



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

دردوین این جزوه از تجربات مؤلفین کتاب های زیر

نیز استفاده شده و در تالیف از سوالات که از نظر نگارنده

غیر قابل چشم پوشی بودند عیناً نقل گردیده است.

۱- حرف آخر (عبدالرضا منتظری)

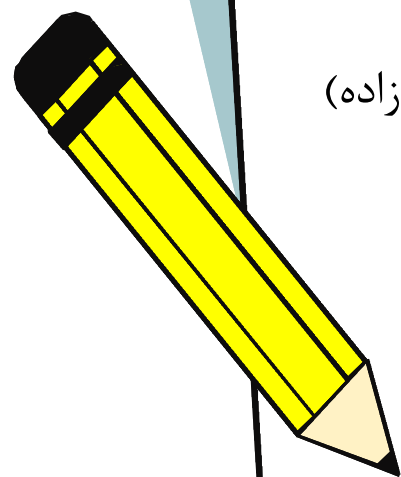
۲- دیفرانسیل تخته سیاه (مهندس مهربان)

۳- خیلی سبز (محسن منش)

۴- سه سطحی قلم چی

۵- دیفرانسیل پیشرفته ی خیلی سبز (حسین شفیع زاده)

۶- کتاب درسی ریاضی یازدهم و حسابان ۱



معادلات و نامعادلات گنگ



حل معادلات گنگ (از طریق به توان رساندن دو طرف معادله)

اگر دو طرف معادله‌ای رو توان زوج رسوندید حتماً جواب‌های به دست اومده رو در معادله‌ی اولیه چک کنید. چون که ممکنه بعضی از جواب‌های به دست اومده، زائد باشن و در معادله‌ی اولیه صدق نکنن.

$$\sqrt{5-4x} = x \xrightarrow{0^2} 5-4x = x^2 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -5 \end{cases}$$

امتحان: $\begin{cases} \sqrt{5-4x} = x \xrightarrow{x=1} 1=1 \text{ ق ق} \\ \sqrt{5-4x} = x \xrightarrow{x=-5} 5=-5 \text{ غ ق} \end{cases} \Rightarrow \text{جواب معادله } x=1$

سؤال ۱: معادله‌ی $x - 2\sqrt{x-1} = 0$

(۱) یک ریشه‌ی ساده دارد. (۲) دو ریشه‌ی متمایز دارد. (۳) ریشه‌ی حقیقی ندارد. (۴) یک ریشه‌ی مضاعف دارد.

پاسخ: گزینه (۴)

$$x = 2\sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{توان } (2)} x^2 = 4(x-1) \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

حالا $x = 2$ را تو معادله امتحان می‌کنیم: (ق.ق $2 = 2\sqrt{2-1} \Rightarrow 2 = 2$) بنابراین معادله یک ریشه دارد.

در ضمن $x = 2$ از معادله‌ی $(x-2)^2 = 0$ به دست اومده. پس $x = 2$ ریشه‌ی مضاعفه!!!

سؤال ۲: در معادله $\sqrt{9 + \sqrt{x^3 - 2x^2 + x}} = 3$ تعداد ریشه‌ها کدامست؟

(۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۳

پاسخ: گزینه (۲)

$$\sqrt{9 + \sqrt{x^3 - 2x^2 + x}} = 3 \xrightarrow{\text{توان } (2)} 9 + \sqrt{x^3 - 2x^2 + x} = 9 \Rightarrow \sqrt{x(x^2 - 2x + 1)} = 0$$

$$x(x-1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{چون } x=0 \text{ و } x=1 \text{ در معادله‌ی اولیه صدق می‌کنن پس معادله دو ریشه دارد.}$$

حل معادلات گنگ (به کمک دامنه)

سؤال ۳: معادله $\sqrt{x + \sqrt{x-2}} = \sqrt{2-x} + \sqrt{2x-2}$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \\ 2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \\ 2x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} D = \{2\} \xrightarrow{x=2 \text{ رو توی معادله قرار می‌دیم}} \sqrt{2 + \sqrt{2-2}} = \sqrt{2-2} + \sqrt{2(2)-2} \Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

بنابراین $x = 2$ تنها جواب این معادله هست، چون در معادله‌ی اولیه صدق کرد.

سؤال ۴: تعداد جواب های معادله $\sqrt{x^2+9} = 3-x^2$ چیست؟

$$\begin{cases} x^2+9 \geq 9 \Rightarrow \sqrt{x^2+9} \geq 3 \\ 3-x^2 \leq 3 \end{cases}$$

پس معادله $\sqrt{x^2+9} = 3-x^2$ فقط در صورتی جواب داره که هر دو طرف تساوی برابر با ۳ بشه. یعنی:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+9} = 3 \Rightarrow x = 0 \\ 3-x^2 = 3 \Rightarrow x = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x = 0 \text{ جواب این معادله هست.}$$

در حل معادله $f(x) = g(x)$ اگر برد f و g فقط در یک نقطه مانند L مشترک بودند، کافیه یکبار $f(x)$ و بار دیگه $g(x)$ رو مساوی L قرار بدید و جواب های این دو معادله رو به دست بیارید. اشتراک جواب های به دست اومده، جواب نهایی معادله $f(x) = g(x)$ خواهد بود.

حل معادلاتی که در آن مجموع چند عبارت نامنفی برابر صفر می شود

مجموع چند عبارت نامنفی هرگز صفر نمی شود مگر آنکه هر کدام از عبارت ها صفر شوند.

سؤال ۵: معادله $|x-1| + \sqrt{x^2-1} + (2x-2)^2 = 0$ رو حل کنید.

این معادله از ۳ تا عبارت نامنفی (بزرگتر یا مساوی صفر) تشکیل شده که جمع شون برابر صفره. این تساوی امکان نداره مگر این که هر سه عبارت با هم صفر بشن. یعنی:

$$\begin{cases} |x-1|=0 \Rightarrow x=1 \\ \sqrt{x^2-1}=0 \Rightarrow x=\pm 1 \\ (2x-2)^2=0 \Rightarrow x=1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x=1$$

سؤال ۶: $3x-2 = \sqrt{1-9x^2}$

$$\begin{cases} 3x-2 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{2}{3} \quad (1) \\ 1-9x^2 \geq 0 \rightarrow 9x^2 \leq 1 \rightarrow x^2 \leq \frac{1}{9} \rightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3} \quad (2) \end{cases} \rightarrow (1) \cap (2) = \emptyset \rightarrow \text{جوابی ندارد}$$

