow \sec x = f(\alpha)=\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha} \longrightarrow$$

$$\sec^2 x=\frac{1+\alpha^2}{\alpha^2} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1+\alpha^2}{\alpha^2} \Rightarrow 1+\tan^2 x=\frac{1}{\alpha^2}+1 \Rightarrow \tan^2\alpha=\frac{1}{\alpha^2} \Rightarrow \alpha^2=\frac{1}{\tan^2 x}=\cot^2 x$$

$$\Rightarrow \alpha=\pm|\cot x|$$

چون f تابعی فرد است α جاهایی که $\cos x>0$ است، مثبت و جاهایی که $\cos x<0$ است منفی است پس:

$$\begin{cases} \cos x>0 \Rightarrow \alpha=|\cot x|=\dfrac{|\cos x|}{|\sin x|}=\dfrac{\cos x}{|\sin x|} \\ \cos x<0 \Rightarrow \alpha=-|\cot x|=-\dfrac{|\cos x|}{|\sin x|}=-\dfrac{-\cos x}{|\sin x|}=\dfrac{\cos x}{|\sin x|} \end{cases}$$

پس در هر صورت $\alpha=\dfrac{\cos x}{|\sin x|}$

📖 **سؤال ۳۴: اگر دو خط به معادلات $ax+by=8$ و $2x-3y=b$ نسبت به نیمساز ربع اول متقارن باشند. $a+b$ کدام است؟ (خارج ریاضی ۹۳)**

۱) ± 3 ۲) ± 2 ۳) -3 و 2 ۴) 3 و -2

وقتی دو نمودار نسبت به نیمساز ربع اول متقارن هستند یعنی وارون هم هستند. باید وارون خط $2x-3y=b$ یعنی $2y-3x=b$ منطبق بر خط $ax+by=8$ باشد:

$$\begin{cases} 2y-3x=b \\ ax+by=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x+2y=b \\ ax+by=8 \end{cases} \Rightarrow -\frac{3}{a}=\underbrace{\frac{2}{b}=\frac{b}{8}}_{b^2=16\Rightarrow b=\pm 4} \Rightarrow \begin{cases} b=4 \Rightarrow a=-6 \Rightarrow a+b=-2 \\ b=-4 \Rightarrow a=6 \Rightarrow a+b=2 \end{cases} \Rightarrow a+b=\pm 2$$

📖 **سؤال ۳۵: تابع با ضابطه $y=x|x-2|$ در یک بازه با بیشترین طول نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه کدام است. (داخل تجربی ۹۴)**

۱) $1-\sqrt{1+x}\,;x<0$ ۲) $1-\sqrt{1-x}\,;x<1$

۳) $1+\sqrt{1-x}\,;0<x<1$ ۴) $1-\sqrt{1-x}\,;0<x<1$

$$f(x)=x|x-2|=\begin{cases} x^2-2x & x\ge 2 \\ -x^2+2x & x\le 2 \end{cases}$$

شرط نزولی بودن $f'(x)<0$ است داریم:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-2 & x>2 \\ -2x+2 & x<2 \end{cases} \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-2<0 \Rightarrow x<1 & x>2 \Rightarrow \phi \\ -2x+2<0 \Rightarrow x>1 & x<2 \xrightarrow{\text{اشتراک}} 1<x<2 \end{cases}$$

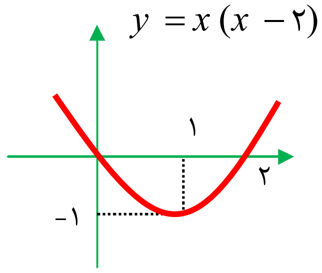
پس تابع f به ازای $1<x<2$ نزولی است که برد آن (دامنه f^{-1}) در این فاصله به صورت $(f(2),f(1))$ یعنی $0<y<1$ می باشد. حال ضابطه f^{-1} را می یابیم:

$$f(x)=-x^2+2x=-x^2+2x-1+1=-(x-1)^2+1 \Rightarrow y=-(x-1)^2+1$$

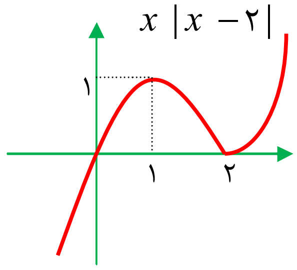
$$\Rightarrow (x-1)^2=1-y \Rightarrow x-1=\sqrt{1-y} \Rightarrow x=1+\sqrt{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x)=1+\sqrt{1-x}\,,0<x<1$$

گزینه(۳) درست است.

روش دوم)



برای $x>2$ نمودار قرینه می شود $\longrightarrow$



دامنه f برای نزولی بودن به صورت $1<x<2$ است و برد آن $0<y<1$ می باشد.

به عنوان مثال: $x=\frac{3}{2}\Rightarrow y=\frac{3}{2}\left|\frac{3}{2}-2\right|=\frac{3}{4}\Rightarrow \left|\begin{matrix}\frac{3}{2}\\ \frac{3}{4}\end{matrix}\right|\in f\Rightarrow \left|\begin{matrix}\frac{3}{4}\\ \frac{3}{2}\end{matrix}\right|\in f^{-1}$

گزینه (۳) درست است.

سؤال ۳۶: نمودار تابع $y=|2x-6|-|x+4|+x$ در یک بازه بیشترین طول اکیداً نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه کدام است. (داخلی ریاضی ۹۴)

۱) $-x+6; x<-4$

۲) $-x+5; x>2$

۳) $-\frac{1}{2}x+1; -4<x<3$

۴) $-\frac{1}{2}x+1; -4<x<10$

$$y=\begin{cases}-(2x-6)+(x+4)+x & x\le -4\\ -(2x-6)-(x+4)+x & -4<x<3\\ (2x-6)-(x+4)+x & x\ge 3\end{cases}=\begin{cases}0 & x\le -4\\ -2x+2 & -4<x<3\\ 2x-10 & x\ge 3\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع در فاصله (۳، ۴-) نزولی است:

$$\begin{cases}f(x)=-2x+2\\ -4<x<3\end{cases}\xrightarrow[f(3)=-4]{f(-4)=10}\begin{cases}f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+1\\ -4<x<10\end{cases}$$

دقت کنید که دامنه f^{-1} همان برد f است.

سؤال ۳۷: تابع با ضابطه $f(x)=2x-|4-2x|$ در بازه ای وارون پذیر است. ضابطه $f^{-1}(x)$ در آن بازه کدام است. (خارج ریاضی ۹۲)

۱) $\frac{1}{4}x+1; x\ge 4$

۲) $\frac{1}{4}x-1; x\le 4$

۳) $\frac{1}{4}x-1; x\ge 4$

۴) $\frac{1}{4}x+1; x\le 4$

$$f(x)=\begin{cases}2x-(4-2x) & x\le 2\\ 2x-(-(4-2x)) & x\ge 2\end{cases}=\begin{cases}4x-4 & x\le 2 & \text{یک به یک و وارون پذیر}\\ 2x+4-2x=4 & x\ge 2 & \text{تابع ثابت و غیر یک به یک}\end{cases}$$

پس باید وارون تابع $f(x)=4x-4$ را با دامنه $x\le 2$ بدست آوریم:

$$x\le 2\Rightarrow y=4x-4\le 4\Rightarrow y=4x-4\Rightarrow 4x=y+4\Rightarrow x=\frac{1}{4}y+1\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x+1, x\le 4$$

روش دوم) $x\le 2\xrightarrow{\text{به عنوان مثال}}\left|\begin{matrix}0\\-4\end{matrix}\right.\in f\Rightarrow\left|\begin{matrix}-4\\0\end{matrix}\right.\in f^{-1}$ گزینه (۴) درست است.

سؤال۳۸: ضابطه‌ی معکوس $y=2-\sqrt{x-1}$ کدام است؟ (داخلی تجربی ۹۲)

۱) $y=x^2-4x+5;x\le 2$ ۲) $y=-x^2+4x-5;x\le 2$

۳) $y=-x^2+4x+5;x\ge 1$ ۴) $y=x^2-4x+5;x\ge 1$

$$\sqrt{x-1}=2-y\xrightarrow[y\le 2]{2-y\ge 0}x-1=(2-y)^2\Rightarrow x=1+(2-y)^2\Rightarrow x=1+4-4y+y^2=y^2-4y+5$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=x^2-4x+5, x\le 2$$

روش دوم) $y(5)=2-\sqrt{5-1}=0\Rightarrow\left|\begin{matrix}5\\0\end{matrix}\right.\in f\Rightarrow\left|\begin{matrix}0\\5\end{matrix}\right.\in f^{-1}$ گزینه (۱) درست است.

سؤال۳۹: با توجه به ماشین مقابل اگر $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ و g یک تابع یک به یک باشد و داشته باشیم $g(m)=2$ مقدار m کدام است؟ (کانون ۹۳)

$$x\longrightarrow\boxed{f}\longrightarrow\boxed{g}\longrightarrow x$$

۱) ۲ ۲) ۲/۵

۳) ۱/۵ ۴) ۱

سوال داره میگه که g,f معکوس هم دیگه هستند یعنی $g(f(x))=x$

$$\begin{cases}g(m)=2\\ g(f(2))=2\end{cases}\Rightarrow m=f(2)=\frac{2\times 2-1}{2+1}=\frac{3}{3}=1$$

سؤال۴۰: تابع با ضابطه $f(x)=x^2-ax+3;x>3$ وارون پذیر است. اگر $f^{-1}(-5)=4$ باشد آنگاه $f^{-1}(-2)$ کدام است. (کانون۸۸)

$$f^{-1}(-5)=4\Rightarrow f(4)=-5\Rightarrow -5=16-4a+3\Rightarrow a=6$$

$$\Rightarrow f(x)=x^2-6x+3$$

مطلوب مسأله: $f^{-1}(-2)=x\Rightarrow f(x)=-2\Rightarrow -2=x^2-6x+3\Rightarrow x^2-6x+5=0$

$$\Rightarrow (x-1)(x-5)=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=5\end{cases}\xrightarrow{x>3}x=5$$

سؤال۴۱: اگر $f(x)=f^{-1}(5)+x-3$ باشد آنگاه $f(5)$ کدام است. (آزمون کانون۹۴)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

$$\left|\begin{matrix}5\\f^{-1}(5)\end{matrix}\right.\in f^{-1}(x)\Rightarrow\left|\begin{matrix}f^{-1}(5)\\5\end{matrix}\right.\in f(x)\xrightarrow[f(x)=5]{x=f^{-1}(5)}5=f^{-1}(5)+f^{-1}(5)-3\Rightarrow 2f^{-1}(5)=8\Rightarrow f^{-1}(5)=4$$

$$\Rightarrow f(x)=4+x-3\Rightarrow f(x)=x+1\Rightarrow f(5)=5+1=6$$

سؤال۴۲: اگر $f(x)=x+2\sqrt{x}$ ، $x\ge 0$ ، $g(x)=x-2\sqrt{x+1}$ باشند و ضابطه $f^{-1}og^{-1}$ به صورت $ax+b$ باشد $a-b$ کدام است.

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

معکوس $y=ax+b$ برابر $\dfrac{x-b}{a}$ است:

$$f^{-1}og^{-1}(x)=ax+b \xrightarrow[\text{می گیریم}]{\text{معکوس}} gof(x)=\frac{x-b}{a}$$

$$gof(x)=f(x)-2\sqrt{f(x)+1}=x+2\sqrt{x}-2\sqrt{x+2\sqrt{x}+1}=x+2\sqrt{x}-2\sqrt{(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$=x+2\sqrt{x}-2|\underbrace{\sqrt{x}+1}_{\text{مثبت}}|=x+2\sqrt{x}-2(\sqrt{x}+1)=x-2 \longrightarrow \frac{x-b}{a}=x-2\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow a-b=1-2=-1$$

سؤال۴۳: وارون تابع $f(x)=x+4\sqrt{x}+8$ به صورت $f^{-1}(x)=x-a\sqrt{x-b};x\ge c$ است. مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

$$f(x)=x+4\sqrt{x}+8\Rightarrow y=x+4\sqrt{x}+4+4\Rightarrow y-4=\underbrace{(\sqrt{x}+2)^2}_{\text{نامنفی}}\Rightarrow\sqrt{y-4}=\sqrt{x}+2$$

$$\Rightarrow\sqrt{x}=\sqrt{y-4}-2\Rightarrow x=y-4+4-4\sqrt{y-4}\Rightarrow x=y-4\sqrt{y-4}$$

در ضمن : $\sqrt{y-4}-2\ge 0\Rightarrow\sqrt{y-4}\ge 2\Rightarrow y-4\ge 4\Rightarrow y\ge 8$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=x-4\sqrt{x-4};x\ge 8$$

(روش دوم) $f(x)=x+4\sqrt{x}+8\Rightarrow\begin{cases}x=0\Rightarrow f(0)=8\Rightarrow f^{-1}(8)=0\\ x=1\Rightarrow f(1)=13\Rightarrow f^{-1}(13)=1\end{cases}$

$$f^{-1}(x)=x-a\sqrt{x-b}$$

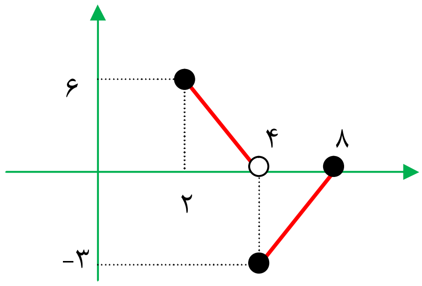
$$\begin{cases}f^{-1}(8)=8-a\sqrt{8-b}=0\Rightarrow a\sqrt{8-b}=8\\ f^{-1}(13)=13-a\sqrt{13-b}=1\Rightarrow a\sqrt{13-b}=12\end{cases}\Rightarrow\frac{\sqrt{8-b}}{\sqrt{13-b}}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow\frac{8-b}{13-b}=\frac{4}{9}\Rightarrow 72-9b=52-4b\Rightarrow 5b=20\Rightarrow b=4$$

$$\Rightarrow a\sqrt{4}=2a=8\Rightarrow a=4$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=x-4\sqrt{x-4}$$

سؤال۱۴۴: اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد دامنه تابع $g(x)=\dfrac{fof^{-1}(x)}{f^{-1}of(x)}$ کدام است.



$$\begin{cases} D_{fof^{-1}}=D_{f^{-1}}=R_f=[-۳,۶] \\ D_{f^{-1}of}=D_f=[۲,۸] \end{cases}$$

$$D_{g=D_{fof^{-1}}\cap D_{f^{-1}of}}-\{x\mid f^{-1}of(x)=۰\}$$

$$=[-۳,۶]\cap[۲,۸]-\{\underbrace{x\mid x=۰}\}=[۲,۶]$$

$x=۰$ در دامنه f قرار ندارد بنابراین به ازای هیچ مقداری از $f^{-1}of$ را صفر نمی کند.

سؤال۱۴۵: تابع $f(x)=\dfrac{x^۲+ax+۳}{x-۱}$ معکوس پذیر است حاصل $f^{-1}(۵)$ کدام است.

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

تابع درجه دوم به درجه اول تنها زمانی می تواند یک به یک (معکوس پذیر) باشد که تبدیل به تابع خطی شود یعنی $x=۱$ باید صورت کسر را نیز صفر کند.

$$۱^۲+a(۱)+۳=۰\Rightarrow a=-۴\Rightarrow f(x)=\frac{x^۲-۴x+۳}{x-۱}=\frac{(x-۱)(x-۳)}{x-۱}$$

$$\xrightarrow{x\neq ۱} f(x)=x-۳$$

حال اگر $f^{-1}(۵)=\alpha$ پس $f(\alpha)=۵$ لذا:

$$f(\alpha)=\alpha-۳=۵\Rightarrow \alpha=۸\Rightarrow f^{-1}(۵)=۸$$

سؤال۱۴۶: به ازای چه مقادیری از k تابع $kx+۲|x-۳|+۱$ معکوس پذیر است؟

$$f(x)=\begin{cases} kx+۲x-۶+۱ & x\geq ۳ \\ kx-۲x+۶+۱ & x\leq ۳ \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} (k+۲)x-۵ & x\geq ۳ \\ (k-۲)x+۷ & x\leq ۳ \end{cases}$$

نکته

در توابع دو ضابطه ای که هر ضابطه شامل یک خط باشند، زمانی معکوس پذیر است که شیب هر دو خط هم علامت باشند.

$$(k+۲)(k-۲)>۰\rightarrow k>۲\cup k<-۲$$

سؤال۴۷: ضابطه تابع معکوس تابع $f(x)=۲x+|x+۲|+۶$ برابر $f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۳}|x-۲|+g(x)$ است. در این صورت $g(۲)$ چیست؟

$$f(x)=\begin{cases}۳x+۸ & x\geq -۲\\ x+۴ & x\leq -۲\end{cases}\rightarrow\begin{cases}y=۳x+۸\geq ۳(-۲)+۸=۲\\ y=x+۴\leq -۲+۴=۲\end{cases}\rightarrow f^{-۱}(x)=\begin{cases}\frac{x-۸}{۳} & x\geq ۲\\ x-۴ & x\leq ۲\end{cases}$$

حالا فرض کنیم $g(x)=ax+b$:

$$f^{-۱}(x)=\begin{cases}-\frac{۱}{۳}(x-۲)+ax+b & x\geq ۲\\ \frac{۱}{۳}(x-۲)+ax+b & x\leq ۲\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\left(a-\frac{۱}{۳}\right)x+\left(b+\frac{۲}{۳}\right) & x\geq ۲\\ \left(a+\frac{۱}{۳}\right)x+\left(b-\frac{۲}{۳}\right) & x\leq ۲\end{cases}=\begin{cases}\frac{x-۸}{۳} & x\geq ۲\\ x-۴ & x\leq ۲\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases}a-\frac{۱}{۳}=۱\\ b-\frac{۲}{۳}=-۴\end{cases}\rightarrow\begin{matrix}a=\frac{۲}{۳}\\ b=-\frac{۱۰}{۳}\end{matrix}\rightarrow g(x)=\frac{۲}{۳}x-\frac{۱۰}{۳}\Rightarrow g(۲)=\frac{۴}{۳}-\frac{۱۰}{۳}=-۲$$

سؤال۴۸: اگر $f(x)=۲|x-a|+ax-۱$ یک به یک باشد حدود a کدام است.