سؤال ۷: معادله $\sqrt{x^3+x-10} + \sqrt{x^2-3x+2} = 0$ چند جواب دارد؟

مجموع چند عبارت نامنفی صفر نمی شود مگر آنکه هر کدام صفر باشند:

$$x^2-3x-2=0 \rightarrow x=2, x=1$$

$$x=1 \rightarrow 1^2+1-10=0 \quad \times$$

$$x=2 \rightarrow 2^2+2-10=0 \quad \checkmark$$

سؤال ۸: معادله $\sqrt[3]{x^2 - 3x} - 2\sqrt{(x^2 - 3x)^2} + 1 = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

$$\sqrt{x^2 - 3x} = A \rightarrow A - 2A^2 + 1 = 0 \rightarrow -2A^2 + A + 1 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} A = 1, A = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} A = 1 \rightarrow \sqrt{x^2 - 3x} = 1 \rightarrow x^2 - 3x = 1 \rightarrow x^2 - 3x - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \text{دو ریشه حقیقی دارد} \\ A = -\frac{1}{2} \rightarrow \sqrt{x^2 - 3x} = -\frac{1}{2} \rightarrow x^2 - 3x = -\frac{1}{4} \rightarrow 4x^2 - 12x + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \text{دو ریشه حقیقی دارد} \end{cases}$$

پس این معادله ۴ ریشه حقیقی دارد.

سؤال ۹: معادله $x(x^2 - 9)\sqrt{x - 2} = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

$$x - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$$

$$\begin{cases} x = 0 \quad * \\ x^2 - 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \quad \checkmark \\ x = -3 \quad * \end{cases} \\ \sqrt{x - 2} = 0 \rightarrow x = 2 \quad \checkmark \end{cases}$$

سؤال ۱۰: معادله $(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4} + x^2 - 3x + 2 = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

$$x^2 - 4 \geq 0 \rightarrow x \geq 2 \text{ یا } x \leq -2$$

$$\begin{aligned} &\text{طرفین را بر } x - 1 \text{ تقسیم می کنیم با فرض } x \neq 1 \\ &(x + 1)(x - 1)\sqrt{x^2 - 4} + (x - 1)(x - 2) = 0 \end{aligned}$$

$$(x + 1)\sqrt{x^2 - 4} + x - 2 = 0$$

این معادله فقط به ازای $x = 2$ برقرار است (چون به ازای $x > 2$ همواره مثبت و به ازای $x \leq -2$ معادله همواره منفی است) پس معادله فقط یک ریشه دارد.

سؤال ۱۱: مجموعه جواب نامعادله $\sqrt{x - 2} + 3\sqrt{x - 1} \leq 2$ را بدست آورید؟

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq 1 \end{cases} \rightarrow x \geq 2$$

$$\rightarrow x \geq 2 \rightarrow \begin{cases} \sqrt{x - 2} \geq 0 \\ 3\sqrt{x - 1} \geq 3 \end{cases} \rightarrow \sqrt{x - 2} + 3\sqrt{x - 1} \geq 3$$

پس عبارت $\sqrt{x - 2} + 3\sqrt{x - 1}$ نمی تونه کوچکتر یا مساوی ۲ باشد پس معادله جواب ندارد.

سؤال ۱۲: معادله $x^2 + x^4 + \sqrt{x - 2} = 22 - x$ چند ریشه دارد؟

$$x - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$$

سمت چپ همواره مثبت است سمت راست هم باید همواره مثبت باشد یعنی: $22 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 22$

$$x \geq 2 \rightarrow \begin{cases} x^2 \geq 4 \\ x^4 \geq 16 \\ \sqrt{x - 2} \geq 0 \end{cases} \rightarrow x^2 + x^4 + \sqrt{x - 2} \geq 20$$

از طرفی به ازای $x \geq 2$ داریم $22 - x \leq 20$ و در نتیجه این معادله فقط به ازای $x = 2$ که طرفین تساوی مساوی ۲۰ می شود برقرار خواهد بود.

• $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1-x$

$$\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x}) \Rightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{x} = 0 \rightarrow x=1 \quad \checkmark \\ \frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1+\sqrt{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1+\sqrt{x})^2 = 1 \rightarrow 1+\sqrt{x} = \pm 1 \rightarrow \begin{cases} 1+\sqrt{x} = 1 \rightarrow \sqrt{x} = 0 \rightarrow x=0 \quad \checkmark \\ 1+\sqrt{x} = -1 \rightarrow \sqrt{x} = -2 \quad \times \end{cases}$$

• $\sqrt{3-3p} = 3 + \sqrt{3p+2}$

$$\rightarrow 3-3p = 9+3p+2+6\sqrt{3p+2}$$

$$\rightarrow -6p-8 = 6\sqrt{3p+2} \rightarrow -3p-4 = 3\sqrt{3p+2} \xrightarrow{\text{توان به ۳}} 9p^2 + 24p + 16 = 9(3p+2)$$

$$\rightarrow 9p^2 - 3p - 2 = 0 \rightarrow p = \begin{cases} \frac{2}{3} \\ p = -\frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow \text{هیچ کدام در معادله صدق نمی کنند}$$

📖 **سؤال ۱۳:** معادله $\sqrt{x^2-4}+4=x(4-x)$ چند جواب دارد.

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۱ (جواب ندارد)

$$\sqrt{x^2-4}+4=x(4-x) \Rightarrow \sqrt{x^2-4}+x^2-4x+4=0 \Rightarrow \sqrt{x^2-4}+(x-2)^2=0$$

برای آنکه مجموع دو عبارت نامنفی برابر صفر باشد باید همزمان هر دو آنها صفر باشند.

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-4}=0 \Rightarrow x = \pm 2 \\ (x-2)^2=0 \Rightarrow x = 2 \end{cases} \rightarrow \text{معادله فقط یک جواب دارد. } x = 2$$

📖 **سؤال ۱۴:** معادله $\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2-ax+a-2} = 0$ فقط یک ریشه دارد مقدار a کدام است.

۴) مقداری برای a یافت نمی شود.

۶ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

مجموع دو عبارت نامنفی صفر نمی شود مگر آنکه هر کدام از آنها صفر شوند.

$$\begin{cases} x^2-3x+2=0 \Rightarrow (x-1)(x-2)=0 \Rightarrow x=1 \text{ یا } 2 \\ x^2-ax+a-2=0 \end{cases}$$

$$x=1: \sqrt{1-a+a-2}=0 \Rightarrow \sqrt{-1}=0 \quad \text{غ ق ق}$$

$$x=2: \sqrt{4-2a+a-2}=0 \Rightarrow \sqrt{2-a}=0 \Rightarrow a=2$$

پس به ازای $a=2$ معادله دارای ریشه $x=2$ است.

📖 **سؤال ۱۵:** کدام گزاره درباره‌ی معادله $\sqrt{x^2+x+1} = \frac{14}{x^2+x+4}$ درست است.

۲) ریشه‌ی مضاعف در بازه‌ی (۰,۱) دارد.

۱) فقط یک ریشه دارد.

۴) ریشه ندارد.

۳) ریشه‌ی مثبت در بازه‌ی (۱, ۲) دارد.

$$\sqrt{x^2+x+1}=t$$

$$\sqrt{x^2+x+1}=\frac{14}{x^2+x+1+3} \Rightarrow t=\frac{14}{t^2+3} \Rightarrow t^2+3t=14 \Rightarrow t^2+3t-14=0$$

$$\Rightarrow (t-2)(t^2+3t+7)=0 \Rightarrow \begin{cases} t-2=0 \Rightarrow t=2 \\ t^2+3t+7=0 \Rightarrow \Delta=(3)^2-4(1)(7)<0 \end{cases}$$

ریشه ندارد.

$$t=2 \Rightarrow \sqrt{x^2+x+1}=2 \Rightarrow x^2+x+1=4 \Rightarrow x^2+x-3=0 \Rightarrow x=\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

چون $3 < \sqrt{13} < 4$ پس: $1 < \frac{\sqrt{13}-1}{2} < \frac{3}{2}$

یعنی ریشه‌ی مثبت معادله در بازه‌ی (۱، ۲) است.

سؤال ۱۶: معادله‌ی $\sqrt{x-1} + \frac{9}{\sqrt{x-1}+2} = 4$ چند جواب دارد.

(۴) سه

(۳) دو

(۲) یک

(۱) هیچ

$$\sqrt{x-1} + \frac{9}{\sqrt{x-1}+2} = 4 \xrightarrow{+2} \sqrt{x-1}+2 + \frac{9}{\sqrt{x-1}+2} = 6 \xrightarrow{\sqrt{x-1}+2=t} t + \frac{9}{t} = 6 \xrightarrow{\cdot t} t^2+9=6t$$

$$t^2+9=6t \Rightarrow (t-3)^2=0 \Rightarrow t=3 \Rightarrow \sqrt{x-1}+2=3 \Rightarrow \sqrt{x-1}=1 \Rightarrow x-1=1 \Rightarrow x=2$$

سؤال ۱۷: اگر $x=3$ یکی از جواب‌های معادله‌ی $|x+a|=\sqrt{25-x^2}$ باشد، جواب دیگر معادله کدام است؟

(۴) جواب دیگری ندارد.

(۳) -۴

(۲) ۴

(۱) ۴ و -۴

$x=3$ را در معادله جاگذاری می‌کنیم:

$$x=3 \Rightarrow |3+a|=\sqrt{25-3^2} \Rightarrow |3+a|=4 \Rightarrow \begin{cases} 3+a=4 \Rightarrow a=1 \\ 3+a=-4 \Rightarrow a=-7 \end{cases}$$

اگر $a=1$: $|x+1|=\sqrt{25-x^2} \xrightarrow{\text{توان } 2} x^2+2x+1=25-x^2 \Rightarrow 2x^2+2x-24=0$

$$\Rightarrow x^2+x-12=0 \Rightarrow (x+4)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-4 \end{cases}$$

اگر $a=-7$: $|x-7|=\sqrt{25-x^2} \xrightarrow{\text{توان } 2} x^2-14x+49=25-x^2 \Rightarrow 2x^2-14x+24=0$

$$\Rightarrow x^2-7x+12=0 \Rightarrow (x-3)(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=4 \end{cases}$$

پس دو مقدار ۴ و -۴ نیز ریشه‌های معادله هستند.

سؤال ۱۸: اگر $x=-1$ جواب معادله‌ی $2x - \sqrt{3x-\alpha} = -4$ باشد کدام گزینه در مورد جواب‌های دیگر معادله

صحیح است.

(۲) فقط یک جواب مثبت دارد.

(۱) فقط یک جواب منفی دارد.

(۴) جواب دیگری ندارد.

(۳) دو جواب منفی دارد.

$$x = -1 \Rightarrow -2 - \sqrt{-3 - \alpha} = -4 \Rightarrow \sqrt{-3 - \alpha} = 2 \Rightarrow -3 - \alpha = 4 \Rightarrow \alpha = -7$$

$$\Rightarrow 2x + 4 = \sqrt{3x + 7} \xrightarrow[\text{توان ۲}]{\text{طرفین به}} 4x^2 + 16x + 16 = 3x + 7 \Rightarrow 4x^2 + 13x + 9 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\frac{2x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow x \geq -2}{3x + 7 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{7}{3}} \rightarrow x = -1$$

•) $x^2 - 5x + 13 = 4\sqrt{x}$

$$\rightarrow x^2 - 5x + 13 - 4\sqrt{x} = 0$$

$$\rightarrow (x^2 - 6x + 9) + (x - 4\sqrt{x} + 4) = 0 \rightarrow (x-3)^2 + (\sqrt{x}-2)^2 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \sqrt{x} = 2 \rightarrow x = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشک ترا}} \varnothing$$

•) $\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 4\sqrt{\frac{x}{x+3}} = 4$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{x+3}{x}} + 4\sqrt{\frac{x}{x+3}} - 4 = 0 \rightarrow \sqrt{\frac{x+3}{x}} = u \rightarrow u + \frac{4}{u} - 4 = 0 \xrightarrow{\times u} u^2 + 4 - 4u = 0 \rightarrow (u-2)^2 = 0 \rightarrow u = 2$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{x+3}{x}} = 2 \rightarrow \frac{x+3}{x} = 4 \rightarrow x+3 = 4x \rightarrow 3x = 3 \rightarrow x = 1$$

•) $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{8}$

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases} \rightarrow 0 < x < 1$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} + \frac{2}{\sqrt{x(1-x)}} = 8 \rightarrow \frac{1-x+x}{x(1-x)} + \frac{2}{\sqrt{x(1-x)}} = 8$$

$$\rightarrow \frac{1}{x(1-x)} + 2 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} + 1 = 9 \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} + 1 \right)^2 = 9$$

$$\rightarrow (y+1)^2 = 9 \rightarrow \begin{cases} y+1 = 3 \rightarrow y = 2 \\ y+1 = -3 \rightarrow y = -4 \end{cases} \times \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} = 2$$

$$\rightarrow \sqrt{x(1-x)} = \frac{1}{2} \rightarrow x(1-x) = \frac{1}{4} \rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \rightarrow \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

•) $x + \sqrt{x^2 - x\sqrt{8} + 2} = \sqrt{2}$

$x + \sqrt{(x - \sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$

$|u| = -u \Rightarrow u \leq 0$

$x + |x - \sqrt{2}| = \sqrt{2}$

$|x - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - x \Rightarrow x - \sqrt{2} \leq 0 \Rightarrow x \leq \sqrt{2}$

سؤال ۱۹: جواب معادله‌ی $\sqrt{x+2} \geq x-4$ بازه‌ی $[a, b]$ است مقدار $b+a$ برابر کدام است.