۱) $|a|>۱$ ۲) $|a|>۲$ ۳) $|a|<۱$ ۴) $|a|<۲$

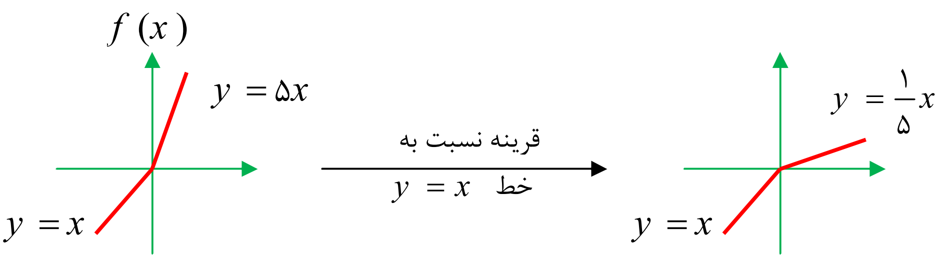
$$f(x)=\begin{cases}(a+۲)x-۲a-۱ & x\geq a\\ (a-۲)x+۲a-۱ & x<a\end{cases}$$

اگر یکی از شیب های خط های دو ضابطه بالا منفی و دیگری مثبت باشد آنگاه تابع یک به یک نخواهد بود. چون نمودار به صورت $\vee$ یا $\wedge$ می شود پس شیب دو خط ضابطه های f هم علامت هستند (اگر شیب صفر باشد تابع ثابت و غیر یک به یک می شود.)

$$(a+۲)(a-۲)>۰\Rightarrow a^۲-۴>۰\Rightarrow a^۲>۴\Rightarrow |a|>۲$$

سؤال۴۹: وارون تابع $f(x)=۳x+۲|x|$ به صورت $f^{-۱}(x)=ax+b|x|$ است. مقدار b کدام است.

۱) $-\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $-\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$



$$\begin{cases} x>0: ax+b|x|=\frac{1}{5}x \Rightarrow ax+bx=\frac{1}{5}x \Rightarrow (a+b)x=\frac{1}{5}x \Rightarrow a+b=\frac{1}{5} & (1) \\ x<0: ax+b|x|=x \Rightarrow ax-bx=x \Rightarrow (a-b)x=x \Rightarrow a-b=1 & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{5} \\ b=-\frac{2}{5} \end{cases}$$

روش دوم) اگر $\begin{array}{|l}\alpha\\ \beta\end{array}$ روی f باشد: $(f^{-1})'(\beta)=\frac{1}{f'(\alpha)}$

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}(a+b)x & x\geq 0\\ (a-b)x & x<0\end{cases} \Rightarrow (f^{-1})'(x)=\begin{cases}a+b & x\geq 0\\ a-b & x<0\end{cases}$$

$$b=\frac{(f^{-1})'_{+}(0)-(f^{-1})'_{-}(0)}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{f_{+}'(0)}-\frac{1}{f_{-}'(0)}\right)$$

می دانیم $f(x)=\begin{cases}5x & x\geq 0\\ x & x<0\end{cases}$ و در نتیجه $f'(x)=\begin{cases}5 & x\geq 0\\ 1 & x<0\end{cases}$

$$\Rightarrow b=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{1}\right)=\frac{1}{2}(-\frac{4}{5})=-\frac{2}{5}$$

📖 سؤال۵۰: چند تا از جملات زیر درست است؟ (کتاب درسی)

الف) اگر f یک به یک باشد آنگاه f^{-1} نیز یک به یک است.

ب) اگر f تابعی یک به یک و صعودی باشد آنگاه f^{-1} نیز صعودی است.

پ) اگر g تابعی یک به یک و نزولی باشد آنگاه g^{-1} نیز نزولی است.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

☜ پاسخ: گزینه۴

هر سه درست اند.

📖 سؤال۵۱: ضابطهٔ وارون تابع $g(x)=-5-\sqrt{3x+1}$ کدام است؟(کتاب درسی)

۱) $g^{-1}(x)=3x^2+30x+75 \ , \ x\geq -\frac{1}{3}$ ۲) $g^{-1}(x)=\frac{x^2+10x+24}{3} \ , \ x\geq -\frac{1}{3}$

۳) $g^{-1}(x)=3x^2+30x+75 \ , \ x\leq -5$ ۴) $g^{-1}(x)=\frac{x^2+10x+24}{3} , \ x\leq -5$

☜ پاسخ: گزینه۴

در تابع $g(x)=-5-\sqrt{3x+1}$ برای پیدا کردن ضابطهٔ تابع وارون x را برحسب y پیدا می کنیم:

$$y=-5-\sqrt{3x+1} \Rightarrow \sqrt{3x+1}=-y-5 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 3x+1=y^2+10y+25$$

$$\Rightarrow x=\frac{y^2+10y+24}{3} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\frac{x^2+10x+24}{3}$$

$$\sqrt{3x+1}\geq 0 \Rightarrow -\sqrt{3x+1}\leq 0 \Rightarrow -5-\sqrt{3x+1}\leq -5 \Rightarrow y\leq -5 \Rightarrow \text{برد تابع}: y\leq -5$$

پس دامنهٔ تابع وارون برابر است با $y \le -5$ جواب می شود (۴).

در ضابطهٔ تابع $-\sqrt{\ } - 5$ داریم پس برد تابع مقادیر کمتر یا مساوی ۵- را دارد یعنی دامنه وارون $y \le -5$ است. (گزینه ۳ یا۴ درسته) برای انتقاب گزینه هم نقطهٔ $(0,-6)$ در وارونش می خورد که فقط در (۴) صدق می کند.

📖 سؤال۵۲: ضابطهٔ تابع معکوس تابع $f(x) = x^2 - 2x + 2, x \ge 1$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 1 \ , \ x \ge 1$

۲) $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 1 \ , \ x \ge -1$

۳) $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} - 1 \ , \ x \ge 2$

۴) $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 1 \ , \ x \ge 1$

☜ پاسخ: گزینه۱

برای پیدا کردن ضابطهٔ f^{-1} با شرط $x, x \ge 1$ با شرط f^{-1} را برحسب y پیدا می کنیم و برای پیدا کردن دامنهٔ f^{-1} برد خود تابع را پیدا می کنیم:

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{y-1} = |x-1| \xrightarrow{x \ge 1} x - 1 = \sqrt{y-1} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{y-1} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = 1 + \sqrt{x-1}$$

$$\text{دامنه}: y = (x-1)^2 + 1 \Rightarrow y \ge 1$$

$$f \ \text{برد}: y \ge 1 \Rightarrow f^{-1} \ \text{دامنه}: x \ge 1$$

f از $(1,1)$ می گذرد پس باید $(1,1)$ در وارونش هم صدق کند که فقط به (۱) می خورد.

📖 سؤال۵۳: معکوس تابع کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $f^{-1}(x) = x^2 - 3 \ , \ x \ge -3$

۲) $f^{-1}(x) = x^2 - 3 \ , \ x \ge 0$

۳) $f^{-1}(x) = x^2 + 3 \ , \ x \ge -3$

۴) $f^{-1}(x) = x^2 + 3 \ , \ x \ge 0$

☜ پاسخ: گزینه۲

مثل سوال قبل حل می کنیم:

$$f^{-1} \ \text{ضابطه}: y = \sqrt{x+3} \Rightarrow y^2 = x + 3 \Rightarrow x = y^2 - 3 \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = x^2 - 3$$

$$f^{-1} \ \text{دامنه}: \sqrt{x+3} \ge 0 \Rightarrow y \ge 0$$

$$f \ \text{برد}: y \ge 0 \Rightarrow f^{-1} \ \text{دامنه}: x \ge 0$$

برد $\sqrt{x+3}$ شامل اعداد بیشتر یا مساوی صفر است (پس دامنه f^{-1} باید $x \ge 0$ باشد) به ازای $x = 1$ داریم $y = 2$. پس در وارون آن نقطه $(2,1)$ صدق می کند و جواب می شود (۲).

📖 سؤال۵۴: در کدام گزینه دو تابع وارون یکدیگر نیستند؟ (کتاب درسی)

۱) $\begin{cases} f(x) = 3x - 4 \\ g(x) = \dfrac{x+4}{3} \end{cases}$

۲) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+3} \\ g(x) = x^2 - 3, x \ge 0 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{7}{2}x - 3 \\ g(x) = -\dfrac{2x+6}{7} \end{cases}$

۴) $\begin{cases} f(x) = -\sqrt{x-8} \\ g(x) = 8 + x^2, x \le 0 \end{cases}$

☜ پاسخ: گزینه۳

در سوالی مثل این که با دو جفت تابع روبه رو هستیم که باید تعیین کنیم تابع های کدامیک از جفت ها وارون هم نیستند می توانیم ۳ کار انجام دهیم: (۱) از نقطه گذاری و این نکته که اگر $(a,b)\in f$ باشد باید $(b,a)\in f^{-1}$ استفاده کنیم و آن هایی را که وارون هم نیستند حذف کنیم. (۲) برای هر گزینه ضابطهٔ وارون f را پیدا کنیم و ببینیم برابر تابع دیگر (در این جا g) هست یا نه و (۳) ترکیب دو تابع (در این جا fog) را حساب کنیم و ببینیم که آیا نتیجه برابر x می شود یا نه. راحت ترین راه معمولاً نقطه گذاری است:

$$۱)\ \ f(x)=۳x-۴\Rightarrow(۰,-۴)\Rightarrow(-۴,۰)\Rightarrow g(x)=\frac{x+۴}{۳}$$

$$۲)\ \ f(x)=\sqrt{x+۳}\Rightarrow(۰,\sqrt{۳})\Rightarrow(\sqrt{۳},۰)\Rightarrow g(x)=x^{۲}-۳$$

$$f(x)=\frac{۷}{۲}x-۳\Rightarrow\left(۱,\frac{۱}{۲}\right)\Rightarrow\left(\frac{۱}{۲},۱\right)\Rightarrow y=-\frac{۲x+۶}{۷}$$

پس در (۳) تابع های داده شده وارون یکدیگر نیستند.

📖 **سؤال ۵۵: اگر $f=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۵)\}$ و g تابعی باشد که $\text{fog}(x)=x$ تابع g کدام می تواند باشد؟**

۱) $g=\{(۴,۱),(۲,۲),(۳,۳)\}$ ۲) $g=\{(۴,۱),(۳,۲),(۵,۳)\}$ (کتاب درسی)

۳) $g=\{(۴,۴),(۳,۳),(۵,۵)\}$ ۴) $g=\{(۴,۱),(۳,۲),(۵,۵)\}$

☜ پاسخ: گزینه۲

چون $(fog)(x)=x$ پس $g=f^{-1}$ و در نتیجه:

$$f=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۵)\}\Rightarrow f^{-۱}=g=\{(۴,۱),(۳,۲),(۵,۳)\}$$

البته g می تواند زوج های مرتب دیگری به شکل (a,b) داشته باشد فقط b نباید ۱ و ۲ و ۳ باشد. به همین دلیل این جواب تنها انتخاب g نیست مثلاً $g=\{(۴,۱),(۳,۲),(۵,۳),(۷,۸)\}$ هم قابل قبول است.

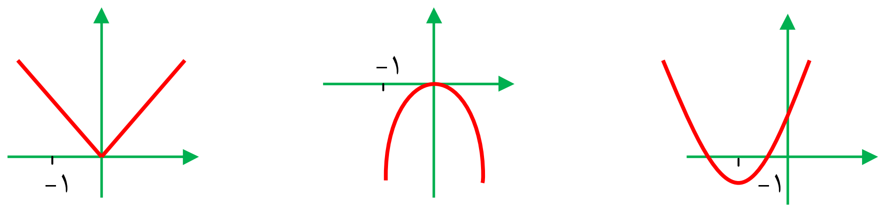
📖 **سؤال ۵۶: چندتا از توابع زیر در بازهٔ $[-۱,+\infty)$ وارون پذیرند؟**(کتاب درسی)

الف) $f(x)=|x|$ ب) $g(x)=-x^{۲}$ پ) $h(x)=x^{۲}+۴x+۳$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

☜ پاسخ: گزینه۲

نمودار هر کدام از تابع ها را رسم می کنیم:



$f(x)=|x|$ $g(x)=-x^{۲}$ $h(x)=x^{۲}+۴x+۳$

با توجه به نمودارهای رسم شده فقط تابع $h(x)$ در بازهٔ $[-۱,+\infty)$ یک به یک و وارون پذیر است پس جواب می شود یک تابع.

📖 سؤال ۵۷: تابع $g(x)=1+\sqrt{x-2}$ مفروض است. در تابع $g^{-1}(x)$ برد و دامنه چند عضو صحیح غیرمشترک دارند؟(کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

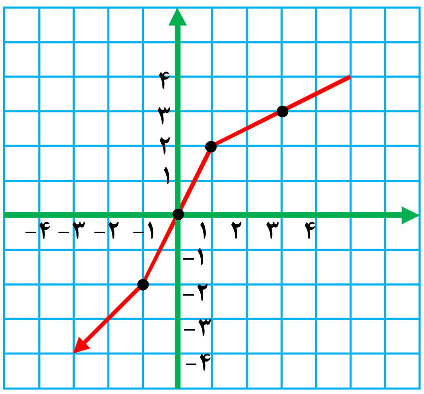
☜ پاسخ: گزینه۲

باید دامنه و برد g^{-1} را پیدا کنیم و چون $D_{g^{-1}}=R_f$ و $R_{g^{-1}}=D_f$ پس باید دامنه و برد $g(x)=1+\sqrt{x-2}$ را پیدا کنیم:

$$g(x)=1+\sqrt{x-2}\Rightarrow\begin{cases}\text{دامنه}: x\geq 2\Rightarrow D_f:[2,+\infty)\\ \text{برد}: \sqrt{x-2}\geq 0\Rightarrow\sqrt{x-2}+1\geq 1\\ \text{برد}: y\geq 1\Rightarrow R_f=[1,+\infty)\end{cases}$$

پس $D_{f^{-1}}=[1,+\infty)$ و $R_{f^{-1}}=[2,+\infty)$ و در دامنه و برد f^{-1} فقط یک عضو صحیح غیرمشترک هست.

📖 سؤال ۵۸: اگر f به شکل مقابل باشد نمودار تابع f^{-1} کدامیک از نقاط زیر عبور نمی کند؟(کتاب درسی)



۱) $(2,1)$

۲) $(3,3)$

۳) $(2,2/5)$

۴) $(-2,-1)$

☜ پاسخ: گزینه۳

کافی است طول و عرض گزینه ها را جابه جا کنیم و ببینیم آیا نقطهٔ به دست آمده روی نمودار تابع هست یا نه:

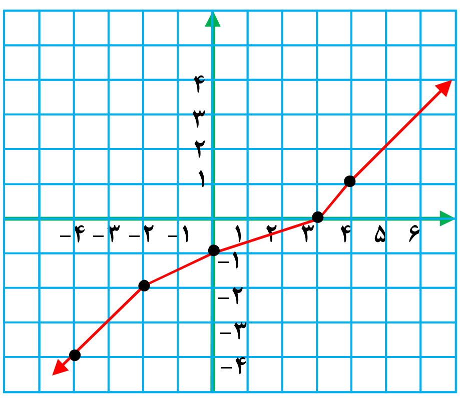
۱) $(2,1)\Rightarrow(1,2)$ ✓

۲) $(3,3)\Rightarrow(3,3)$ ✓

۳) $(2,2/5)\Rightarrow(2/5,2)$ ✗

پس جواب می شود (۳).

📖 سؤال ۵۹: نمودار تابع f مفروض است حاصل $\dfrac{f^{-1}(1)+f^{-1}(-1)}{f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)}$ کدام است؟ (کتاب درسی)



۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{2}{9}$

۳) $\frac{8}{9}$ ۴) $\frac{5}{9}$

پاسخ: گزینه۳

حاصل هر کدام از عامل های عبارت $\frac{f^{-1}(1)+f^{-1}(-1)}{f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)}$ را با استفاده از نمودار f پیدا می کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} f^{-1}(1)=a \Rightarrow f(a)=1 \Rightarrow a=4 \\ f^{-1}(-1)=b \Rightarrow f(b)=-1 \Rightarrow b=0 \\ f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)=c \Rightarrow f(c)=\frac{3}{2} \Rightarrow c=\frac{9}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f^{-1}(1)+f^{-1}(-1)}{f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)}=\frac{4+0}{\frac{9}{2}}=\frac{8}{9}$$

سؤال ۶۰: اگر $f=\left\{(0,-1),\left(2,\frac{1}{2}\right),(-3,\sqrt{2}),(1,5)\right\}$ و $g=\left\{(-1,-3),(5,2),\left(\frac{1}{2},0\right),(4,6)\right\}$ تابع $g^{-1}of^{-1}$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $\left\{\left(-1,\frac{1}{2}\right),(5,2),(\sqrt{2},-3)\right\}$

۲) $\left\{\left(\frac{1}{2},5\right),(5,2),\left(-1,\frac{1}{2}\right)\right\}$

۳) $\left\{(\sqrt{2},-1),\left(\frac{1}{2},5\right),(-1,-3)\right\}$

۴) $\left\{\left(-1,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},5\right),(\sqrt{2},-1)\right\}$

پاسخ: گزینه۴

داشتیم $g^{-1}of^{-1}=(\mathrm{fog})^{-1}$ پس بهتر است اول fog و بعد وارونش را پیدا کنیم:

$$f=\left\{(0,-1),\left(2,\frac{1}{2}\right),(-3,\sqrt{2}),(1,5)\right\}$$

$$\mathrm{g}=\left\{(-1,-3),(5,2),\left(\frac{1}{2},0\right),(4,6)\right\}$$

$$\mathrm{fog}=\left\{(-1,\sqrt{2}),\left(5,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},-1\right)\right\} \Rightarrow \left\{(\sqrt{2},-1),\left(\frac{1}{2},5\right),\left(-1,\frac{1}{2}\right)\right\}$$

پس جواب می شود (۴).