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

$x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

$x - 4 < 0 \Rightarrow \sqrt{x+2} \geq x-4 \Rightarrow -2 \leq x < 4$ (۱)
همواره برقرار است
منفی نامنفی

اگر $x - 4 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+2} \geq x-4 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x+2 \geq x^2 - 8x + 16 \Rightarrow x^2 - 9x + 14 \leq 0$

$\Rightarrow (x-2)(x-7) \leq 0 \Rightarrow 2 \leq x \leq 7 \xrightarrow{x \geq 4} 4 \leq x \leq 7$ (۲)

$\Rightarrow (1) \cup (2) \Rightarrow \underbrace{-2}_{a} \leq x \leq \underbrace{7}_{b} \Rightarrow a+b = -2+7 = 5$

سؤال ۲۰: جواب نامعادله‌ی $x \leq 1 + 2\sqrt{x}$ به صورت $[0, \alpha]$ می باشد کدام عدد زیر گویا است.

$(\alpha+1)^2$ (۴)

$(\alpha-1)^2$ (۳)

$(\alpha-3)^2$ (۲)

$(\alpha-2)^2$ (۱)

$x \leq 1 + 2\sqrt{x} \Rightarrow x - 2\sqrt{x} \leq 1 \Rightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 \leq 2 \Rightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 \leq 2$

$\Rightarrow |\sqrt{x} - 1| \leq \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} \leq \sqrt{x} - 1 \leq \sqrt{2} \Rightarrow 1 - \sqrt{2} \leq \sqrt{x} \leq 1 + \sqrt{2}$
همواره برقرار است

$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq 1 + \sqrt{2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 0 \leq x \leq 3 + 2\sqrt{2}$

پس اگر $\alpha = 3 + 2\sqrt{2}$ آنگاه $(\alpha - 3)^2 = 8$ پس $(\alpha - 3)^2$ گویاست.

سؤال ۲۱: مجموعه جواب نامعادله‌ی $x + 3\sqrt{-x} + 18 > 0$ شامل چند عدد صحیح است.

۳۶ (۴)

۳۵ (۳)

۱۸ (۲)

۱۷ (۱)

$\sqrt{-x} = u \Rightarrow x = -u^2$

$\Rightarrow -u^2 + 3u + 18 > 0 \Rightarrow u^2 - 3u - 18 < 0 \Rightarrow (u-6)(u+3) < 0 \Rightarrow -3 < u < 6$

$\Rightarrow \underbrace{-3 < \sqrt{-x}}_{\text{همواره درست}} < 6 \Rightarrow \sqrt{-x} < 6 \Rightarrow -x < 36 \Rightarrow x > -36 \xrightarrow[\substack{x \in \mathbb{Z} \\ x < 0}]{}$ $x \in \{-35, -34, \dots, -1\}$

سؤال ۲۲: مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{2x+3}{\sqrt{-x}} \geq 1$ به صورت $[a, b]$ باشد حاصل $b-a$ کدام است.

۲ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

$\frac{9}{2}$ (۲)

۱ (۱)

فرض می کنیم $\sqrt{-x} = u$ باشد بنابراین $x = -u^2$ داریم:

$$\frac{2x+3}{\sqrt{-x}} \geq 1 \Rightarrow \frac{-2u^2+3}{u} \geq 1 \xrightarrow{u>0} -2u^2+3 \geq u \Rightarrow 2u^2+u-3 \leq 0$$

$$\Rightarrow (u-1)(2u+3) \leq 0 \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq u \leq 1 \xrightarrow{u>0} 0 < u \leq 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{-x} \leq 1 \Rightarrow 0 < -x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x < 0$$

$$\Rightarrow x \in [-1, 0) \Rightarrow b-a = 0 - (-1) = 1$$

سؤال ۱۳: معادله $|x-2\sqrt{x}| - 3 < 0$ چند جواب در مجموعه اعداد صحیح دارد.

- ۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴)

$$|x-2\sqrt{x}| < 3 \Rightarrow -3 < x-2\sqrt{x} < 3 \xrightarrow{+1} -2 < x-2\sqrt{x}+1 < 4$$

$$\Rightarrow \underbrace{-2 < (\sqrt{x}-1)^2 < 4}_{\text{همواره درست}} \Rightarrow (\sqrt{x}-1)^2 < 4 \Rightarrow |\sqrt{x}-1| < 2 \Rightarrow -2 < \sqrt{x}-1 < 2$$

$$\Rightarrow \underbrace{-1 < \sqrt{x} < 3}_{\text{همواره درست}} \Rightarrow \sqrt{x} < 3 \Rightarrow \sqrt{x} < 3 \Rightarrow 0 \leq x < 9 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 8\}$$

سؤال ۱۴: اگر $x = 1 + \sqrt[3]{2}$ حاصل عبارت $A = \frac{(1+\sqrt{2})^{x^2-2x^2}}{(\sqrt{2}-1)^{2x-1}}$ کدام است. (سه سطحی قلم چی)

- ۱ (۱) $1 + \sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{2}-1$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴)

$$\boxed{\sqrt{2}-1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}}$$

$$\Rightarrow A = \left((1+\sqrt{2})^{x^2-2x^2} \cdot (\sqrt{2}+1)^{2x-1} \right)^{\frac{1}{2}} = \left((1+\sqrt{2})^{x^2-2x^2+2x-1} \right)^{\frac{1}{2}} = \left((1+\sqrt{2})^{(x-1)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\xrightarrow{x=1+\sqrt{2} \Rightarrow (x-1)^2=2} A = \left((1+\sqrt{2})^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sqrt{2}$$

سؤال ۱۵: اگر مجموعه جواب نامعادله $\sqrt{3x+4} > 2|x-1| - x$ بازه (a, b) باشد، طول وسط بازه کدام است؟

- $\frac{5}{2}$ (۱) ۳ (۲) $\frac{7}{2}$ (۳) ۴ (۴) (داخل ریاضی ۹۵)