سؤال ۶۱: اگر $f(x)=\frac{1}{8}x-3$, $g(x)=x^3$ حاصل $(fog)^{-1}(5)+(\mathrm{f}^{-1}\mathrm{og}^{-1})(1)$ کدام است؟

۱) ۳۳ ۲) ۳۶ ۳) ۶۵ ۴) ۶۸ (کتاب درسی)

پاسخ: گزینه۲

می دانیم $(f^{-1}og^{-1})(1)=(gof)^{-1}(1)$ و چون قرار است هم $(gof)^{-1}(1)$ و هم $(fog)^{-1}(5)$ را پیدا کنیم پس ضابطه های fog و gof را پیدا می کنیم:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳ \\ g(x)=x^{۳} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} (fog)(x)=\frac{۱}{۸}x^{۳}-۳ \\ (gof)(x)=\left(\frac{۱}{۸}x-۳\right)^{۳} \end{array}$$

حالا می رویم سراغ $(fog)^{-۱}(۵),(gof)^{-۱}(۱)$:

$$(gof)^{-۱}(۱)=a \Rightarrow (gof)(a)=۱ \Rightarrow \left(\frac{۱}{۸}a-۳\right)^{۳}=۱ \Rightarrow \frac{۱}{۸}a-۳=۱ \Rightarrow \frac{۱}{۸}a=۴$$

$$\Rightarrow a=۳۲ \Rightarrow (gof)^{-۱}(۱)=۳۲$$

$$(fog)^{-۱}(۵)=b \Rightarrow (fog)(b)=۵ \Rightarrow ۵=\frac{۱}{۸}b^{۳}-۳$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۸}b^{۳}=۸ \Rightarrow b^{۳}=۶۴ \Rightarrow b=۴ \Rightarrow (fog)^{-۱}(۵)=۴$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر است با: $(gof)^{-۱}(۱)+(fog)^{-۱}(۵)=۳۲+۴=۳۶$

📖 **سؤال ۶۲: اگر $g(x)=۲x-۵, f(x)=x+۴$ ضابطهٔ تابع $f^{-۱}og^{-۱}$ کدام است؟** (کتاب درسی)

۱) $y=\frac{x-۲}{۳}$ ۲) $y=\frac{x-۳}{۲}$ ۳) $y=\frac{x+۱}{۲}$ ۴) $y=x+۲$

☜ **پاسخ: گزینه۲**

می دانیم $f^{-۱}og^{-۱}=(gof)^{-۱}$ پس ضابطهٔ gof و سپس وارون آن را پیدا می کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x+۴ \\ g(x)=۲x-۵ \end{array}\right\} \Rightarrow (gof)(x)=۲(x+۴)-۵ \Rightarrow (gof)(x)=۲x+۳$$

وارون $gof \Rightarrow ۲x+۳ \Rightarrow x=\frac{y-۳}{۲} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\frac{x-۳}{۲}$

پس ضابطهٔ $(gof)^{-۱}$ برابر است با: $y=\frac{x-۳}{۲}$

📖 **سؤال ۶۳: نمودار تابع $f(x)=-x^{۳}+ax+b$ در نقطهٔ $\left(-۱,\frac{۱}{۳}\right)$ نمودار تابع وارونش را قطع می کند $a+b$ کدام است؟**

۱) $-\frac{۱}{۹}$ ۲) $-\frac{۱۰}{۹}$ ۳) $-\frac{۲}{۳}$ ۴) $-\frac{۱۳}{۹}$ (کتاب درسی)

☜ **پاسخ: گزینه۲**

می دانیم نقطهٔ برخورد منحنی تابع و منحنی تابع وارون هم روی خط تابع قرار دارند و هم روی تابع وارون. پس اگر نقطهٔ (a,b) نقطهٔ برخورد منحنی تابع و تابع وارون باشد نقطهٔ (b,a) هم نقطهٔ برخورد منحنی تابع و منحنی تابع وارون آن است پس هم نقطهٔ $\left(-۱,\frac{۱}{۳}\right)$ باید در ضابطهٔ $f(x)=-x^{۳}+ax+b$ صدق کند و هم نقطهٔ $\left(\frac{۱}{۳},-۱\right)$:

$$\left(-1,\frac{1}{3}\right)\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{3}=1-a+b\\ -1=\frac{-1}{27}+\frac{1}{3}a+b\end{cases}\quad \left(\frac{1}{3},-1\right)\Rightarrow \quad\Rightarrow \frac{4}{3}=\frac{28}{27}-\frac{4}{3}a\Rightarrow \frac{4}{3}a=-\frac{8}{27}\Rightarrow a=-\frac{2}{9},-a+b=\frac{-2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{9}+b=\frac{-2}{3}\Rightarrow b=\frac{-2}{3}-\frac{2}{9}=\frac{-6-2}{9}\Rightarrow b=\frac{-8}{9}$$

پس مقدار $a+b$ برابر است با: $\left(-\frac{2}{9}\right)+\left(\frac{-8}{9}\right)=\frac{-10}{9}$

📖 **سؤال ۶۴:** اگر $f(x)=\sqrt{1-x}$ آنگاه دامنهٔ تعریف تابع $y=\sqrt{1-f^{-1}of(x)}$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $[0,1]$ ۲) $[-1,1]$ ۳) $(-\infty,-1]$ ۴) $(-\infty,1]$

☜ **پاسخ: گزینه۲**

می دانیم: $(f^{-1}of)(x)=x$

پس دامنهٔ تابع $y=\sqrt{1+(f^{-1}of)(x)}$ برابر است با دامنهٔ تابع $y=\sqrt{1+x}$ به شرط آن که $f^{-1}of$ تعریف شده باشد

یعنی $x\in D_{f^{-1}of}$ و چون $D_{f^{-1}of}=D_f$ پس دامنهٔ تابع $y=\sqrt{1+(f^{-1}of)(x)}$ ب رابر می شود با:

دامنه$=\{1+x\ge 0 \mid x\in D_f\}$

از طرف دیگر دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{1-x}$ برابر است با $x\le 1$ پس:

دامنه $=\{x\ge -1 \mid x\le 1\}=[-1,1]$

📖 **سؤال ۶۵:** اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ و g وارون تابع f باشد و داشته باشیم: $f(a)=g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ، مقدار a کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) ۲

☜ **پاسخ: گزینه۱**

داریم $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ پس اگر تابع g وارون تابع f باشد و $g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=m$ باشد باید داشته باشیم $f(m)=\frac{1}{\sqrt{3}}$

بنابراین:

$$f(m)=\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow \sqrt{3}m=\sqrt{m^2+1}\xrightarrow{\text{توان ۲}}3m^2=m^2+1$$

$$\Rightarrow 2m^2=1\Rightarrow m^2=\frac{1}{2}\xrightarrow{m>0}m=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

حالا با توجه به تساوی $f(a)=g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ می نویسیم:

$$f(a)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\sqrt{2}a=\sqrt{a^2+1}\xrightarrow{\text{توان ۲}}2a^2=a^2+1$$

$$\Rightarrow a^2=1\xrightarrow{a>0}a=1$$

📖 **سؤال ۶۶:** اگر $f(x)=\sqrt{18-x}+\sqrt[3]{18+x}$ مقدار $f(9)+f^{-1}(6)$ چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۵

☜ **پاسخ: گزینه۴**

توجه کنید که: $f(9)=\sqrt{18-9}+\sqrt[3]{18+9}=3+3=6$

پس $f^{-1}(6)=9$ در نتیجه: $f(9)+f^{-1}(6)=6+9=15$

📖 **سؤال ۶۷:** اگر $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+5}+2}$ مقدار $f^{-1}(1)$ کدام است؟

۱) $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ ۲) $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ ۳) $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ ۴) $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

☜ **پاسخ: گزینه۲**

فرض کنید $f^{-1}(1)=a$ در این صورت:

$$f(a)=1\Rightarrow\sqrt{a+\sqrt{a+5}+2}=1\Rightarrow a+\sqrt{a+5}+2=1\Rightarrow\sqrt{a+5}=-a-1\quad(*)$$

$$\Rightarrow a+5=a^2+2a+1\Rightarrow a^2+a-4=0\Rightarrow a=\frac{-1-\sqrt{17}}{2},a=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\ \text{غ ق ق}$$

از تساوی (*) واضح است که: $-a-1\geq 0\Rightarrow a\leq -1$

بنابراین $a=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ قابل قبول نیست.

📖 **سؤال ۶۸:** اگر $f^{-1}(\sqrt{x}+1)=x^3+1$ مقدار $f(65)$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

☜ **پاسخ: گزینه۳**

اگر در تساوی $f^{-1}(\sqrt{x}+1)=x^3+1$ قرار دهیم $x=4$ به دست می آید:

$$f^{-1}(\sqrt{4}+1)=4^3+1\Rightarrow f^{-1}(3)=65\Rightarrow f(65)=3$$

📖 **سؤال ۶۹:** ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=3-\sqrt{2-x}$ به صورت $f^{-1}(x)=-x^2+ax+b$ است مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۲-

پاسخ: گزینه۳

از تساوی $f(x)=۳-\sqrt{۲-x}$ مقدار x را برحسب y به دست می آوریم:

$$\sqrt{۲-x}=۳-y \Rightarrow ۲-x=(۳-y)^۲ \Rightarrow x=۲-(۳-y)^۲ \Rightarrow x=-۷-y^۲+۶y$$

بنابراین: $f^{-۱}(x)=-x^۲+۶x-۷$

پس $b=-۷, a=۶$ در نتیجه: $a+b=-۱$

سؤال ۷۰: ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=\sqrt[۳]{۲x-۱}$ به صورت $f^{-۱}(x)=\dfrac{x^۳+a}{b}$ است مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: گزینه۲

از تساوی $y=\sqrt[۳]{۲x-۱}$ مقدار x را برحسب y به دست می آوریم:

$$y^۳=۲x-۱ \Rightarrow ۲x=y^۳+۱ \Rightarrow x=\frac{y^۳+۱}{۲}$$

بنابراین: $f^{-۱}(x)=\dfrac{x^۳+۱}{۲}$

و در نتیجه $b=۲, a=۱$ و $a+b=۳$

سؤال ۷۱: ضابطهٔ تابع وارون تابع $y=\left(\dfrac{۱}{۲}\right)^{x-۱}+۳$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=\log_۲\left(\dfrac{۲}{x-۳}\right)$ ۲) $f^{-۱}(x)=\log_۲\left(\dfrac{۱}{x-۳}\right)$

۳) $f^{-۱}(x)=\log_۲\left(\dfrac{۱}{x+۳}\right)$ ۴) $f^{-۱}(x)=\log_۲\left(\dfrac{۲}{x+۳}\right)$

پاسخ: گزینه۱

ضابطهٔ تابع f را به صورت $y=\left(\dfrac{۱}{۲}\right)^{x-۱}+۳$ می نویسیم و x را برحسب y پیدا می کنیم:

$$y-۳=\frac{۱}{۲^{x-۱}} \Rightarrow ۲^{x-۱}=\frac{۱}{y-۳}$$

$$x-۱=\log_۲\left(\frac{۱}{y-۳}\right) \Rightarrow x=۱+\log_۲\left(\frac{۱}{y-۳}\right) \Rightarrow x=\log_۲ ۲+\log_۲\left(\frac{۱}{y-۳}\right)=\log_۲\left(\frac{۲}{y-۳}\right)$$

بنابراین: $f^{-۱}(x)=\log_۲\left(\dfrac{۲}{x-۳}\right)$

سؤال ۷۲: اگر $f(x)=\dfrac{۱۰x-۳}{۵+۱۰^x}$ ضابطهٔ تابع $f^{-۱}$ کدام است؟

۱) $\log\left(\dfrac{۵x+۱}{۱-x}\right)$ ۲) $\log\left(\dfrac{x-۵}{x-۳}\right)$ ۳) $\log\left(\dfrac{x+۳}{x+۵}\right)$ ۴) $\log\left(\dfrac{۵x+۳}{۱-x}\right)$

پاسخ: گزینه۴

اگر $y=\dfrac{10^x-3}{5+10^x}$ آنگاه:

$$y(5+10^x)=10^x-3 \Rightarrow 5y+10^x y=10^x-3$$

$$10^x(y-1)=-3-5y \Rightarrow 10^x=\frac{5y+3}{1-y} \Rightarrow x=\log\left(\frac{5x+3}{1-x}\right)$$

بنابراین: $f^{-1}(x)=\log\left(\dfrac{5x+3}{1-x}\right)$

سؤال ۷۳: f , g تابع هایی یک به یک هستند، $f(3)=12,(fog^{-1})(6)=12$ مقدار $g(3)$ چقدر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) -6

پاسخ: گزینه۳

توجه کنید که طبق فرض مسئله: $(fog^{-1})(6)=f(3)$

یعنی: $f(g^{-1}(6))=f(3)\xrightarrow{\text{یک به یک است } f} g^{-1}(6)=3 \Rightarrow g(3)=6$

سؤال ۷۴: اگر $f(x)=\log_2(x+1)$ حاصل $f^{-1}(\log_2 x)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{x}{1+x}$ ۲) $x-1$ ۳) $\dfrac{1}{x}$ ۴) x

پاسخ: گزینه۲

ابتدا ضابطه f^{-1} را پیدا میکنیم اگر $y=\log_2(x+1)$ آنگاه: $2^y=x+1 \Rightarrow x=2^y-1$

در نتیجه $f^{-1}(x)=2^x-1$. اکنون توجه کنید که: $f^{-1}(\log_2 x)=2^{\log_2 x}-1=x-1$

سؤال ۷۵: اگر $(f^{-1}og)(2x+3)=5x-2$ و $g^{-1}(4)=7$ مقدار $f(8)$ چقدر است ؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

پاسخ: گزینه۴

ابتدا توجه کنید: $(f^{-1}og)(2x+3)=5x-2 \Rightarrow f^{-1}(g(2x+3))=5x-2$

چون $g^{-1}(4)=7$ پس $g(7)=4$ اگر در تساوی (۱) قرار دهیم $x=2$ به دست می آید:

$$f^{-1}(g(7))=8 \Rightarrow f^{-1}(4)=8 \Rightarrow f(8)=4$$

سؤال ۷۶: اگر $f(6)=g(2),(f^{-1}og)(x)=(m-2)x+4$ مقدار m چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه۳

ابتدا توجه کنید که: $f(6)=g(2) \Rightarrow f^{-1}(g(2))=6$

اکنون اگر در تساوی $(f^{-1}og)(x)=(m-2)x+4$ قرار دهیم $x=2$ به دست می آید:

$$f^{-1}(g(2))=(m-2)\times 2+4 \Rightarrow 6=2m-4+4 \Rightarrow m=3$$

تست های تابع معکوس

📖 سؤال۱: اگر $(fog)^{-1}(x)=f(x)$ حاصل معکوس $(gof)(x)$ کدام است. (ویژهٔ تیزهوشان)

۱) $f(x)$ ۲) $f^{-1}(x)$ ۳) $g(x)$ ۴) $g^{-1}(x)$

📖 سؤال۲: اگر $f(x)=g^{-1}\left(2-\frac{3}{x}\right), g(x+1)=1+\frac{2}{x}$ باشد مقدار $f^{-1}\left(\frac{5}{3}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

📖 سؤال۳: اگر $f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x}}$ ضابطه معکوس $f(2x)$ کدام است.

۱) $x\geq 0;\frac{(\sqrt{x^2-1}+1)^2}{2}$ ۲) $x\geq 0;\frac{(\sqrt{x^2+1}-1)^2}{2}$

۳) $x\geq 0;\frac{(\sqrt{x^2+1}+1)^2}{2}$ ۴) $x\geq 0;\frac{-(1-\sqrt{x^2-1})^2}{2}$

📖 سؤال۴: اگر $f(x)=1+2g^{-1}(3x)$ باشد آنگاه $g(x)$ کدام است.

۱) $3f^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)$ ۲) $\frac{1}{3}f^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)$

۳) $3f^{-1}(2x+1)$ ۴) $\frac{1}{3}f^{-1}(2x+1)$

📖 سؤال۵: اگر $g(x)=f\left(a+\frac{b}{x}\right), g^{-1}(x)=\frac{1}{2-f^{-1}(x)}$ مقدار $a-b$ کدام است.

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۱- ۴) ۳-

📖 سؤال۶: اگر داشته باشیم $f^{-1}(x)=8x^3+4x$ و $g(x)=2f\left(\frac{x}{3}\right)$ و $g^{-1}(x)=ax^3+bx$ آنگاه $a+b$ کدام است. (سه سطحی قلم چی)

۱) ۱ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۸

📖 سؤال۷: اگر $f^{-1}(1)=3, g(x)=-f(2x-1)$ باشد حاصل $g^{-1}(-1)$ کدام است. (سه سطحی قلم چی)

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) ۲- ۴) ۲

سؤال۸: اگر $f^{-1}(x)=1-\sqrt{x}$, $g(x)=f\left(\frac{x}{x+2}\right)$ باشد ضابطه وارون تابع g کدام است. $(x>0)$

۱) $\frac{2(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ ۲) $\frac{2(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

۳) $\frac{2(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}}$ ۴) $\frac{2(1-\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}}$ (سه سطحی قلم چی)

سؤال۹: اگر $g(x)=\frac{2f(3x)+1}{f(3x)-1}$, $f^{-1}(x)=x+\sqrt{x}$ باشد حاصل $g^{-1}(3)$ کدام است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

سؤال۱۰: با کدام فرض زیر تابع $y=x+a\left[\frac{bx}{3}\right]$ معکوس پذیر است.

۱) $a=b=-1$ ۲) $|a|=|b|=1$ ۳) $a=-b=1$ ۴) $a=-b=-1$

سؤال۱۱: f تابعی یک به یک است و اگر $2+g(2-x)=f(x^3+2)$ و اگر $g^{-1}(2a+2)=1, f^{-1}(6)=3$ مقدار a کدام است.

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۱- ۴) ۲-

سؤال۱۲: اگر $f(x)=2x+3\sqrt{x-1}$ مقدار $f^{-1}(2f^{-1}(2))$ کدام است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

سؤال۱۳: اگر g,f توابع اکیداً صعودی ، $fog(x)=x^3+x+1$, $g^{-1}(2)=1$ کدام نتیجه گیری صحیح است.

۱) $f^{-1}(3)=2$ ۲) $f^{-1}(2)=3$

۳) $f(3)=1$ ۴) $f(1)=3$

سؤال۱۴: چند مقدار طبیعی برای a وجود دارد بطوری که تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x^2+a & x\geq 0 \\ x+6 & x<0 \end{cases}$ معکوس پذیر نباشد. (سه سطحی)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) هیچ ۴) بی شمار

سؤال ۱۵: معکوس تابع $f(x)=4x-x^2+3$ در بازه ای که صعودی اکید است کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\sqrt{7-x}-2$ ۲) $f^{-1}(x)=2+\sqrt{7-x}$

۳) $f^{-1}(x)=2-\sqrt{7-x}$ ۴) $f^{-1}(x)=-2-\sqrt{7-x}$

سؤال ۱۶: تابع $f=\{(1,a),(b,2),(a+1,a-1),(1,3)\}$ یک به یک است مقدار b کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

سؤال ۱۷: اگر $f(x)=4x-2x^2+3$ برای $x\geq a$ تابعی یک به یک باشد حداقل a کدام می باشد؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

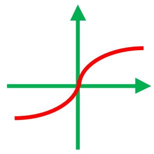
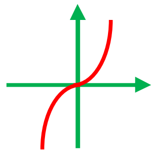
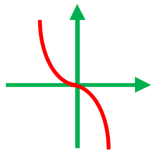
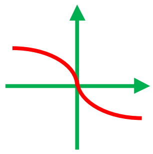
سؤال ۱۸: اگر $f(x)=x^n|2x|$ تابعی یک به یک باشد n کدام گزینه می تواند باشد؟

۱) $n=0$ ۲) $n=2$ ۳) $n=-1$ ۴) $n=3$

سؤال ۱۹: هرگاه $f(x)+f(4)=x+2\sqrt{x}$ حاصل $f^{-1}(-1)-f^{-1}(4)$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۴- ۳) ۳ ۴) ۵-

سؤال ۲۰: اگر $f(x)=x|3x|$ نمودار f^{-1} شبیه کدام گزینه است؟

۱)

۲)

۳)

۴)


سؤال ۲۱: اگر $f(x)=x|4x|$ ریشهٔ $f^{-1}(2x)=f(3)$ کدام است؟

۱) ۱۲۹۶ ۲) ۲۵۹۲ ۳) ۶۴۸ ۴) ۵۱۸۴

سؤال ۲۲: اگر $f(x)=x+\sqrt{x^2+2x}$ تابع f^{-1} کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\dfrac{x^2}{2x+2}, x\in[-2,-1)\cup[0,+\infty)$

۲) $f^{-1}(x)=\dfrac{x^2}{2x+2}, x\neq -1$

۳) $f^{-1}(x)=\dfrac{x^2}{2x-2}, x\in[-2,-1)\cup[0,+\infty)$

۴) $f^{-1}(x)=\dfrac{x^2}{2x-2}, x\neq 1$

سؤال ۲۳: با فرض ضابطهٔ $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$ $f^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{x^2-1}{2x}$ ۲) $\dfrac{1-x^2}{2x}$ ۳) $\dfrac{1+x^2}{-2x}$ ۴) $\dfrac{1+x^2}{2x}$

سؤال ۲۴: اگر $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ مقدار $f^{-1}(-x)+f^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) $2x$ ۲) صفر ۳) $\dfrac{2}{x}$ ۴) x

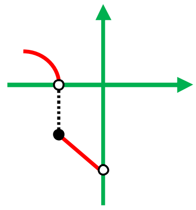
سؤال ۲۵: نمودار تابع $f(x)=x^3+2x-2$ نمودار f^{-1} را در چند نقطه قطع می کند؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

سؤال ۲۶: f تابعی معکوس پذیر است اگر n تعداد ریشه های معادلهٔ $f(x)=x$ و m تعداد ریشه های معادلهٔ $f(x)=f^{-1}(x)$ باشد آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) $n=m$ ۲) $n\leq m$ ۳) $m\leq n$ ۴) $n\neq m$

سؤال ۲۷: اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد نمودار f^{-1} از کدام نواحی می گذرد؟



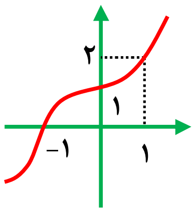
۱)دوم و سوم

۲) اول و چهارم

۳) سوم و چهارم

۴) دوم و سوم

سؤال ۲۸: اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد حاصل $f^{-1}(0)+f^{-1}(1)$ کدام است؟



۱) ۱-

۲) صفر

۳) ۱

۴) ۲

سؤال ۲۹: اگر نمودارهای دو خط $y=m_1x+1$ ، $y=m_2x+2$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه باشند به ازای کدام مقادیر m_1 تساوی $m_1+m_2=3$ برقرار است؟

۱) $\frac{3\pm\sqrt{5}}{4}$ ۲) $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ ۳) $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ ۴) $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{4}$

سؤال ۳۰: تابع معکوس تابع $f(x)=\frac{x+2}{2x-1}$ کدام است؟

۱) $\frac{x+2}{2x-1}$ ۲) $\frac{2x-1}{x+2}$ ۳) $\frac{x-2}{2x+1}$ ۴) $\frac{2x+1}{x-2}$

سؤال ۳۱: تابع با ضابطهٔ $y=\frac{2x+1}{x-1}$ معکوس خود را در چند نقطه قطع می کند؟

۱) صفر ۲) بی شمار ۳) ۱ ۴) ۲

سؤال ۳۲: وارون تابع $f(x)=\frac{ax}{x+2}$ خودش است $f(2)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) ۱-

سؤال ۳۳: اگر $f(x)=\frac{|x|}{x}\sqrt{1-x^2}$ $(x\neq 0,\pm1)$ ضابطه $f^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) $-f(x)$ ۲) $-f(-x)$ ۳) $f\left(\frac{1}{x}\right)$ ۴) $-f\left(\frac{1}{x}\right)$

سؤال ۳۴: بزرگترین فاصله ای که تابع $f(x)=|x-1|-|x+3|$ آن بازه معکوس پذیر است کدام است. (کانون ۹۴)

۱) $[-4,4]$ ۲) $[-3,1]$ ۳) $[-1,1]$ ۴) ϕ

📖 سؤال۳۵: اگر $f(x)=x-\frac{1}{x}, x>0$ نمودار f^{-1} محور y ها را با کدام عرض قطع می کند. (کانون۸۸)

۱) ۱- ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

📖 سؤال۳۶: تابع معکوس $y=x|x|$ کدام است؟ (کانون ۹۴)

۱) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ \sqrt{-x} & x<0\end{cases}$ ۲) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ -\sqrt{-x} & x<0\end{cases}$

۳) $f^{-1}(x)=-\sqrt{|x|}$ ۴) تابع f معکوس ناپذیر است.

📖 سؤال۳۷: اگر $f^{-1}(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ معکوس $f\left(\frac{1}{x}\right)$ کدام است. (ویژهٔ تیزهوشان)

۱) $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ ۲) $f^{-1}(x)$ ۳) $\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$ ۴) $\frac{|x|}{x\sqrt{1+x^2}}$

📖 سؤال۳۸: اگر g وارون تابع $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ باشد مقدار x از تساوی $f(x)=g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ کدام است.

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۴) ۲

📖 سؤال۳۹: اگر در ماشین

$$\text{ورودی}\longrightarrow\boxed{f}\longrightarrow\boxed{g}\longrightarrow\text{خروجی}$$

با فرض اینکه $f(x)=x-\sqrt{x+2}, g^{-1}(x)=\frac{1-x}{x}$ خروجی برابر ۱ باشد ورودی کدام است.

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۱

📖 سؤال۴۰: تابع $f(x)=(a-3)x^4+x^3+(a-1)x^2+2x$ یک به یک است تابع f و f^{-1} چند نقطه مشترک دارند. (سه سطحی قلم چی)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

📖 سؤال۴۱: اگر $f(x)=\frac{x^2+5x+6}{x+2}, f^{-1}(x)=\frac{x^2+ax+b}{x+c}$ آنگاه $a+b+c$ کدام است.

۱) ۱- ۲) ۲- ۳) ۳- ۴) ۴-

📖 سؤال۴۲: $f(x)=\frac{2x+a}{x+3}$ یک تابع یک به یک است حدود a کدام است؟

۱) $a=6$ ۲) $a\neq 6$ ۳) $a\in R$ ۴) $|a|\neq 6$

📖 سؤال۴۳: اگر $f(x)=x+\sqrt{x^2+3}$ مقدار $f(1+2f^{-1}(3))$ کدام گزینه می باشد؟

۱) $2+3\sqrt{2}$ ۲) $3+2\sqrt{3}$ ۳) $2+\sqrt{2}$ ۴) $3+\sqrt{3}$

📖 سؤال۴۴: اگر $f(x)=x^3+x-8$ فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی f, f^{-1} تا مبدأ مختصات چه عددی است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $4\sqrt{2}$

📖 سؤال ۴۵: اگر $f(x)=۳|x|-|x-۲|+x$ در بازه ای که f نزولی اکید می باشد ضابطهٔ معکوس آن کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=x-۲, x\in R$ ۲) $f^{-۱}(x)=-x-۲, x\in R$

۳) $f^{-۱}(x)=x-۲, x\le -۲$ ۴) $f^{-۱}(x)=-x-۲, x\ge -۲$

📖 سؤال ۴۶: اگر $x\in(-۱,۱), f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ کدام تابع یک به یک است؟ $(x\neq ۰)$

۱) $y=|x|f(x)$ ۲) $y=|x|+f(x)$

۳) $y=\frac{|x|}{x}f(x)$ ۴) $y=|x|-f(x)$

📖 سؤال ۴۷: اگر f تابعی یک به یک باشد و $f([x])=f(|x|)$ مقدار x کدام است؟

۱) $x\in Z$ ۲) $x\in W$ ۳) $x\in R$ ۴) $x\in[۰,۱)$

📖 سؤال ۴۸: تابع $f(x)=(۲a-۱)x^۲+bx+۴a$ با دامنهٔ R معکوس پذیر است. اگر $f^{-۱}(۵)=۳$ مقدار $f(۴)$ چه عددی است؟

۱) ۲-   ۲) ۶   ۳) ۴   ۴) ۳

📖 سؤال ۴۹: به ازای چند مقدار صحیح a تابع $y=۳x-|ax+۲|$ معکوس پذیر است؟

۱) ۵   ۲) ۶   ۳) ۷   ۴) ۸

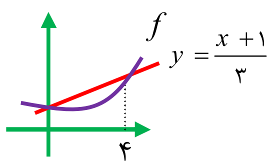
📖 سؤال ۵۰: هرگاه $f(x)=x|۴x|$ مقدار $f^{-۱}(۲f^{-۱}(-۱۶))$ کدام است؟

۱) ۳۲   ۲) ۳۲-   ۳) ۱-   ۴) ۲-

📖 سؤال ۵۱: اگر $f(۴x)=۲-۳g\left(\frac{۳}{x}\right), g^{-۱}(۲)=-۲$ باشد مقدار $f^{-۱}(-۴)$ چقدر است؟

۱) ۱   ۲) ۳   ۳) ۶-   ۴) ۲-

📖 سؤال ۵۲: نمودار تابع f شکل زیر است. دامنهٔ تعریف $y=\sqrt{f^{-۱}(x)-۳x+۱}$ کدام است؟



۱) $\left[\frac{۱}{۳},\frac{۵}{۳}\right]$ ۲) $\left[۰,\frac{۱}{۴}\right]$

۳) $[۰,۴]$ ۴) $\left[-\frac{۱}{۳},\frac{۵}{۳}\right]$

📖 سؤال ۵۳: اگر $x\in(۰,۲], f(x)=x+\frac{۴}{x}$ ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=\frac{x-\sqrt{x^۲-۱۶}}{۲}, x\ge ۴$ ۲) $f^{-۱}(x)=\frac{x+\sqrt{x^۲-۱۶}}{۲}, x\ge ۴$

۳) $f^{-۱}(x)=\frac{x-\sqrt{x^۲-۱۶}}{۲}, |x|\le ۴$ ۴) $f^{-۱}(x)$ $f^{-۱}(x)=\frac{x+\sqrt{x^۲-۱۶}}{۲}, |x|\le ۴$

📖 سؤال ۵۴: اگر $f(x)=x+\sqrt{x-a}$, $f^{-1}(x)=x+b+c\sqrt{x-\frac{3}{4}}$ باشد مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

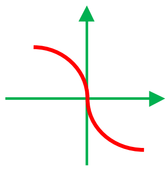
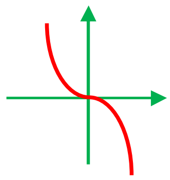
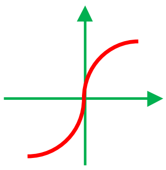
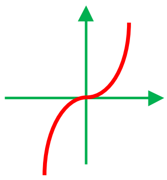
📖 سؤال ۵۵: اگر $f(x)=\frac{2x+a}{x+3-a}$ مقدار a کدام باشد تا معکوس تابع بر خود تابع منطبق باشد؟

۱) $a=-5$ ۲) $a=5$ ۳) $a=1$ ۴) $a=-1$

📖 سؤال ۵۶: تابع $f(x)=x^2+ax+b$ $(x\leq 2)$ معکوس خود را در نقطهٔ $A(1,2)$ قطع می کند. مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱ ۳) ۹- ۴) ۱-

📖 سؤال ۵۷: اگر $f(x)=x|x|$ آنگاه نمودار تابع $y=f^{-1}(x)$ کدام است؟ (تجربی ۹۵)

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

📖 سؤال ۵۸: اگر تابع معکوس تابع $f(x)=3x+|x|$ به صورت $f^{-1}(x)=ax+b|x|$ باشد $2a-b$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{4}$ ۲) $\frac{7}{8}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{5}{8}$

📖 سؤال ۵۹: اگر $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$ آنگاه جواب معادله $fof(x)+f^{-1}(x)=-2$ کدام می تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

📖 سؤال ۶۰: هرگاه $f(x)=3x+\lfloor 2x\rfloor$ مقدار $f^{-1}(7)$ کدام است؟ (گزینه۲)

۱) $-\frac{5}{3}$ ۲) $-\frac{7}{6}$ ۳) $-\frac{5}{6}$ ۴) $-\frac{4}{3}$

📖 سؤال ۶۱: نمودار تابع $f(x)=x^3+2x-2$ نمودار f^{-1} را در چند نقطه قطع می کند.

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

📖 سؤال ۶۲: اگر $f(x)=\frac{3-x^4}{3+x^4}$, $g(x)=\sqrt[4]{1+2x}$ آنگاه برد تابع $(\text{fog})^{-1}$ کدام است.

۱) $[-2,+\infty)$ ۲) $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$ ۳) $R-\{2\}$ ۴) $R-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

سؤال۶۳: فرض کنید $f(x)=\dfrac{x+a}{\sqrt{3x+1}}$ به ازای کدام مقدار a رابطه $f^{-1}(x)=(fof)(x)$ برقرار است.

(ویژه تیزهوشان)

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $-2\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $-\sqrt{3}$

سؤال۶۴: نمودار $f(x)=\dfrac{x-3}{2}+2\sqrt{x}$ و وارون آن در نقاط A , B متقاطع اند. طول پاره خط AB کدام است.

۱) $4\sqrt{2}$ ۲) $5\sqrt{2}$ ۳) $6\sqrt{2}$ ۴) $8\sqrt{2}$

سؤال۶۵: اگر $f(x)=[x]+\sqrt{x-[x]}$ نقطه تلاقی f و معکوس آن کدام است؟ [ویژه تیزهوشان]

۱) $x\in N$ ۲) $x=0$ ۳) $x\in Z$ ۴) ϕ

سؤال۶۶: اگر $fog(x)=\dfrac{x}{x+1}$ و $g(x)=x-1$ ضابطه f^{-1} کدام است؟

۱) $\dfrac{1-2x}{x-1}$ ۲) $\dfrac{2x-1}{x+1}$ ۳) $\dfrac{1+2x}{x-1}$ ۴) $\dfrac{1-2x}{-x-1}$

سؤال۶۷: اگر $f(x)=\sqrt{x-1}-\sqrt{4-x}$ باشد برد تابع $g(x)=fof^{-1}(x)$ شامل چند صحیح است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) بی شمار

سؤال۶۸: ضابطه معکوس تابع $f(x)=\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2+1}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2+1}}$ کدام است. (سه سطحی قلم چی)

۱) $f^{-1}(x)=\dfrac{x^3-3x}{2}$ ۲) $f^{-1}(x)=\dfrac{x^3+3x}{2}$

۳) $f^{-1}(x)=x^3-3x$ ۴) $f^{-1}(x)=x^3+3x$

سؤال۶۹: اگر $f(x)=\sqrt{\log_{\frac{3}{5}}^{x-1}}$ آنگاه دامنه تابع $g(x)=\dfrac{fof^{-1}}{f^{-1}of}$ شامل چند عدد صحیح است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی شمار (سه سطحی قلم چی)

سؤال۷۰: اگر برای هر تابع معکوس پذیر f با دامنه R به ازای هر $x\in R$ داشته باشیم $x<f(x)$ کدام گزینه همواره صحیح است؟ (سه سطحی قلم چی)

۱) نمودار $y=f(x)$ و $y=f^{-1}(x)$ متقاطع اند.