راه اول (حالت اول) اگر $x \geq 1$ باشد:

$$\sqrt{3x+4} > 2(x-1) - x \Rightarrow \sqrt{3x+4} > x-2 \xrightarrow{\text{به توان ۲}}$$

$$3x+4 > x^2-4x+4 \Rightarrow x^2-7x < 0 \Rightarrow 0 < x < 7 \xrightarrow{x \geq 1} \boxed{1 < x < 7} \quad (1)$$

حالت دوم (اگر $x < 1$ باشد):

$$\sqrt{3x+4} > -2(x-1) - x \Rightarrow \sqrt{3x+4} > -3x+2 \xrightarrow{\text{به توان ۲}}$$

$$3x+4 > 9x^2-12x+4 \Rightarrow 9x^2-15x < 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{5}{3} \xrightarrow{x < 1} \boxed{0 < x < 1} \quad (2)$$

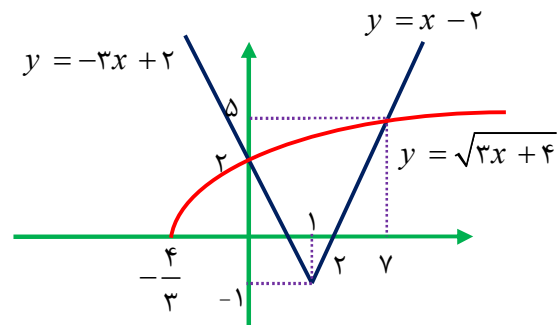
$$(1) \cup (2) \Rightarrow 0 < x < 7 \Rightarrow x = 3/5 \text{ وسط بازه}$$

راه دوم) به کمک روش هندسی سعی می کنیم جواب نامعادله را به دست آوریم. ابتدا نمودار توابع $f(x) = \sqrt{3x+4}$ و $g(x) = 2|x-1|-x$ را رسم می کنیم.

$$g(x) = 2|x-1|-x = \begin{cases} 2(x-1)-x & x \geq 1 \\ -2(x-1)-x & x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} x-2 & x \geq 1 \\ -3x+2 & x < 1 \end{cases}$$

x	\circ	γ	x	\circ	γ
$f(x)$	2	5	$g(x)$	2	5



با توجه به شکل دو تابع در نقاط به طول های صفر و ۷ متقاطع و در بازه $(0, 7)$ نمودار تابع $y = \sqrt{3x+4}$ بالاتر از نمودار تابع $y = 2|x-1|-x$ است. پس $a=0, b=7$ است و $\frac{a+b}{2} = \frac{\gamma}{2}$.

سؤال ۲۶: در کدام بازه از مقادیر x نمودار تابع $y = \sqrt{5+4x-x^2}$ در بالای نمودار $y = |x-3|+2$ قرار دارد.

- (۱) $(\frac{3-\sqrt{17}}{2}, 5)$ (۲) $(2, \frac{3+\sqrt{17}}{2})$ (سراسری ریاضی ۹۳)
- (۳) $(2, \frac{4+\sqrt{15}}{2})$ (۴) $(2, 2+\sqrt{15})$

دامنه رادیکال $\frac{-x^2+4x+5 \geq 0}{-1 \leq x \leq 5}$

$$\sqrt{5+4x-x^2} > |x-3|+2$$

$|x-3|$ را باید یک بار برای $x \geq 3$ بشکنیم پس باید نامساوی بالا را یک بار در بازه $3 \leq x \leq 5$ و یک بار برای بازه $-1 \leq x \leq 3$ حل کنیم:

$$\begin{aligned} -1 \leq x \leq 3: \sqrt{5+4x-x^2} > -x+3+2 &\Rightarrow \sqrt{5+4x-x^2} > -x+5 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \\ \Rightarrow 5+4x-x^2 > x^2-10x+25 &\Rightarrow 2x^2-14x+20 < 0 \Rightarrow x^2-7x+10 < 0 \\ \Rightarrow (x-2)(x-5) < 0 &\Rightarrow \frac{2}{+} \quad \frac{5}{-} \quad \frac{+}{+} \Rightarrow 2 < x < 5 \xrightarrow{-1 \leq x \leq 3} 2 < x \leq 3 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} 3 \leq x \leq 5: \sqrt{5+4x-x^2} > x-3+2 &\Rightarrow \sqrt{5+4x-x^2} > x-1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \\ \Rightarrow 5+4x-x^2 > x^2-2x+1 &\Rightarrow 2x^2-6x-4 < 0 \Rightarrow x^2-3x-2 < 0 \\ \Rightarrow \frac{3-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{17}}{2} &\xrightarrow{3 \leq x \leq 5} 3 \leq x < \frac{3+\sqrt{17}}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

گزینه (۲) درست است. $\xrightarrow{(1) \cup (2)} 2 < x < \frac{3+\sqrt{17}}{2}$

سؤال ۲۷: اگر برای هر x در بازه (a, b) نامساوی $\sqrt{20-x^2} > |x-1| + 1$ برقرار باشد بیشترین مقدار $b-a$

کدام است؟



$\sqrt{10} + 2$ (۴)

$\sqrt{10} + 1$ (۳)

$2\sqrt{2} + 2$ (۲)

$2\sqrt{2} + 1$ (۱)

ابتدا دامنه را تعیین می کنیم $x \in [-\sqrt{20}, \sqrt{20}]$ سپس قدرمطلق را تعیین علامت می کنیم:
به توان ۲

$x \geq 1: \sqrt{20-x^2} > (x-1)+1 \Rightarrow \sqrt{20-x^2} > x \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 20-x^2 > x^2$

$\Rightarrow x^2 < 10 \Rightarrow -\sqrt{10} < x < \sqrt{10} \xrightarrow{x \geq 1} 1 \leq x < \sqrt{10}$ (۱)

$x \leq 1: \sqrt{20-x^2} > -(x-1)+1 \Rightarrow \sqrt{20-x^2} > -x+2 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 20-x^2 > x^2-4x+4$

$\Rightarrow 2x^2-4x-16 < 0 \Rightarrow x^2-2x-8 < 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) < 0 \Rightarrow -2 < x < 4 \xrightarrow{x \leq 1} -2 < x \leq 1$ (۲)

$\xrightarrow{(1) \cup (2)} -2 < x < \sqrt{10} \Rightarrow b-a = \sqrt{10} + 2$



سؤال ۲۸: در کدام بازه نمودار تابع $y = \sqrt{-x^2+2x+3}$ زیر منحنی $y = |x+1| - 2$ می باشد.