۲) به ازای $x>1$ نمودار $y=f^2(x)$ بالاتر از $y=f^{-1}(x)$ قرار می گیرد.

۳) به ازای $x<0$ نمودار $y=f^2(x)$ پایین تر از $y=f^{-1}(x)$ قرار می گیرد.

۴) نمودار $y=f(x)+c$ بالاتر از نمودار $y=f(x)$ است.

پاسخنامه تست های تابع معکوس

۱ـ

فرض مسأله : $(fog)^{-1}(x)=f(x) \to$ معکوس دو طرفه $\to fog(x)=f^{-1}(x)$ (۱)

مطلوب مسأله : $(gof)^{-1}(x)=f^{-1}og^{-1}(x) \to$ با استفاده از فرض (۱)

$$f^{-1}og^{-1}(x)=fogog^{-1}(x) \Rightarrow f^{-1}og^{-1}(x)=f(x)$$

۲ـ

فرض سوال : $g(x+1)=1+\frac{2}{x} \xrightarrow{x\to x-1} g(x)=1+\frac{2}{x-1}$

برای بدست آوردن تابع معکوس $g(x)$:

$$y=1+\frac{2}{x-1} \xrightarrow{\times(x-1)} (x-1)y=x-1+2 \Rightarrow (x-1)y=x+1$$

$$\Rightarrow xy-y=x+1 \Rightarrow x(y-1)=y+1 \Rightarrow x=\frac{y+1}{y-1} \Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

فرض سوال : $f(x)=g^{-1}\left(2-\frac{3}{x}\right) \Rightarrow f(x)=\dfrac{2-\frac{3}{x}+1}{2-\frac{3}{x}-1}=\dfrac{3x-3}{x-3}$

$$f^{-1}\left(\frac{5}{3}\right)=x \Rightarrow f(x)=\frac{5}{3} \Rightarrow \frac{3x-3}{x-3}=\frac{5}{3} \Rightarrow 9x-9=5x-15 \Rightarrow x=-\frac{3}{2} \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{5}{3}\right)=-\frac{3}{2}$$

راه حل دوم) فرض می کنیم:

$$A(x)=2-\frac{3}{x} \Rightarrow A(x)-2=-\frac{3}{x} \Rightarrow x=\frac{3}{2-A(x)} \Rightarrow A^{-1}(x)=\frac{3}{2-x}$$

طبق فرض سوال می دانیم:

$$\begin{cases} f(x)=g^{-1}oA(x) \Rightarrow f^{-1}(x)=A^{-1}og(x)=\dfrac{3}{2-g(x)} \Rightarrow f^{-1}\left(\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{3}{2-g\left(\frac{5}{3}\right)} \\ g(x+1)=1+\dfrac{2}{x} \xrightarrow{x=\frac{2}{3}} g\left(\dfrac{5}{3}\right)=1+3=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{3}{2-4}=-\frac{3}{2}$$

۳ـ با توجه به دامنه $x\geq 0$ داریم $y\geq 0$:

$$f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x}}=y \Rightarrow x+2\sqrt{x}=y^2 \Rightarrow x+2\sqrt{x}+1=y^2+1$$
$$\Rightarrow (\sqrt{x}+1)^2=y^2+1 \xrightarrow{\sqrt{x}+1>0} \sqrt{x}+1=\sqrt{y^2+1}$$

پس: $\sqrt{x}=\sqrt{y^2+1}-1$ لذا:

$$x=(\sqrt{y^2+1}-1)^2 \Rightarrow f^{-1}(y)=(\sqrt{y^2+1}-1)^2$$

از طرفی می دانیم: $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$ پس:

$$(f(2x))^{-1}=(fo(2x))^{-1}=(2x)^{-1}of^{-1}(x)=\left(\frac{1}{2}x\right)of^{-1}(x)$$

$$=\frac{f^{-1}(x)}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+1}-1)^2, x\geq 0$$

دقت کنید که اگر $f(x)=2x$ آنگاه $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x$

روش دوم) ابتدا $f(2x)$ را تشکیل می دهیم و سپس معکوس می کنیم:

$$f(2x)=\sqrt{2x+2\sqrt{2x}}=y \xrightarrow{y\geq 0} 2x+2\sqrt{2x}=y^2 \Rightarrow 2x+2\sqrt{2x}+1=y^2+1$$
$$\Rightarrow (\sqrt{2x}+1)^2=y^2+1 \xrightarrow{\sqrt{2x}+1\geq 0} \sqrt{2x}+1=\sqrt{y^2+1} \Rightarrow \sqrt{2x}=\sqrt{y^2+1}-1$$
$$\Rightarrow 2x=(\sqrt{y^2+1}-1)^2 \Rightarrow x=\frac{1}{2}(\sqrt{y^2+1}-1)^2, y\geq 0 \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(\sqrt{y^2+1}-1)^2, x\geq 0$$

۴ـ

$$f(x)=1+2g^{-1}(3x) \Rightarrow \frac{f(x)-1}{2}=g^{-1}(3x) \xrightarrow[\text{می گیریم}]{\text{از طرفین } g}$$

$$g\left(\frac{f(x)-1}{2}\right)=g(g^{-1}(3x))=3x \qquad (1)$$

حال فرض می کنیم $\frac{f(x)-1}{2}=t$ پس $f(x)-1=2t$ یا $f(x)=2t+1$ یا $x=f^{-1}(2t+1)$

$$\Rightarrow g(t)=3f^{-1}(2t+1) \Rightarrow g(x)=3f^{-1}(2x+1)$$

۵ـ می دانیم که در حالت کلی: $g^{-1}og(x)=x$ پس:

$$x=g^{-1}og(x)=g^{-1}\left(f\left(a+\frac{b}{x}\right)\right)=\frac{1}{2-f^{-1}of\left(a+\frac{b}{x}\right)}$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{2-a-\frac{b}{x}} \Rightarrow (2-a)x-b=1 \Rightarrow \begin{cases} 2-a=0 \Rightarrow a=2 \\ -b=1 \Rightarrow b=-1 \end{cases} \Rightarrow a-b=3$$

۶ـ

$$g(x)=۲f\left(\frac{x}{۳}\right)\Rightarrow y=۲f\left(\frac{x}{۳}\right)\Rightarrow\frac{y}{۲}=f\left(\frac{x}{۳}\right)$$

معکوس تابع $\frac{x}{۳}$ همان $۳x$ است:

$$\Rightarrow\left(\frac{y}{۲}\right)^{-۱}=\left(\frac{x}{۳}\right)^{-۱}of^{-۱}(x)\Rightarrow\left(\frac{y}{۲}\right)^{-۱}=(۳x)of^{-۱}(x)\Rightarrow\left(\frac{y}{۲}\right)^{-۱}=۳f^{-۱}(x)$$

$$\Rightarrow g^{-۱}(x)=۳f^{-۱}\left(\frac{x}{۲}\right)\Rightarrow g^{-۱}(x)=۳\left(۸\left(\frac{x}{۲}\right)^{۳}+۴\left(\frac{x}{۲}\right)\right)=۳x^{۳}+۶x=ax^{۳}+bx$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=۳\\b=۶\end{cases}\Rightarrow a+b=۹$$

۷ـ

$$y=g(x)=-f(۲x-۱)\Rightarrow x=g^{-۱}(y)\qquad(۱)$$

$$y=-f(۲x-۱)\Rightarrow ۲x-۱=f^{-۱}(-y)\Rightarrow x=\frac{f^{-۱}(-y)+۱}{۲}\qquad(۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)}g^{-۱}(y)=\frac{f^{-۱}(-y)+۱}{۲}\Rightarrow g^{-۱}(x)=\frac{f^{-۱}(-x)+۱}{۲}\xrightarrow{x=-۱}g^{-۱}(-۱)=\frac{f^{-۱}(۱)+۱}{۲}=\frac{۳+۱}{۲}=۲$$

روش دوم) ابتدا معکوس $۲x-۱$ را بدست می آوریم که برابر $\frac{x+۱}{۲}$ است.

$$g(x)=-f(۲x-۱)\Rightarrow -g(x)=f(۲x-۱)\Rightarrow(-y)^{-۱}=(۲x-۱)^{-۱}of^{-۱}(x)$$

$$\Rightarrow(-y)^{-۱}=\frac{x+۱}{۲}of^{-۱}(x)=\frac{f^{-۱}(x)+۱}{۲}\xrightarrow[\text{می کنیم}]{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را عوض}}$$

$$g^{-۱}(x)=\frac{f^{-۱}(x)+۱}{۲}\xrightarrow{x=-۱}g^{-۱}(-۱)=\frac{f^{-۱}(۱)+۱}{۲}=\frac{۳+۱}{۲}=۲$$

۸ـ باید وارون g را بدست آوریم پس داریم:

$$g(x)=y\Rightarrow g^{-۱}(y)=x\qquad(۱)$$

$$g(x)=y=f\left(\frac{x}{x+۲}\right)\Rightarrow\frac{x}{x+۲}=f^{-۱}(y)\Rightarrow xf^{-۱}(y)+۲f^{-۱}(y)=x$$

$$\Rightarrow x-xf^{-۱}(y)=۲f^{-۱}(y)\Rightarrow x(۱-f^{-۱}(y))=۲f^{-۱}(y)\Rightarrow x=\frac{۲f^{-۱}(x)}{۱-f^{-۱}(x)}\qquad(۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)}g^{-۱}(y)=\frac{۲f^{-۱}(y)}{۱-f^{-۱}(y)}\xrightarrow[\text{می کنیم}]{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را عوض}}g^{-۱}(x)=\frac{۲f^{-۱}(y)}{۱-f^{-۱}(y)}$$

$$\Rightarrow g^{-۱}(x)=\frac{۲(۱-\sqrt{x})}{۱-(۱-\sqrt{x})}=\frac{۲(۱-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

روش حرفه ای ها) ابتدا وارون $\frac{x}{x+۲}$ را بدست می آوریم:

$$y=\frac{x}{x+2}\Rightarrow xy+2y=x\Rightarrow x(1-y)=2y\Rightarrow x=\frac{2y}{1-y}\Rightarrow h^{-1}(x)=\frac{2x}{1-x}$$

$$g(x)=f(\mathrm{h(x)})\Rightarrow g^{-1}(x)=h^{-1}of^{-1}(x)=\left(\frac{2x}{1-x}\right)of^{-1}(x)=\frac{2f^{-1}(x)}{1-f^{-1}(x)}$$

$$=\frac{2(1-\sqrt{x})}{1-(1-\sqrt{x})}=\frac{2(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

۹ـ

فرض: $g^{-1}(3)=x\Rightarrow g(x)=3$

فرض سوال: $g(x)=\frac{2f(3x)+1}{f(3x)-1}\Rightarrow 3=\frac{2f(3x)+1}{f(3x)-1}\Rightarrow 3f(3x)-3=2f(3x)+1$

$\Rightarrow f(3x)=4\Rightarrow f^{-1}(4)=3x \qquad (1)$

فرض سوال: $f^{-1}(x)=x+\sqrt{x}\Rightarrow f^{-1}(4)=4+\sqrt{4}=6 \qquad (2)$

$\xrightarrow{(1),(2)} 3x=6\Rightarrow x=2$

۱۰ـ $y=x$ **اکیداً صعودی است پس برای اینکه کل تابع معکوس پذیر باشد باید** $a\left[\frac{bx}{3}\right]$ **هم صعودی باشد پس باید** ***a,b*** **هم علامت باشند که فقط در گزینه ۱ این اتفاق رخ داده است.**

۱۱ـ

$2+g(2-x)=f(\mathrm{x}^3+2)$

فرض سوال $\mathrm{f}^{-1}(6)=3\Rightarrow f(3)=6$

$\Rightarrow x^3+2=3\Rightarrow x^3=1\Rightarrow x=1\xrightarrow{x=1}2+g(1)=f(3)\Rightarrow 2+g(1)=6\Rightarrow g(1)=4$

$\Rightarrow g^{-1}(2a+2)=1\Rightarrow g(1)=2a+2=4\Rightarrow 2a=2\Rightarrow a=1$

۱۲ـ

$f^{-1}(2)=x\Rightarrow f(x)=2$

$2x+3\sqrt{x-1}=2\Rightarrow x=1\Rightarrow f^{-1}(2)=1\Rightarrow f^{-1}(2\mathrm{f}^{-1}(2))=\mathrm{f}^{-1}(2\times 1)=f^{-1}(2)=1$

۱۳ـ چون *f* اکیداً صعودی است پس یک به یک و در نتیجه معکوس پذیر است.

$$\left.\begin{aligned}&fog(x)=x^3+x+1\\&g^{-1}(2)=1\Rightarrow g(1)=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow fog(1)=f(\mathrm{g(1)})=\mathrm{f(2)}$$

$$\mathrm{f(2)}=(\mathrm{x}^3+\mathrm{x}+1)\Big|_{x=1}\Rightarrow f(2)=3\Rightarrow f^{-1}(3)=2$$

چون $f(2)=3$ **تابعی اکیداً صعودی است پس ۲، ۳ نمی توانند درست باشد چون** $f(3)=2$ **یا** $f(3)=1$ **نمی توانند درست باشند و باید** $f(3)>\mathrm{f(2)}$ **باشد.**

۱۴ـ برای اینکه معکوس پذیر نباشد نباید صعودی باشد یعنی:

$f(0^-) > f(0^+)$

$0 + 6 > 0^2 + a \Rightarrow a < 6 \xrightarrow{a \in N} a \in \{1,2,3,4,5\}$

۱۵ـ پاسخ: گزینه۳

در این سهمی طول رأس $x = 2$ می باشد پس برای $x \leq 2$ صعودی اکید و برای $x \geq 2$ نزولی اکید است لذا:

$$x \leq 2 \Rightarrow f(x) = -(x-2)^2 + 7 \Rightarrow y = -(x-2)^2 + 7$$

$$(x-2)^2 = 7 - y \Rightarrow x - 2 = \pm\sqrt{7-y}$$

چون $x \leq 2$ پس $x - 2 \leq 0$ لذا علامت مثبت غیرقابل قبول می شود.

$$x - 2 = -\sqrt{7-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{7-x}, D_{f^{-1}} = R_f = (-\infty, 7]$$

$$f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{7-x}, x \leq 7$$

۱۶ـ پاسخ: گزینه۴

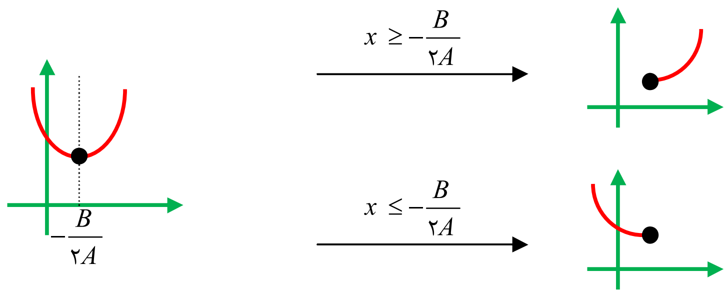
چون f یک تابع و دارای زوج مرتب های $(1,3),(1,a)$ است پس لازم است $a = 3$ باشد در نتیجه:

$$f = \{(1,3),(b,2),(4,2)\}$$

از آنجا که f یک تابع یک به یک است و $(b,2),(4,2) \in f$ هستند پس لازم است $b = 4$باشد.

۱۷ـ پاسخ: گزینه۱

با توجه به شکل هر سهمی اگر $x \geq -\frac{B}{2A}$ یا $x \leq -\frac{B}{2A}$ باشد تابع یک به یک خواهد بود:



اگر در بازهٔ $[a,+\infty)$ تابع یک به یک باشد و a حداقل مقدار ممکن باشد پس a همان طول رأس سهمی است:

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 3 \Rightarrow x = \frac{-4}{2(-2)} = 1$$

پس حداقل مقدار a برابر ۱ است.

🔔 **تذکر**: اگر دامنهٔ تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ زیرمجموعهٔ بازهٔ $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ یا $\left(-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$ باشد تابع f یک به یک خواهد بود.

۱۸ـ پاسخ: گزینه۴

تابع f را به صورت تابعی دوضابطه ای می نویسیم:

$$f(x)=x^{n}|۲x|=\begin{cases} x^{n}\times ۲x=۲x^{n+۱} & x\geq ۰\\ x^{n}\times -۲x=-۲x^{n+۱} & x<۰\end{cases}$$

اگر n فرد باشد $n+۱$ زوج است و عبارت $y=x^{n+۱}$ همواره نامنفی است. در نتیجه $y=۲x^{n+۱}$ به ازای $x\geq ۰$ همواره نامنفی و $y=-۲x^{n+۱}$ همواره منفی است و هر دو تابع برای $n\neq -۱$ یک به یک هستند. اما اگر n زوج باشد $n+۱$ فرد است و به ازای $x\geq ۰$, $۲x^{n+۱}$ عبارتی نامنفی و به ازای $x<۰$ عبارت $y=-۲x^{n+۱}$ نیز عبارتی مثبت است.

۱۹_ پاسخ: گزینه۱

ابتدا باید مقدار $f(۴)$ را به دست آوریم اگر در دو طرف تساوی زیر به جای x قرار دهیم $f(۴), ۴$ به دست می آید:

$$f(x)+f(۴)=x+۲\sqrt{x}\xrightarrow{x=۴}f(۴)+f(۴)=۴+۲\sqrt{۴}\Rightarrow ۲f(۴)=۸\Rightarrow f(۴)=۴$$

$$f(x)+۴=x+۲\sqrt{x}\Rightarrow f(x)=x+۲\sqrt{x}-۴$$

اگر $f^{-۱}(-۱)=\alpha$ باشد $f(\alpha)=-۱$ است و در نتیجه:

$$f(\alpha)=-۱\Rightarrow \alpha+۲\sqrt{\alpha}-۴=-۱\Rightarrow \alpha+۲\sqrt{\alpha}=۳\Rightarrow \alpha=۱$$

پس $f^{-۱}(-۱)=۱$ است از طرفی چون $f(۴)=۴$ است در نتیجه $f^{-۱}(۴)=۴$ است و داریم:

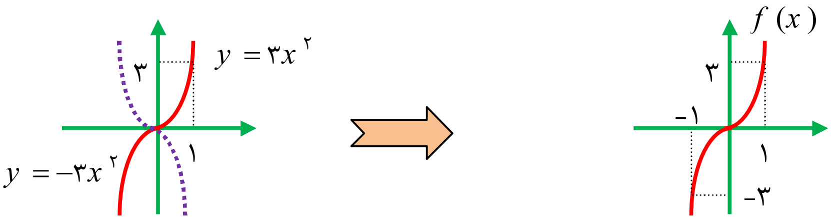
$$f^{-۱}(-۱)-f^{-۱}(۴)=۱-۴=-۳$$

۲۰_ پاسخ: گزینه۱

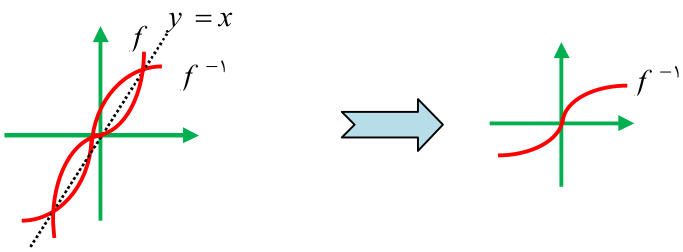
تابع f را به صورت یک تابع دو ضابطه ای می نویسیم و سپس آن را رسم می کنیم:

$$f(x)=x|۳x|=\begin{cases} x\times ۳x=۳x^{۲} & x\geq ۰\\ x\times -۳x=-۳x^{۲} & x<۰\end{cases}$$

پس تابع $y=۳x^{۲}$ را به ازای $x\geq ۰$ و تابع $y=-۳x^{۲}$ را به ازای $x<۰$ رسم می کنیم:



می دانیم برای رسم معکوس هر تابع کافی است قرینهٔ آن را نسبت به خط $y=x$ رسم کنیم:



۲۱_ پاسخ: گزینه۲

تابع f را به صورت ۲ ضابطه ای می نویسیم:

$$f(x)=x\,|4x|=\begin{cases}4x^2 & x\geq 0\\ -4x^2 & x<0\end{cases}$$

با توجه به آن که $f(3)=36$ است باید معادلهٔ $f^{-1}(2x)=36$ را حل کنیم اگر α جواب معادلهٔ فوق باشد پس داریم:

$(2\alpha,36)\in f^{-1}$ در نتیجه $(36,2\alpha)\in f$ پس: $f(36)=2\alpha$

$$f(36)=4\times 36^2=2\alpha\Rightarrow \alpha=2\times 36^2=2592$$

۲۲ـ پاسخ: گزینه۱

ابتدا در معادلهٔ زیر x را برحسب y به دست می آوریم:

$$y=x+\sqrt{x^2+2x}\Rightarrow y-x=\sqrt{x^2+2x}\xrightarrow{y\geq x}(y-x)^2=x^2+2x$$

$$\Rightarrow y^2-2xy+x^2=x^2+2x\Rightarrow 2xy+2x=y^2\Rightarrow x(2y+2)=y^2\Rightarrow x=\frac{y^2}{2y+2}$$

اما با توجه به این که باید $y-x\geq 0$ باشد تا درستی تساوی $y-x=\sqrt{x^2+2x}$ برقرار باشد پس باید $y\geq x$ باشد

در نتیجه:

$$y\geq x=\frac{y^2}{2y+2}\Rightarrow y\geq\frac{y^2}{2y+2}\Rightarrow y-\frac{y^2}{2y+2}\geq 0\Rightarrow\frac{2y^2+2y-y^2}{2y+2}\geq 0$$

$$\Rightarrow\frac{y^2+2y}{2(y+1)}\geq 0\Rightarrow\underbrace{\frac{y(y+2)}{2(y+1)}}_{n}\geq 0$$

به کمک جدول تعیین علامت برای عبارت P نامعادلهٔ فوق را حل می کنیم:

y		-2		-1		0	
y	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$y+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$y+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\frac{y(y+2)}{2y+2}$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$

$$\Rightarrow P\geq 0\Rightarrow y\in[-2,-1)\cup[0,+\infty)$$

پس تابع معکوس f به صورت زیر است:

$$\begin{cases}f^{-1}(x)=\dfrac{x^2}{2x+2}\\ D_{f^{-1}}=[-2,-1)\cup[0,+\infty)\end{cases}$$

۲۳ـ پاسخ: گزینه۲

$$f(x)=y=x+\sqrt{1+x^2}$$

x را برحسب y محاسبه می کنیم (فرض می کنیم y معلوم و x مجهول است.)

$$y-x=\sqrt{1+x^2}\Rightarrow (y-x)^2=1+x^2 (y\geq x)\Rightarrow x^2+y^2-2xy=x^2+1\Rightarrow 2xy=y^2-1$$

$$\Rightarrow x=\frac{y^2-1}{2y}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x^2-1}{2x}$$

در نتیجه به جای x قرار می دهیم $\frac{1}{x}$ و ضابطهٔ $f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ را به دست می آوریم:

$$f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}{2\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{\frac{1-x^2}{x^2}}{\frac{2}{x}}=\frac{1-x^2}{2x}$$

۲۴ـ پاسخ: گزینه۲

اگر به تابع f دقت کنید این تابع دارای این ویژگی است که $f(-x)=-f(x)$ زیرا:

$$f(-x)=\frac{-x}{\sqrt{1-(-x)^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1+x^2}}=-1\times\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=-f(x)$$

پس به ازای هر $x\in D_f$, $-x$ نیز عضو دامنهٔ f است و داریم: $f(-x)=-f(x)$. پس اگر $(\alpha,\beta)\in f$ داریم: $(-\alpha,-\beta)\in f$

$$\begin{cases}(\alpha,\beta)\in f\Rightarrow(\beta,\alpha)\in f^{-1}\\(-\alpha,-\beta)\in f\Rightarrow(-\beta,-\alpha)\in f^{-1}\end{cases}\Rightarrow f^{-1}(-x)=-f^{-1}(x)$$

پس تابع f^{-1} هم دارای خاصیتی شبیه تابع f است یعنی:

$$f^{-1}(-x)=-f^{-1}(x)\Rightarrow f^{-1}(-x)+f^{-1}(x)=0$$

پس بدون محاسبهٔ f^{-1} می توان گفت حاصل عبارت خواسته شده تابع ثابت صفر است.

۲۵ـ پاسخ: گزینه۲

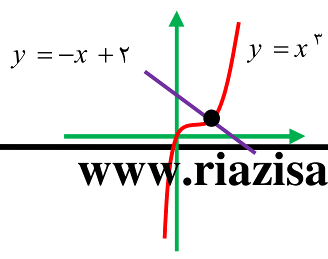
اگر تابعی اکیداً صعودی باشد نمودار تابع معکوس خود را فقط بر روی خط $y=x$ قطع می کند پس کافی است برای به دست آوردن محل های برخورد تابع f,f^{-1} معادلهٔ $f(x)=x$ را حل کنیم. تابع $f(x)=x^3+2x-2$ یک تابع اکیداً صعودی است زیرا توابع $y=x^3$, $y=x$ اکیداً صعودی اند و مجموع دو تابع اکیداً صعودی اکیداً صعودی است از طرفی تابع $y=-2$ تابعی ثابت است که با جمع دو تابع قبلی تأثیری بر روی اکیداً صعودی بودن آنها ندارد. (نمودار تابع فقط ۲ واحد پایین آمده است) پس کافی است از روی تعداد جواب های معادلهٔ $f(x)=x$ تعداد محل های برخورد f,f^{-1} را بیابیم:

$$x^3+2x-2=x$$

برای پیدا کردن تعداد جواب های معادلهٔ فوق از روش هندسی استفاده می کنیم:

$$x^3=-x+2$$

پس توابع $y=x^3, y=-x+2$ را رسم می کنیم و تعداد نقاط برخورد آنها را به دست می آوریم:



در نتیجه f, f^{-1} تنها ۱ نقطهٔ برخورد دارند.

۲۶ـ ☜ پاسخ: گزینه۲

اگر تابع f با خط $y=x$ برخورد کند طبعاً تابع f^{-1} هم در همان نقطه با $y=x$ برخورد خواهد داشت زیرا اگر $(a,a)\in f$ باشد آنگاه $(a,a)\in f^{-1}$ هم هست. اما تمام نقاط برخورد f, f^{-1} الزاماً بر روی خط $y=x$ نیستند اگر در تابعی مانند f دو نقطهٔ $(a,b),(b,a)$ که در آن $a\neq b$ است عضو باشند در تابع f^{-1} هم $(a,b),(b,a)$ عضو خواهند بود. پس چون دو نقطهٔ $(a,b),(b,a)$ عضو هر دو تابع هستند پس در اشتراک f, f^{-1} قرار دارند نقطل اشتراک f, f^{-1} هم همان تعریف نقاط تقاطع دو تابع است.

پس در حالت کلی می توان گفت اگر تابع f با خط $y=x$ برخورد کند تابع f^{-1} هم در همان نقطه برخورد می کند اما الزاماً تمام نقاط برخورد f, f^{-1} روی $y=x$ نیست مگر آنکه تابع f تابع اکیداً صعودی باشد در نتیجه:

$n=f$ تعداد محل های برخورد نیمساز ربع اول و سوم

$m=f^{-1}, f$ تعداد محل های برخورد

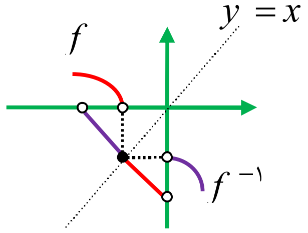
$\Rightarrow n\leq m$

۲۷ـ ☜ پاسخ: گزینه۳

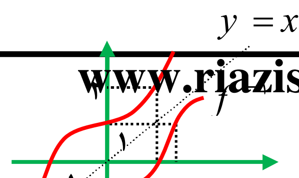
در جدول زیر قرینهٔ هر قسمت از منحنی f نسبت به خط $y=x$ که نمودار f^{-1} را به وجود می آورد بررسی شده است به ارتباط ناحیه ها توجه کنید.

نمودار f		نمودار f^{-1}
ناحیهٔ اول	$\rightarrow$	ناحیهٔ اول
ناحیهٔ دوم	$\rightarrow$	ناحیهٔ چهارم
ناحیهٔ سوم	$\rightarrow$	ناحیهٔ سوم
ناحیهٔ چهارم	$\rightarrow$	ناحیهٔ دوم

در نمودار داده شده بخشی از منحنی در ناحیهٔ دوم قرار دارد پس قرینهٔ آن نسبت به خط $y=x$ در ناحیهٔ چهارم است و بخشی از منحنی در ناحیهٔ بخش سوم است پس قرینهٔ آن نسبت به خط $y=x$ در ناحیهٔ سوم است. نمودار f^{-1} به صورت روبه رو است:



۲۸ـ ☜ پاسخ: گزینه۱



نمودار f^{-1} را با توجه به نمودار f رسم می کنیم (نمودار f را نسبت به خط $y=x$ قرینه می کنیم.) با توجه به نمودار f^{-1} داریم:

$$\begin{cases} f^{-1}(0)=-1 \\ f^{-1}(1)=0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(0)+f^{-1}(1)=-1+0=-1$$

۲۹- پاسخ: گزینه۲

اگر دو خط نسبت به نیمساز نواحی اول و سوم قرینه باشند یا به عبارت دیگر معکوس هم باشند حاصل ضرب شیب های آنها برابر یک خواهد بود چون دو خط داده شده نسبت به نیمساز نواحی اول و سوم قرینه اند. بنابراین:

$$\begin{cases} y=m_2x+2 \Rightarrow \text{شیب}=m_2 \\ y=m_1x+1 \Rightarrow \text{شیب}=m_1 \end{cases} \xrightarrow{\text{حاصل ضرب شیب‌ها}=1} m_1m_2=1 \Rightarrow m_2=\frac{1}{m_1}$$

از آنجا که $m_1+m_2=3$ بنابراین:

$$m_1+\frac{1}{m_1}=3 \xrightarrow{\times m_1} m_1^2+1=3m_1 \Rightarrow m_1^2-3m_1+1=0 \Rightarrow m_1=\frac{3\pm\sqrt{9-4(1)}}{2(1)}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

۳۰- پاسخ: گزینه۱

با فرض $y=f(x)$ داریم: $y=\dfrac{x+2}{2x-1}$

حال طرفین وسطین می کنیم و x را جدا می کنیم:

$$\Rightarrow 2xy-y=x+2 \Rightarrow 2xy-x=y+2 \Rightarrow x(2y-1)=y+2 \Rightarrow x=\frac{y+2}{2y-1}$$

در نهایت جای x , y را عوض می کنیم.

$$x=\frac{y+2}{2y-1} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+2}{2x-1}$$

در تابع $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ اگر $a+d=0$ باشد آنگاه f وارون خود است. به عبارت دیگر توابع f, f^{-1} برابر خواهند بود.

چون در تابع $f(x)=\dfrac{x+2}{2x-1}$ تساوی برقرار است بنابراین: $f^{-1}(x)=\dfrac{x+2}{2x-1}$

۳۱- پاسخ: گزینه۲

اول تابع را مرتب می کنیم: $y=\dfrac{2x+1}{x-1}-1=\dfrac{2x+1-x+1}{x-1}=\dfrac{x+2}{x-1}$

گفتیم اگر در تابع $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ اگر $a+d=0$ باشد آنگاه تابع معکوس تابع f با خود تابع برابر است. چون در تابع $y=\dfrac{x+2}{x-1}$, $a+d=1+(-1)=0$ است بنابراین تابع معکوس آن برابر خود تابع و برابر $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ است پس تابع و معکوسش در بی شمار نقطه متقاطع هستند.

۳۲ـ پاسخ: گزینه۴

می دانیم در تابع $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ اگر $a+d=۰$ باشد آنگاه f وارون خود است پس باید:

$$a+d=۰\Rightarrow a+۲=۱\Rightarrow a=-۲$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{-۲x}{x+۲}\Rightarrow f(۲)=\frac{-۴}{۴}=-۱$$

۳۳ـ

$$f(x)=\frac{|x|}{x}\sqrt{۱-x^۲}=\begin{cases}\sqrt{۱-x^۲} & ۰<x<۱\\ -\sqrt{۱-x^۲} & -۱<x<۰\end{cases}$$

$$۰<x<۱: y=\sqrt{۱-x^۲}\Rightarrow ۰<y<۱\Rightarrow y^۲=۱-x^۲\Rightarrow x^۲=۱-y^۲\xrightarrow{x>۰}x=\sqrt{۱-y^۲};۰<y<۱$$

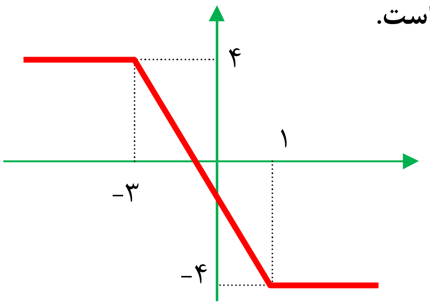
$$-۱<x<۰: y=-\sqrt{۱-x^۲}\Rightarrow -۱<y\le ۰\Rightarrow y^۲=۱-x^۲\Rightarrow x^۲=۱-y^۲\xrightarrow{x<۰}x=-\sqrt{۱-y^۲}\Rightarrow -۱<y<۰$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\begin{cases}\sqrt{۱-x^۲} & ۰<x<۱\\ -\sqrt{۱-x^۲} & -۱<x<۰\end{cases}\Rightarrow f^{-۱}(x)=f(x)$$

پاسخ $f^{-۱}(x)$ مستقیماً در گزینه ها وجود ندارد ولی دقت کنید که $f(x)$ تابعی فرد است یعنی $f(x)=-f(x)$ زیرا:

$$\text{f}(-\text{x})=\frac{|-x|}{-x}\sqrt{۱-(-x)^۲}=-\frac{|x|}{x}\sqrt{۱-x^۲}=-f(x)\Rightarrow f(x)=-f(x)$$

۳۴ـ نمودار تابع را رسم می کنیم در بازه ای که یک به یک باشد معکوس پذیر است.



در بازه $[-۳,۱]$ یک به یک و در نتیجه معکوس پذیر است.

۳۵ـ فرض $f^{-۱}$ محور y ها را در نقطه $(۰,\text{a})$ قطع می کند آنگاه تابع f محور x ها را در نقطه $(\text{a},۰)$ قطع می کند پس:

$$\text{x}-\frac{۱}{x}=۰\Rightarrow\frac{x^۲-۱}{x}=۰\Rightarrow x^۲-۱=۰\xrightarrow{x>۰}x=۱\Rightarrow a=۱\Rightarrow f^{-۱}(۰)=۱$$

۳۶ـ

$$y=x|x|=\begin{cases}x^۲ & x\ge ۰\\ -x^۲ & x\le ۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=x^۲\Rightarrow x=\pm\sqrt{y}\xrightarrow{x\ge ۰}x=\sqrt{y}\xrightarrow{x\ge ۰}y\ge ۰\\ y=-x^۲\Rightarrow x^۲=-y\Rightarrow x,\pm\sqrt{-y}\xrightarrow{x<۰}x=-\sqrt{-y}\xrightarrow{x<۰}y<۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\ge ۰\\ -\sqrt{-x} & x<۰\end{cases}$$

۳۷ـ معکوس $y=\dfrac{۱}{x}$، $\dfrac{۱}{x}$ است.