$(1, 1+\sqrt{3})$ (۴)

$(1, 1+\sqrt{2})$ (۳)

$(1-\sqrt{3}, 3)$ (۲)

$(1+\sqrt{2}, 3)$ (۱)

ابتدا دامنه را بررسی می کنیم:

$\sqrt{-x^2+2x+3} < |x+1| - 2$

$-\sqrt{-x^2+2x+3} \geq 0 \Rightarrow x^2-2x-3 \leq 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3$ (۱)

$|x+1| - 2 > 0 \Rightarrow |x+1| > 2 \Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -3$ (۲)

$\xrightarrow{(1) \cap (2)} -1 < x \leq 3$

$\sqrt{-x^2+2x+3} < |x+1| - 2 \xrightarrow{-1 < x < 3} \sqrt{-x^2+2x+3} < x+1-2$

$\Rightarrow \sqrt{-x^2+2x+3} < x-1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} -x^2+2x+3 < x^2-2x+1 \Rightarrow 2x^2-4x-2 > 0 \Rightarrow x^2-2x-1 > 0$

$\begin{cases} x > 1 + \sqrt{2} \\ \text{یا} \\ x < 1 - \sqrt{2} \end{cases} \xrightarrow{-1 < x < 3} 1 + \sqrt{2} < x \leq 3$

$x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{1} = 1 \pm \sqrt{2}$

• $3\sqrt{x-3} + 7\sqrt{x+7} = 20$

$\rightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x+7 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq -7 \end{cases} \rightarrow x \geq 3$

پس معادله جواب ندارد. $3\sqrt{x-3} + 7\sqrt{x+7} \geq 3\sqrt{3-3} + 7\sqrt{3+7} = 7\sqrt{10} \geq 20$

سؤال ۲۹: به ازای چه مقادیری از m خط $y = mx$ نمودار $y = m + \sqrt{x-1}$ را در دو نقطه قطع می کند.

$m < 0$ (۴)

$0 < m < 1$ (۳)

$m > 0$ (۲)

$m > 1$ (۱)

$m + \sqrt{x-1} = mx \Rightarrow \sqrt{x-1} = mx - m \Rightarrow \sqrt{x-1} = m(x-1)$

به ازای $x = 1$ معادله‌ی فوق (مستقل از m) برقرار می شود پس طول یکی از نقاط تقاطع برابر $x = 1$ است. با فرض $x > 1$ داریم:

$$\sqrt{x-1} = m(x-1) \xrightarrow{x>1} m = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow \sqrt{x-1} = \frac{1}{m}$$

$$\xrightarrow{x>1 \Rightarrow \sqrt{x-1}>0} \frac{1}{m} > 0 \Rightarrow m > 0$$

سؤال ۱۳۰: برای چه مقادیری از a معادله $ax - \sqrt{x-3} = 3a$ دو جواب دارد.

- (۱) $a > 1$ (۲) $a > 0$ (۳) $0 < a < 1$ (۴) $a < 1$

$$ax - 3a = \sqrt{x-3} \xrightarrow{x \geq 3}$$

$x = 3$ حتماً یکی از جواب های معادله فوق است پس:

شرط وجود جواب

$$a(x-3) = \sqrt{x-3} \xrightarrow{x \neq 3} a\sqrt{x-3} = 1 \Rightarrow \sqrt{x-3} = \frac{1}{a} \rightarrow a > 0$$

$$\boxed{\sqrt{x-3} = \frac{1}{a} \Rightarrow x-3 = \frac{1}{a^2} \Rightarrow x = 3 + \frac{1}{a^2} \neq 3 \Rightarrow x \neq 3}$$

سؤال ۱۳۱: ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $\sqrt[3]{20+14x} + \sqrt[3]{20-14x} = 4$ کدام است. (اختیاری)

- (۱) ۱۲ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) ۲

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)}$$

$$\sqrt[3]{20+14x} + \sqrt[3]{20-14x} = 4 \xrightarrow{\text{به توان } 3} a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = 64$$

$$\Rightarrow 20+14x + 20-14x + 3ab(4) = 64 \Rightarrow 12ab = 24 \Rightarrow ab = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{(20+14x)(20-14x)} = 2 \Rightarrow 20^2 - (14x)^2 = 8 \Rightarrow 4^2 \times 5^2 - 2^2 \times 7^2 \times x^2 = 8$$

$$\Rightarrow 49x^2 = 4 \times 5^2 - 2 = 98 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \xrightarrow{\text{ریشه مثبت}} x = \sqrt{2}$$

سؤال ۱۳۲: در معادله‌ی $\sqrt{x} + \sqrt{2x-3} = \sqrt{12(x-1)}$ مجموع ریشه‌ها برابر کدام است. (اختیاری)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

طرفین را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$x + (2x-3) + 3\sqrt{x} \cdot \sqrt{2x-3} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{2x-3}) = 12(x-1)$$

$$\Rightarrow 3(x-1) + 3\sqrt{x(2x-3)(12(x-1))} = 12(x-1) \Rightarrow \sqrt{x(2x-3)(12(x-1))} = 3(x-1)$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 3} 12x(2x-3)(x-1) = 27(x-1)^3$$

یکی از ریشه‌ها $x = 1$ است با فرض $x \neq 1$ ، $(x-1)$ را از طرفین حذف می‌کنیم:

$$\Rightarrow 12x(2x-3) = 27(x-1)^2 \Rightarrow 4(2x^2-3x) = 9(x^2-2x+1) \Rightarrow x^2-6x+9=0$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 = (x-1) \Rightarrow x = 3$$

پس $x = 1$ و $x = 3$ ریشه‌های معادله هستند یعنی مجموع ریشه‌ها: $x_1 + x_2 = 1 + 3 = 4$

• $\sqrt{x-3} + \sqrt{8-2x} = x-5$

$$\rightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 8-2x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 4 \end{cases} \rightarrow 3 \leq x \leq 4$$

$$\rightarrow -2 \leq x-5 \leq -1$$

سمت چپ مثبت، سمت راست منفی پس جواب معادله \emptyset است.