هدف پیدا کردن معکوس $f\left(\dfrac{۱}{x}\right)$ یا در واقع $\left(fo\dfrac{۱}{x}\right)^{-۱}$ است.

$$\left(fo\frac{1}{x}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}of^{-1}=\frac{1}{x}of^{-1}=\frac{1}{f^{-1}}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

۳۸ـ

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},g(x)=f^{-1}(x)$$

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

اگر $\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \alpha\end{vmatrix}$ روی f^{-1} باشد پس $\begin{vmatrix}\alpha\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{vmatrix}$ روی f قرار دارد:

$$\Rightarrow\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\frac{\alpha^2}{\alpha^2+1}=\frac{1}{3}\Rightarrow 3\alpha^2=\alpha^2+1\Rightarrow 2\alpha^2=1\Rightarrow\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

حکم مسأله : $f(x)=g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\xrightarrow{x>0}2x^2=x^2+1\xrightarrow{x>0}x=1$

گزینه۱ درست است.

۳۹ـ

$$\text{ورودی}\longrightarrow\boxed{f}\longrightarrow\boxed{g}\longrightarrow\text{خروجی}\Rightarrow$$ **ماشین** $gof(x)$

فرض مسأله : $f(x)=x-\sqrt{x+2},g^{-1}(x)=\frac{1-x}{x},g(\mathrm{f(a)})=1$

$$g(\mathrm{f(a)})=1\Rightarrow f(a)=g^{-1}(1)=\frac{1-1}{1}=0\Rightarrow f(a)=0\Rightarrow a-\sqrt{a+2}=0\Rightarrow a=\sqrt{a+2}$$

$$\xrightarrow{a\geq 0}a^2=a+2\Rightarrow(a-2)(a+1)=0\xrightarrow{a\geq 0}a=2$$

۴۰ـ چون چند جمله درجه زوج یک به یک نیستند بنابراین ضریب x^4 باید صفر باشد:

$$a-3=0\Rightarrow a=3\Rightarrow f(x)=x^3+2x^2+2x$$

$f'(x)=3x^2+4x+2\xrightarrow[\Delta>0]{\Delta<0}$ **همواره مثبت است**

تابع $f(x)$ صعودی اکید است بنابراین خط $y=x$ متقاطع اند.

$$f(x)=x\Rightarrow x^3+2x^2+2x=x\Rightarrow x^3+2x^2+x=0\Rightarrow x(x^2+2x+1)=0$$

$$\Rightarrow x(x+1)^2=0\Rightarrow x=0,-1$$

۴۱ـ

$$f(x)=\frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)}=x+3,x\in R-\{-2\}$$

اما دقت کنید که $x=-۲$ در دامنه $f(x)$ نیست چرا که عبارت $x+۲$ در مخرج وجود دارد در نتیجه $f(x)=x+۳$ به ازای $x=-۲$ عضو برد تابع نیست. یعنی این مقدار در دامنه تابع معکوس نخواهد بود.

$$f(x)=x+۳\Big|_{x=-۲}=۱\Rightarrow f^{-۱}(x)=x-۳, x\in R-\{۱\}$$

برای اینکه $x=۱$ از دامنه $f^{-۱}(x)$ حذف شود باید این مقدار ریشه مخرج باشد.

$$f^{-۱}(x)=\frac{x^۲+ax+b}{x+c}$$

$$x+c\Big|_{x=۱}=۰\Rightarrow ۱+c=۰\Rightarrow c=-۱\Rightarrow \frac{x^۲+ax+b}{x-۱}=x-۳$$

$$\Rightarrow x^۲+ax+b=(x-۱)(x-۳)=x^۲-۴x+۳\Rightarrow \begin{cases} a=-۴ \\ b=۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b+c=-۴+۳-۱=-۲$$

۴۲ـ پاسخ: گزینه۲

برای آن که f یک به یک باشد باید از برابری $f(\alpha)=f(\beta)$ برابری $\alpha=\beta$ به دست آید.

$$f(\alpha)=f(\beta)\Rightarrow \frac{۲\alpha+a}{\alpha+۳}=\frac{۲\beta+a}{\beta+۳}\Rightarrow ۲\alpha\beta+۶\alpha+a\beta+۳a=۲\alpha\beta+۶\beta+a\alpha+۳a$$

$$\Rightarrow ۶\alpha+a\beta=۶\beta+a\alpha\Rightarrow (۶-a)\alpha=(۶-a)\beta$$

اگر $a=۶$ آنگاه α,β هرمقداری اختیار می کند برای آن که $\alpha=\beta$ باشد باید $a\neq ۶$ باشد، یعنی با شرط $a\neq ۶$ تابع یک به یک خواهد شد.

۴۳ـ پاسخ: گزینه۲

در ابتدا نکتهٔ مهم زیر را داریم که:

نکته: اگر f تابعی معکوس پذیر باشد: $f(\alpha)=\beta \Leftrightarrow f^{-۱}(\beta)=\alpha$

به جای آن که ضابطه $f^{-۱}$ را پیدا کنیم می توانیم با نکتهٔ فوق حل را شروع کنیم:

$$f^{-۱}(۳)=\alpha\Rightarrow f(\alpha)=۳$$

$$۳=\alpha+\sqrt{\alpha^۲+۳}\Rightarrow \sqrt{\alpha^۲+۳}=۳-\alpha\Rightarrow \alpha^۲+۳=\alpha^۲+۹-۶\alpha\Rightarrow \alpha=۱$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(۳)=۱\Rightarrow f(۱+۲\times۱)=f(۳)=۳+\sqrt{۱۲}=۳+۲\sqrt{۳}$$

۴۴ـ پاسخ: گزینه۱

f صعودی اکید و معکوس پذیر است به جای آن که f و $f^{-۱}$ را تلاقی دهیم f را با خط $y=x$ قطع می دهیم.

$$x^۳+x-۸=x\Rightarrow x^۳=۸\Rightarrow x=۲\Rightarrow A\Big|^{۲}_{۲}\text{نقطه تلاقی}\Rightarrow OA=۲\sqrt{۲}$$

۴۵ـ پاسخ: گزینه۴

ابتدا تابع را تکه تکه بررسی می کنیم:

$x \le 0 \Rightarrow f(x) = -3x + x - 2 + x = -x - 2$ نزولی اکید

$0 \le x \le 2 \Rightarrow f(x) = 3x + x - 2 + x = 5x - 2$ صعودی اکید

$x \ge 2 \Rightarrow f(x) = 3x - x + 2 + x = 3x + 2$ صعودی اکید

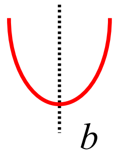
سه تابع خطی داریم یک تابع خطی در حالتی نزولی اکید است که ضریب x منفی باشد پس: $x \le 0 \Rightarrow f(x) = -x - 2$ در این حالت: $f(x) \ge -2$

$$y = -x - 2 \Rightarrow x = -y - 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -x - 2, x \ge -2$$

نکته: یک تابع ممکن است یک به یک نباشد اما با تغییر دامنهٔ تابع به یک تابع یک به یک یا معکوس پذیر تبدیل می شود. مثلاً

$y = ax^2 + bx + c$ و $a \ne 0$ با فرض $x \ge -\frac{b}{2a}$ و یا با فرض $x \le -\frac{b}{2a}$ معکوس پذیر است.

زیرا در تک تک این بازه ها تابع یکنوای اکید و یک به یک است.



$x = -\frac{b}{2a}$

۴۶ــ پاسخ: گزینه۳

۱) یک به یک نیست زیرا به ازای مثلاً $x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}$ دارای خروجی های یکسان است:

$$g(x) = |x| f(x) \Rightarrow \begin{cases} g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

۲و ۴) یک به یک نیستند زیرا به ازای مثلاً $x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}$ دارای خروجی های یکسان اند:

$$g(x) = |x| + f(x) \Rightarrow \begin{cases} g\left(\frac{1}{2}\right) = \left|\frac{1}{2}\right| + \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ g\left(-\frac{1}{2}\right) = \left|-\frac{1}{2}\right| + \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$g(x) = |x| - f(x) \Rightarrow \begin{cases} g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

اما (۳) یک به یک است. اگر این تابع را به صورت ۲ ضابطه ای بنویسیم داریم:

$$g(x) = \frac{|x|}{x} \times \sqrt{1 - x^2} = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} & x > 0 \\ -\sqrt{1 - x^2} & x < 0 \end{cases}$$

به ازای $x>0$ این تابع یک به یک است به ازای $x<0$ هم یک به یک است. ضمناً به ازای $x>0$ خروجی های تابع مثبت و به ازای $x<0$ خروجی های تابع منفی اند. پس برد دو ضابطهٔ بالا اشتراکی ندارند. در نتیجه تابع یک به یک است.

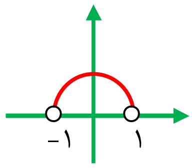
$$x_1,x_2>0: f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\sqrt{1-x_1^2}=\sqrt{1-x_2^2}\Rightarrow 1-x_1^2=1-x_2^2$$

$$\Rightarrow x_1^2=x_2^2\xrightarrow{x_1,x_2>0}x_1=x_2$$

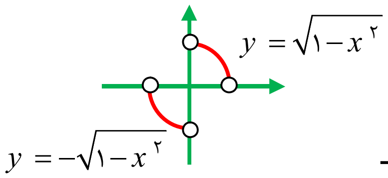
$$x_1,x_2<0: f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\sqrt{1-x_1^2}=\sqrt{1-x_2^2}$$

$$\Rightarrow 1-x_1^2=1-x_2^2\Rightarrow x_1^2=x_2^2\xrightarrow{x_1,x_2<0}x_1=x_2$$

شکل تابع $y=\sqrt{1-x^2}$ یک نیم دایره به صورت زیر است:



در نتیجه شکل تابع $y=\frac{|x|}{x}\sqrt{1-x^2}$ به صورت زیر خواهد بود:



یک به یک است $\rightarrow$

۴۷ــ ☜ پاسخ: گزینه۲

اگر f تابعی یک به یک باشد و برانیم $f(x_1)=f(x_2)$ است باید $x_1=x_2$ باشد. از آنجا که $f([x])=f(|x|)$ است باید $|x|=[x]$ باشد تا تابع f یک به یک شود پس باید ببینیم در چه مواقعی جز صحیح یک عدد با قدرمطلق آن برابر است. از آن جا که $[x]$ عدد صحیح است پس $x\in Z$ است و از آن جا که $|x|$ عددی نامنفی است پس x نیز عدد نامنفی است در نتیجه باید x عدد صحیح نامنفی باشد پس $[x]=|x|$ است:

$$\begin{cases}[x]\in Z\\ |x|\geq 0\end{cases}\Rightarrow x\in W$$

۴۸ــ ☜ پاسخ: گزینه۲

چون چندجمله ای های درجه دوم (سهمی ها) یک به یک نیستند. پس f نباید یک چندجمله ای درجه دوم باشد پس باید ضریب x^2 برابر صفر باشد تا f یک تابع درجه اول (خطی) باشد:

$$2a-1=0\Rightarrow a=\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)=bx+2$$

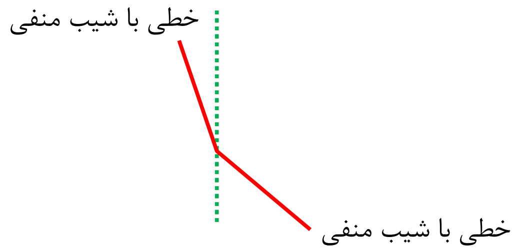
از آنجا که $f^{-1}(5)=3$ داریم $f(3)=5$ پس:

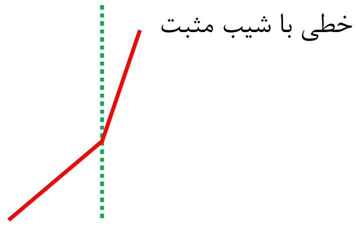
$$f(3)=5\Rightarrow 3b+2=5\Rightarrow b=1$$

پس $f(x)=x+2$ و داریم: $f(4)=6$

۴۹ـ پاسخ: گزینه۱

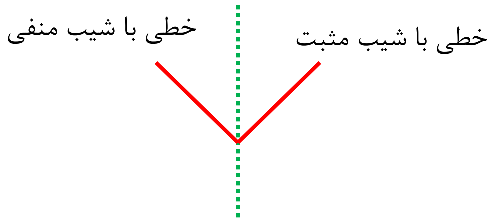
هر تابع به شکل $y=۳x-|ax+۲|$ یک تابع دو ضابطه ای است که هر ضابطهٔ آن معادلهٔ یک خط است. اگر علامت شیب خط از ضابطهٔ اول به دوم بدون تغییر بماند (یعنی شیب هر دو ضابطه هم علامت باشد) این تابع یک به یک خواهد بود (به شرطی که هیچ کدام از شیب ها صفر نشوند) زیرا شکل کلی آن به یکی از دو صورت زیر خواهد بود:

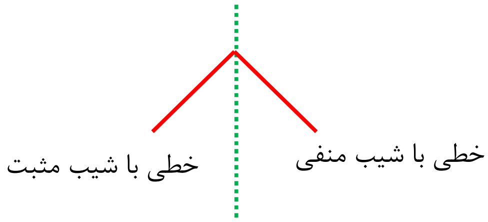




$x=-\frac{۲}{a}$ ریشهٔ داخل قدرمطلق $x=-\frac{۲}{a}$

اگر شیب خطوط ناهم علامت باشد شکل تابع به یکی از صورت های زیر است پس تابع غیر یک به یک است.





$x=-\frac{۲}{a}$ $x=-\frac{۲}{a}$

پس تابع را به صورت ۲ ضابطه ای می نویسیم:

$$y=\begin{cases}۳x-(ax+۲) & ax+۲\geq ۰\\ ۳x+(ax+۲) & ax+۲<۰\end{cases}\Rightarrow y=\begin{cases}(۳-a)x-۲\\ (۳+a)x+۲\end{cases}$$

باید شیب خط هر دو ضابطه هم علامت باشند پس: $(۳-a)(۳+a)>۰\Rightarrow a\in(-۳,۳)\Rightarrow a\in\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$

۵۰ـ پاسخ: گزینه۳

ابتدا $f^{-۱}(-۱۶)$ را به دست می آوریم اگر $f^{-۱}(-۱۶)=\alpha$ باشد $f(\alpha)=-۱۶$ است در نتیجه:

$$f(x)=x|۴x|\Rightarrow f(\alpha)=\alpha|۴\alpha|=-۱۶\Rightarrow \alpha|\alpha|=-۴\Rightarrow \alpha=-۲$$

در نتیجه $f^{-۱}(-۱۶)=-۲$ است پس:

$$f(\underbrace{۲f^{-۱}(-۱۶)}_{-۴})=f^{-۱}(-۴)$$

حال باید $f^{-۱}(-۴)$ را به دست آوریم: اگر $f^{-۱}(-۴)=\beta$ باشد $f(\beta)=-۴$ است در نتیجه:

$$f(\beta)=\beta|۴\beta|=-۴\Rightarrow \beta|\beta|=-۱\Rightarrow \beta=-۱$$

پس $f^{-۱}(-۴)=-۱$ است: $f(۲f^{-۱}(-۱۶))=f^{-۱}(-۴)=-۱$

۵۱ـ پاسخ: گزینه۳

اگر $f^{-1}(-4)=\alpha$ باشد داریم $f(\alpha)=-4$ اگر به جای $\boldsymbol{x}$ در رابطهٔ $f(4x)=2-3g\left(\frac{3}{x}\right)$ قرار دهیم $\frac{\alpha}{4}$ داریم:

$$f(\alpha)=2-3g\left(\frac{3}{\frac{\alpha}{4}}\right)=2-3g\left(\frac{12}{\alpha}\right)$$

از طرفی $f(\alpha)=-4$ است پس:

$$f(\alpha)=2-3g\left(\frac{12}{\alpha}\right)=-4\Rightarrow -3g\left(\frac{12}{\alpha}\right)=-6\Rightarrow g\left(\frac{12}{\alpha}\right)=2$$

چون داریم $g\left(\frac{12}{\alpha}\right)=2$ پس $g^{-1}(2)=\frac{12}{\alpha}$ است از طرفی می دانیم $g^{-1}(2)=-2$ است در نتیجه:

$$\begin{cases} g^{-1}(2)=-2 \\ g^{-1}(2)=\frac{12}{\alpha} \end{cases}\Rightarrow \frac{12}{\alpha}=-2\Rightarrow \alpha=-6$$

۵۲ـ☜ پاسخ: گزینه۱

می دانیم برای رسم تابع f^{-1} از روی تابع $\boldsymbol{f}$ کافی است نمودار تابع $\boldsymbol{f}$ را نسبت به نیمساز اول و سوم تقارن دهیم. (خط $y=x$) ضمناً می دانیم دامنهٔ تابع $\boldsymbol{f}$ برد تابع f^{-1} و برد تابع $\boldsymbol{f}$ دامنهٔ تابع f^{-1} است.

با توجه به شکل تابع $g(x)=\frac{x+1}{3}$ در بازهٔ $(0,4)$ بالاتر از تابع $\boldsymbol{f}$ است. در این بازه برد هر دو تابع بازهٔ $\left[\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right]$ است

بعد از رسم معکوس توابع $\boldsymbol{f}$ و $\boldsymbol{g}$ در بازهٔ $\left[\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right]$ تابع f^{-1} بالاتر از g^{-1} است پس در بازهٔ $\left[\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right]$ داریم:

$$f^{-1}(x)\geq 3x-1$$

از طرفی:

$$y=g(x)=\frac{x+1}{3}\Rightarrow x=3y-1\Rightarrow g^{-1}(x)=3x-1$$

$$\left[\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right]\Rightarrow f^{-1}(x)\geq g^{-1}(x)\Rightarrow f^{-1}(x)\geq 3x-1\Rightarrow f^{-1}(x)-3x+1\geq 0$$

پس دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f^{-1}(x)-3x+1}$ همان بازهٔ $\left[\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right]$ است که $f^{-1}(x)\geq 3x-1$ است.

۵۳ـ☜ پاسخ: گزینه۱

اگر $y=x+\frac{4}{x}$ باشد با شرط $x\in(0,2]$، x را برحسب $\boldsymbol{y}$ به دست می آوریم:

$$y=x+\frac{4}{x}\xrightarrow{\times x} yx=x^2+4\Rightarrow x^2-xy+4=0\Rightarrow x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-16}}{2}$$

اما برای حل معادلهٔ بالا ۲ شرط مهم وجود دارد اولاً از آنجا که $x>0$ است پس $\frac{4}{x}>0$ است در نتیجه $x+\frac{4}{x}>0$ است

پس y همواره مثبت است. (در نتیجه ۳ و ۴ حذف می شوند)

ثانیاً با توجه به آنکه باید عبارت زیر ادیکال مثبت باشد باید $|x|\geq 4$ باشد $y\geq 4$ پس با توجه به مثبت بودن y پس $x\leq 2$

است (پس تا اینجا یا (۱) صحیح است یا ۲) اما می دانیم $x\leq 2$ است اگر $x=\frac{y+\sqrt{y^2-16}}{2}$ باشد با توجه به آنکه نشان

داریم $y\geq 4$ ، آنگاه $\frac{y+\sqrt{y^2-16}}{2}\geq 2$ خواهد بود در صورتی که می دانیم $0\leq x\leq 2$ است پس

$x=\frac{y-\sqrt{y^2-16}}{2}$ خواهد بود پس:

$$\begin{cases} f^{-1}(x)=\frac{x-\sqrt{x^2-16}}{2} \\ D_{f^{-1}}=[4,+\infty) \end{cases}$$

۵۴ـ پاسخ: گزینه۱

سعی می کنیم به کمک مربع سازی در ضابطهٔ تابع f ، x را برحسب y حساب کنیم: $y=x+\sqrt{x-a}$

از دو طرف تساوی بالا a واحد کم می کنیم: $y-a=x-a+\sqrt{x-a}$

اگر عبارات $\sqrt{x-a}, x-a$ به ترتیب در اتحاد $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ ، $2\alpha\beta, \alpha^2$ باشند پس

$\beta=\frac{1}{2}, \alpha=\sqrt{x-a}$ است پس:

$$y-a=x-a+\sqrt{x-a}=\underbrace{\left(\sqrt{x-a}+\frac{1}{2}\right)^2}_{x-a+\sqrt{x-a}+\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}\Rightarrow y-a+\frac{1}{4}=\left(\sqrt{x-a}+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-a}+\frac{1}{2}=\pm\sqrt{y-a+\frac{1}{4}}$$

چون سمت چپ تساوی بالا مثبت است پس باید سمت راست هم مثبت باشد پس $-\sqrt{y-a+\frac{1}{4}}$ قابل قبول نیست در نتیجه:

$$\sqrt{x-a}+\frac{1}{2}=\sqrt{y-a+\frac{1}{4}}\Rightarrow \sqrt{x-a}=\sqrt{y-a+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x-a=y-a+\frac{1}{4}-\sqrt{y-a+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x=y+\frac{1}{2}-\sqrt{y+\frac{1}{4}-a}\Rightarrow f^{-1}=x+\frac{1}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}-a}$$

اما با توجه به آن که داریم $f^{-1}(x)=x+b+c\sqrt{x-\frac{3}{4}}$ پس:

$$\begin{cases} b=\frac{۱}{۲} \\ c=-۱ \\ \frac{۱}{۴}-a=-\frac{۳}{۴} \Rightarrow y-x=\sqrt{x-a} \end{cases} \Rightarrow a+b+c=۱+\frac{۱}{۲}-۱=\frac{۱}{۲}$$

۵۵ـ پاسخ: گزینه۲

تابع معکوس تابع fرا به دست می آوریم:

$$y=\frac{۲x+a}{x+۳-a} \Rightarrow yx+y(۳-a)=۲x+a \Rightarrow yx-۲x=a-y(۳-a)$$

$$\Rightarrow x(y-۲)=a-y(۳-a) \Rightarrow x=\frac{a+(a-۳)y}{y-۲} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{a+(a-۳)x}{x-۲}$$

با توجه به تساوی $f(x)$ و $f^{-۱}(x)$ داریم:

$$\frac{۲x+a}{x+۳-a}=\frac{(a-۳)x+a}{x-۲}$$

با توجه به تساوی قبل $a=۵$ است.

تذکر: در حالت کلی معکوس هر تابع به صورت $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(ad\neq bc, c\neq ۰)$ زمانی بر خود این تابع منطبق است که $a+d=۰$ یا $a=-d$ باشد در نتیجه در این سوال داریم:

$$y=\frac{۲x+a}{x+۳-a} \Rightarrow \begin{cases} a=۲ \\ d=۳-a \end{cases} \Rightarrow ۲+۳-a=۰ \Rightarrow a=۵$$

۵۶ـ پاسخ: گزینه۱

از آنجا که نقطه (۲، ۱) عضو f و $f^{-۱}$ است نقطه (۱، ۲) نیز عضو f و $f^{-۱}$ است زیرا اگر نقطهٔ $(۱,۲)\in f$ باشد داریم $(۲,۱)\in f^{-۱}$ و چون $(۱,۲)\in f^{-۱}$ است $(۲,۱)\in f$ است.

$$\begin{cases} (۱,۲)\in f \Rightarrow (۲,۱)\in f^{-۱} \\ (۱,۲)\in f^{-۱} \Rightarrow (۲,۱)\in f \end{cases} \Rightarrow (۱,۲),(۲,۱)\in f, f^{-۱}$$

پس با توجه به آنکه $(۱,۲),(۲,۱)\in f$ هستند داریم:

$$\begin{cases} f(۱)=۲ \Rightarrow ۱+a+b=۲ \Rightarrow a+b=۱ \\ f(۲)=۱ \Rightarrow ۴+۲a+b=۱ \Rightarrow ۲a+b=-۳ \end{cases} \Rightarrow a=-۴ \Rightarrow b=۵ \Rightarrow b-a=۹$$

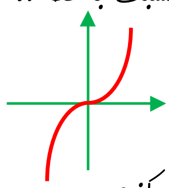
تذکر: اگر توابع $f, f^{-۱}$ در نقطه ای با مختصات (a,b) که $a\neq b$ است بر خورد داشته باشند حتماً در نقطهٔ (b,a) هم برخورد خواهند داشت یعنی:

$$\begin{cases} (a,b)\in f, f^{-۱} \\ a\neq b \end{cases} \Rightarrow (b,a)\in f, f^{-۱} \Rightarrow \begin{cases} f(a)=b \\ f(b)=a \end{cases}$$

۵۷ـ پاسخ: گزینه۳

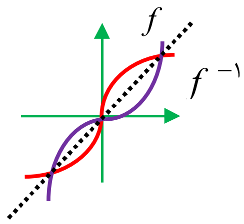
نمودار $\boldsymbol{f}$ را رسم می کنیم و بعد با قرینه کردن آن نسبت به خط $y=x$ نمودار $f^{-۱}$ را هم رسم می کنیم:

$$f(x)=x|x|=\begin{cases} x^{۲} & x\geq ۰ \\ -x^{۲} & x<۰ \end{cases} \Rightarrow$$



حالا این نمودار را نسبت به خط $y=x$ قرینه می کنیم

با توجه به شکل روبه رو گزینه (۳) صحیح است.



۵۸ــ ☜ پاسخ: گزینه۲

از مقداردهی استفاده می کنیم فقط باید توجه کنید که با توجه به ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق در تابع $\boldsymbol{f}$ $(x=۰)$ یک بار یک مقدار دلخواه بزرگتر از صفر و بار دیگر یک مقدار دلخواه وچکتر از صفر در تابع قرار می دهیم:

$$x=۱: f(۱)=۴\Rightarrow(۱,۴)\in f\Rightarrow(۴,۱)\in f^{-۱}\Rightarrow f^{-۱}(۴)=۱$$

با توجه به ضابطه $f^{-۱}$ داریم:

$$\Rightarrow ۴a+۴b=۱\quad(*)$$

$$x=-۱: f(-۱)=۳(-۱)+|-۱|=-۳+۱=-۲\Rightarrow(-۱,-۲)\in f\Rightarrow(-۲,-۱)\in f^{-۱}$$

با توجه به ضابطه $f^{-۱}$:

$$-۲a+b|-۲|=-۱\Rightarrow ۲b-۲a=-۱\quad(**)$$

از حل دستگاه معادلات (*) و (**) داریم:

$$\begin{cases} ۴a+۴b=۱ \\ ۲b-۲a=-۱ \end{cases}\xrightarrow{\times ۲}۴b-۴a=-۲\xrightarrow{\qquad}۸b=-۱\Rightarrow b=-\frac{۱}{۸}\xrightarrow{(*)}۴a+۴\left(-\frac{۱}{۸}\right)=۱$$

$$\Rightarrow ۴a-\frac{۱}{۲}=۱\Rightarrow ۴a=\frac{۳}{۲}\Rightarrow a=\frac{۳}{۸}$$

بنابراین مقدار $۲a-b$ برابر است با:

$$۲a-b=۲\left(\frac{۳}{۸}\right)-\left(-\frac{۱}{۸}\right)=\frac{۷}{۸}$$

۵۹ــ در تابع $\frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $a+d=۰$ باشد آنگاه نمودار معکوس آن بر خودش منطبق است یعنی:

$$fof(x)=fof^{-۱}(x)=x$$

$$fof(x)+f^{-۱}(x)=-۲\Rightarrow x+\frac{۲x+۱}{x-۲}=-۲\xrightarrow{x\neq ۲}x^{۲}-۲x+۲x+۱=-۲x+۴$$

$$\Rightarrow x^{۲}+۲x+۱=۴\Rightarrow(x+۱)^{۲}=۴\Rightarrow x+۱=\pm۲\Rightarrow\begin{cases} x=۱ \\ x=-۳ \end{cases}$$

۶۰ـ

$f^{-1}(۷)=x \to f(x)=۷ \to ۳x+\lfloor ۲x \rfloor=۷$

اینو که نمی شه حل کرد بریم گزینه ها رو تو تابع جاگذاری کنیم. گزینه (۴) درست از آب در می آد:

$f\left(-\frac{۴}{۳}\right)=۳\left(-\frac{۴}{۳}\right)+\left\lfloor ۲\left(-\frac{۴}{۳}\right)\right\rfloor=-۷$

۶۱ـ چون که تابع $f(x)=x^{۳}+۲x-۲$ تابعی اکیداً صعودی است اگر بخواهد معکوس خود را قطع کند روی نیمساز ربع اول و سوم قطع می کند.

$x^{۳}+۲x-۲ \Rightarrow x^{۳}+x-۲=۰ \Rightarrow (x-۱)(x^{۲}+x+۲)=۰ \Rightarrow x=۱$

دلتای پرانتز دوم منفی است. لذا معادله فقط یک ریشه دارد.

۶۲ـ برد $(fog)^{-۱}$ برابر دامنه fog است یعنی:

$R_{(fog)^{-۱}}=D_{fog}$

$D_{fog}=\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

$$\begin{cases} D_g: ۱+۲x \geq ۰ \Rightarrow x \geq -\frac{۱}{۲} \\ D_f: R \end{cases} \Rightarrow D_{fog}=\left\{x \geq -\frac{۱}{۲} \mid \underbrace{\sqrt[۴]{۱+۲x} \in R}_{\text{همواره صحیح}}\right\}=x \geq -\frac{۱}{۲}=\left[-\frac{۱}{۲},+\infty\right)$$

۶۳ـ

$$y=\frac{x+a}{\sqrt{۳}x+۱} \Rightarrow y\sqrt{۳}x+y=x+a \Rightarrow x=\frac{a-y}{\sqrt{۳}y-۱} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{a-x}{\sqrt{۳}x-۱}$$

$$fof(x)=\frac{\frac{a+x}{\sqrt{۳}x+۱}+a}{\sqrt{۳}\,\frac{a+x}{\sqrt{۳}x+۱}+a}=\frac{x+a+a\sqrt{۳}x+a}{\sqrt{۳}x+a\sqrt{۳}+\sqrt{۳}x+۱}=\frac{(a\sqrt{۳}+۱)x+۲a}{۲\sqrt{۳}x+(a\sqrt{۳}+۱)}$$

طبق فرض: $f^{-۱}(x)=fof(x) \Rightarrow \frac{(a\sqrt{۳}+۱)x+۲a}{۲\sqrt{۳}x+(a\sqrt{۳}+۱)}=\frac{a-x}{\sqrt{۳}x-۱} \xrightarrow[\text{مخرج کسر چپ بر}]{\text{با مرتب کردن و تقسیم صورت و}}$

$$\frac{a+\frac{a\sqrt{۳}+۱}{۲}x}{\sqrt{۳}x+\frac{a\sqrt{۳}+۱}{۲}}=\frac{a-x}{\sqrt{۳}x-۱} \xrightarrow{\text{دو عبارت باید با هم متحد باشند}} \frac{a\sqrt{۳}+۱}{۲}=-۱ \Rightarrow a\sqrt{۳}+۱=-۲$$

$\Rightarrow a\sqrt{۳}=-۳ \Rightarrow a=-\sqrt{۳}$

۶۴ـ $f(x)$ اکیداً صعودی است محل تلاقی با تابع معکوس روی $y=x$ قرار دارد:

$$\frac{x-۳}{۲}+۲\sqrt{x}=x \xrightarrow{\times ۲} x-۳+۴\sqrt{x}=۲x \Rightarrow ۴\sqrt{x}=x+۳ \xrightarrow{\text{به توان۲}}$$

$$۱۶x=x^{۲}+۶x+۹ \Rightarrow x^{۲}-۱۰x+۹=۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۹)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=۹ \end{cases} \Rightarrow A(۱,۱), B(۹,۹)$$

$AB=\sqrt{(۹-۱)^{۲}+(۹-۱)^{۲}}=\sqrt{۸^{۲}+۸^{۲}}=۸\sqrt{۲}$

۶۵ـ

$$\begin{cases} f(x)=[x]+\sqrt{x-[x]}=y \\ \Rightarrow [y]=[[x]+\sqrt{x-[x]}] \\ 0\le x-[x]<1 \Rightarrow 0\le \sqrt{x-[x]}<1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [y]=[x]$$

$$y=[x]+\sqrt{x-[x]} \Rightarrow y-[x] \xrightarrow{[x]=[y]} y-[y]=\sqrt{x-[x]} \Rightarrow (y-[y]^2)=x-[x]$$

هم چنین می دانیم $x=[x]+(x-[x])$ پس:

$$x=[y]+(y-[y])^2 \Rightarrow f^{-1}(x)=[x]+(x-[x])^2$$

نقطه تلاقی $f^{-1}(x)=f(x) \Rightarrow [x]+(x-[x])^2=[x]+\sqrt{x-[x]} \Rightarrow \underbrace{(x-[x])}_{t}^2=\sqrt{x-[x]}$

$$\Rightarrow t^2=\sqrt{t} \Rightarrow t^4=t \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=1 \end{cases} \xrightarrow{0\le t<1} t=0 \Rightarrow x-[x]=0 \Rightarrow x=[x] \Rightarrow x\in Z$$

۶۶ـ

$$f(g(x))=\frac{x}{x+1} \Rightarrow g(x)=x-1 \Rightarrow f(x-1)=\frac{x}{x+1} \Rightarrow f(x)=\frac{x+1}{x+2} \Rightarrow y=\frac{x+1}{x+2}$$

$$yx+2y=x+1 \Rightarrow x(y-1)=-2y+1 \Rightarrow x=\frac{1-2y}{y-1} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1-2x}{x-1}$$

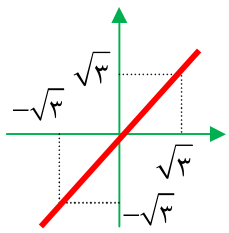
۶۷ـ

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}+\frac{1}{2\sqrt{4-x}}>0 \Rightarrow$ اکیداً صعودی است

$$D_f: 1\le x\le 4 \Rightarrow f(1)\le f(x)\le f(4) \Rightarrow -\sqrt{3}\le f(x)\le \sqrt{3} \Rightarrow D_{f^{-1}}=[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$$

از طرفی می دانیم به ازای هر x از دامنه f^{-1} داریم:

$$g(x)=fof^{-1}(x)=x$$



بنابراین برد این تابع به صورت $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$ است که شامل ۳ عدد صحیح است.

۶۸ـ

$$y=\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2+1}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow y^3=x+\sqrt{x^2+1}+x-\sqrt{x^2+1}+3\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2+1}}.\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2+1}}\,\underbrace{(\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2+1}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2+1}})}_{y}$$

$$\Rightarrow y^3=2x+3\sqrt[3]{x^2-(x^2+1)}(y) \Rightarrow y^3=2x+3\sqrt[3]{-1}(y) \Rightarrow y^3=2x-3y$$

$$\Rightarrow y^3+3y=2x \Rightarrow x=\frac{y^3+3y}{2} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x^3+3x}{2}$$

۶۹ـ ابتدا دامنه و برد $f(x)$ را پیدا می کنیم:

$$\begin{cases} x-1>0 \Rightarrow x>1 & (1) \\ \log_{\frac{3}{5}}^{x-1} \geq 0 \Rightarrow x-1 \leq 1 \Rightarrow x \leq 2 & (2) \end{cases} \xrightarrow{(1)\bigcap(2)} D_f:(1,2], R_f:[0,+\infty)$$

$$\begin{cases} D_{fof^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f = [0,+\infty) \\ D_{f^{-1}of} = D_f = (1,2] \end{cases}$$

$$D_g = D_{fof^{-1}} \bigcap D_{f^{-1}of} - \{x \in D_{f^{-1}of} \mid f^{-1}of = 0\} \Rightarrow D_g = (1,2]$$

دامنه g شامل یک عدد صحیح است.

۷۰ـ چون $x<f(x)$ بنابراین تابع $y=f(x)$ همواره بالاتر از خط $y=x$ قرار دارد بنابراین تابع معکوس $y=f^{-1}(x)$ همواره در پایین خط $y=x$ قرار می گیرد اگر $x>1$ باشد آنگاه نمودار تابع f^{-1},f هر دو در ناحیه اول قرار می گیرند، چون همواره نمودار f بالاتر از نمودار f^{-1} قرار می گیرد پس:

$$(f(x)^2) > f^{-1}(x)$$