• $x^2 + 3 - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = \frac{3}{2}(x+1)$

$$\rightarrow 2x^2 + 6 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 3x + 3 \rightarrow (2x^2 - 3x + 2) - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2} + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = u} (u-1)^2 = 0 \rightarrow u = 1 \rightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 1 \rightarrow 2x^2 - 3x + 2 = 1$$

$$\rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

• $x^2 - 4x\sqrt{x+1} + 8x - 8\sqrt{x+1} + 12 = 0$

$$\rightarrow (x^2 - 4x\sqrt{x+1} + 4(x+1)) + (4x - 8\sqrt{x+1} + 4) + 4 = 0$$

$$\rightarrow (x - 2\sqrt{x+1})^2 + 4(x - 2\sqrt{x+1} + 1) + 4 = 0 \rightarrow$$

$$\xrightarrow{x - 2\sqrt{x+1} = u} u^2 + 4u + 4 = 0$$

$$\rightarrow (u+2)^2 = 0 \rightarrow u = -2 \rightarrow x - 2\sqrt{x+1} = -2 \rightarrow x+2 = 2\sqrt{x+1}$$

$$\rightarrow x^2 + 4x + 4 = 4x + 4 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

• $\sqrt{5 + \sqrt{x} + 2\sqrt{4 + \sqrt{x}}} + \sqrt{8 + \sqrt{x} - 4\sqrt{4 + \sqrt{x}}} = 7$

$$= \sqrt{(4 + \sqrt{x}) + 2\sqrt{4 + \sqrt{x} + 1}} + \sqrt{(4 + \sqrt{x}) - 4\sqrt{4 + \sqrt{x} + 4}} = 7$$

$$= \sqrt{(\sqrt{4 + \sqrt{x} + 1})^2} + \sqrt{(\sqrt{4 + \sqrt{x} - 2})^2} = 7$$

$$= \underbrace{|\sqrt{4 + \sqrt{x} + 1}|}_{\text{مثبت}} + \underbrace{|\sqrt{4 + \sqrt{x} - 2}|}_{\text{مثبت}} = 7$$

$$= \sqrt{4 + \sqrt{x} + 1} + \sqrt{4 + \sqrt{x} - 2} = 7$$

$$= 2\sqrt{4 + \sqrt{x}} = 8 \rightarrow \sqrt{4 + \sqrt{x}} = 4 \rightarrow 4 + \sqrt{x} = 16 \rightarrow \sqrt{x} = 12 \rightarrow x = 144$$

📖 **سؤال ۳۳:** اگر $a > 1$ و مجموعه‌ی جواب نامعادله $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-a} \leq 3$ بازه‌ی a به طول ۱ باشد، مقدار a کدام است.

۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) (ویژه تیزهوشان)

چون تابع $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-a}$ جمع دو تابع اکیداً صعودی است بنابراین اکیداً صعودی است.

پس جواب نامعادله $f(x) \leq 3$ در واقع از a تا جایی است که $f(a) = 3$ باشد چون طول بازه‌ی $\alpha - a = 1$ است پس: $\alpha = a + 1$

در نتیجه: $f(\alpha) = f(a+1) = 3$

$$\Rightarrow \sqrt{(a+1)-1} + \sqrt{(a+1)-a} = 3 \Rightarrow \sqrt{a} + 1 = 3 \Rightarrow \sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4$$

سؤال ۳۴: معادله $\frac{\sqrt{x^2 - 4x}}{x - 2} = k$ به ازای چه مقادیری از k دارای یک ریشه مثبت است؟ (آزاد ۹۱)

ریشه مثبت یعنی $x > 0$

$$\text{دامنه} \begin{cases} x^2 - 4x \geq 0 \rightarrow x \geq 4 \cup x \leq 0 \\ \rightarrow x \neq 2 \end{cases} \xrightarrow{x > 0} \begin{cases} x \geq 4 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

به ازای $x \geq 4$ حاصل $\frac{\sqrt{x^2 - 4x}}{x - 2}$ همواره نامنفی خواهد بود پس $k \geq 0$

$$\frac{\sqrt{x^2 - 4x}}{x - 2} = k \xrightarrow{\text{توان } 2} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 4} = k^2 \rightarrow \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 4} = k^2$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج از صورت بزرگ تر است}} k^2 < 1 \rightarrow -1 < k < 1 \xrightarrow{k \geq 0} 0 \leq k < 1$$

سؤال ۳۵: در معادله $\sqrt{3 + \sqrt{x - x^2}} = \sqrt{3}$ مجموع ریشه ها چقدر است؟

$$3 + \sqrt{x - x^2} = 3 \rightarrow \sqrt{x - x^2} = 0$$

$$\rightarrow x(1 - x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

•) $2 + \sqrt{1+x} = \sqrt{x}$
 $\rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{1+x} = 2$

سمت چپ همواره منفی است. در صورتی که سمت راست عددی مثبت است پس معادله فوق جواب ندارد.

•) $\left| x - \frac{1}{2} \right| - |x| = \sqrt{x^2 - x + 1} + 1$

$$\rightarrow \left| x - \frac{1}{2} \right| - \sqrt{x^2 - x + 1} = 1 + |x|$$

$$\rightarrow \underbrace{\sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}} - \sqrt{x^2 - x + 1}}_{< 0} = \underbrace{1 + |x|}_{> 1}$$

پس جواب معادله \emptyset است.

سؤال ۳۶: معادله $\sqrt{1 + \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1$ چند ریشه دارد.

(۴ بی شمار

(۳ صفر

(۲

(۱

$$\text{دامنه: } \begin{cases} x^4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2(x-1)(x+1) \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$\frac{-1}{+} \quad \frac{0}{-} \quad \frac{1}{-} \quad \frac{+}{+} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases} \quad (1)$$

$(1) \cap (2) \rightarrow x \geq 1$

$\sqrt{1 + \sqrt{x^2 - x^2}} = x - 1 \Rightarrow \sqrt{1 + |x| \sqrt{x^2 - 1}} = x - 1 \xrightarrow{x \geq 1} \text{به توان دو}$

$1 + x\sqrt{x^2 - 1} = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x\sqrt{x^2 - 1} = x(x - 2) \xrightarrow{x \neq 0} \sqrt{x^2 - 1} = x - 2 \xrightarrow{x \geq 2} \text{به توان دو}$

$x^2 - 1 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow 4x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$ غ ق ق

زیرا باید $x \geq 2$ باشد پس معادله ریشه ندارد.

•) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2\sqrt{xy} \\ x + y = 20 \end{cases} \rightarrow \text{xy را بدست آورید}$

$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 2\sqrt{xy} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x + y - 2\sqrt{xy} = 4xy \xrightarrow{x+y=20}$

$\rightarrow 20 - 2\sqrt{xy} = 4xy \rightarrow 10 - \sqrt{xy} = 2xy \quad \sqrt{xy} = u$

$\rightarrow 10 - u = 2u^2 \rightarrow 2u^2 + u - 10 = 0 \rightarrow (2u + 5)(u - 2) = 0$

$\rightarrow \begin{cases} u = -\frac{5}{2} \times \\ u = 2 \end{cases} \rightarrow \sqrt{xy} = 2 \rightarrow xy = 4$

سؤال ۳۷: معادله $2x^2 - 6x = 1 + \sqrt{4x + 5}$ را حل کنید. (ویژه دانش آموزان باهوشم)

$2x^2 - 6x = 1 + \sqrt{4x + 5} \Rightarrow 2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x + 5} \xrightarrow{\times 2} \Rightarrow 4x^2 - 12x - 2 = 2\sqrt{4x + 5}$

به طرفین تساوی $(4x + 5) + 1$ اضافه می کنیم:

$4x^2 - 12x - 2 + (4x + 5) + 1 = (4x + 5) + 2\sqrt{4x + 5} + 1$

$\Rightarrow 4x^2 - 8x + 4 = (\sqrt{4x + 5} + 1)^2 \Rightarrow 4(x^2 - 2x + 1) = (\sqrt{4x + 5} + 1)^2$

$\Rightarrow 4(x - 1)^2 = (\sqrt{4x + 5} + 1)^2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{4x + 5} + 1 = 2(x - 1) \Rightarrow \sqrt{4x + 5} = 2x - 3 \\ \text{یا} \\ \sqrt{4x + 5} + 1 = -2(x - 1) \Rightarrow \sqrt{4x + 5} = -2x + 1 \end{cases}$

۱) $\sqrt{4x + 5} = 2x - 3 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4x + 5 = 4x^2 - 12x + 9 \Rightarrow 4x^2 - 16x + 4 = 0$
 $x \geq \frac{3}{2}$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{3} \xrightarrow{x \geq \frac{3}{2}} x = 2 + \sqrt{3}$

پس تنها جواب $x = 2 + \sqrt{3}$ است.

۲) $\sqrt{4x + 5} = -2x + 1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4x + 5 = 4x^2 - 4x + 1 \Rightarrow 4x^2 - 8x - 4 = 0$
 $x \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2} \xrightarrow{x \leq \frac{1}{2}} x = 1 - \sqrt{2}$

پس $x = 2 + \sqrt{3}$ و $1 - \sqrt{2}$ جواب معادله هستند.

راه دوم

بجه توان ۳

• $\sqrt{x^2 - 2\sqrt{x} - 5} + \sqrt{x} = 1$

$\xrightarrow{x \geq 0} \sqrt{x^2 - 2\sqrt{x} - 5} = 1 - \sqrt{x} \rightarrow x^2 - 2\sqrt{x} - 5 = 1 - 2\sqrt{x} + x \rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$\rightarrow (x+2)(x-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$

• $x^x + \sqrt{|x| - 2} = 24 - 2x^x$

$\rightarrow |x| - 2 \geq 0 \rightarrow |x| \geq 2 \rightarrow x^x \geq 4, x^x \geq 16$

$\rightarrow \begin{cases} x^x \geq 16 \\ \sqrt{|x| - 2} \geq 0 \end{cases} \rightarrow x^x + \sqrt{|x| - 2} \geq 16$

$x^x \geq 4 \rightarrow 2x^x \geq 8 \rightarrow -2x^x \leq -8 \rightarrow 24 - 2x^x \leq 24 - 8 = 16$

سمت چپ بزرگتر یا مساوی ۱۶ است و سمت راست کوچکتر یا مساوی ۱۶ است. بنابراین فقط زمانی جواب داریم که هر دو برابر ۱۶ باشند.

$24 - 2x^x = 16 \rightarrow 2x^x = 8 \rightarrow x^x = 4 \rightarrow x = \pm 2$

📖 **سؤال ۳۹:** معادله $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$ دارای چند ریشهی صحیح است.

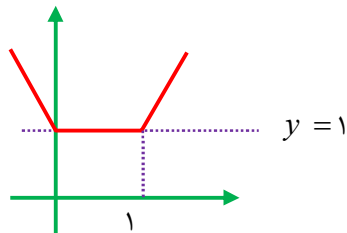
۴ (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) بی شمار (تقدیم به دانش آموزان باهوشم)

$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$

$\Rightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1})^2 + (2)^2 - 2 \times 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{(\sqrt{x-1})^2 + (3)^2 - 2 \times 3\sqrt{x-1}} = 1$

$\Rightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = 1 \Rightarrow |\sqrt{x-1}-2| + |\sqrt{x-1}-3| = 1$

با فرض $\sqrt{x-1}-2 = A$ داریم: $|A| + |A-1| = 1$



طبق نمودار زمانی $|A| + |A-1|$ برابر ۱ می شود که A در فاصله $[0, 1]$ قرار گیرد بنابراین:

$0 \leq A \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x-1}-2 \leq 1 \xrightarrow{+2} 2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3 \Rightarrow 4 \leq x-1 \leq 9 \Rightarrow 5 \leq x \leq 10$

در این بازه، ۶ عدد صحیح وجود دارد.

📖 **سؤال ۴۰:** معادله $\sqrt{2x+4} + \sqrt{1-x} = \sqrt{2(x+3)}$ چند جواب صحیح دارد.

۱ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۴ (۴) صفر

$\begin{cases} 2x+4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \\ 1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow -2 \leq x \leq 1$

مجموعه‌ی اعداد صحیح واقع در دامنه‌ی متغیر معادله $\{-2, -1, 0, 1\}$ است که در بین آنها فقط $x = -1$ در معادله صدق می کند.

نامعادلہ

دنیا به این بزرگی و سهم من این اتاق
یعنی خدای ما و شما فرق می کند.
من توی غصه های خودم غوطه می خورم
شادی تو را درون خودش غرق می کند

لبریزم از نیاز کسی را صدا زدن
اما بدون حنجره... باید سکوت کرد
تنهاتر از همیشه تو را بغض می کند
مردی کنار پنجره... باید سکوت کرد

گفتی بهار می رسد و تازه می شوی
مرداد شد، هنوز که سگ لرزه می زخم
پروانه می شوند همه ی کرم های خاک
من تازه دور لاشه ی خود تار می تنم

گفتم مرا به خاطر هایت گره نزن
گفتی نترس زود فراموش می کنی
گفتم: چراغ خانه... و دیدم که خانه را
در عرض چند ثانیه خاموش می کنی

لعنت به من به شعر به این واژه های سرد
از مثنوی، قصیده، غزل درد می چکد
امشب تمام قافیه ها سرد و نکبتند
از روی شعر من عرق سرد می چکد

عادت نمی کنم به نبودنت به رفتنت
هرگز به نامعادله عادت نمی کنم
این بار می بری... به قلب نیاز نیست
من توی این مسابقه شرکت نمی کنم.

«نوید دانایی هوشیار»