



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

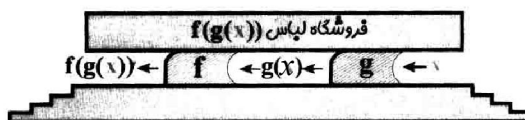
ترکیب دو تابع و دامنه $f \circ g$ و $g \circ f$



ترکیب دو تابع:

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$



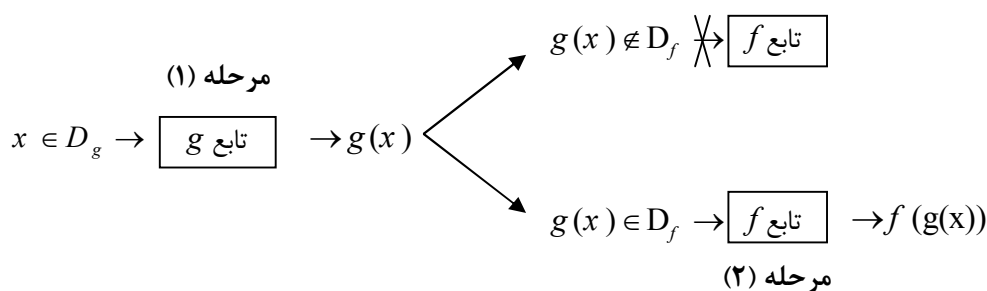
اگر کمی دقت کنید می بینید که x اجازه‌ی عبور از g رو نداشت ($x \notin D_g$)

اگر کمی دقت کنید می بینید که ($x \in D_g, g(x) \notin D_f$) ($x \notin D_g$)

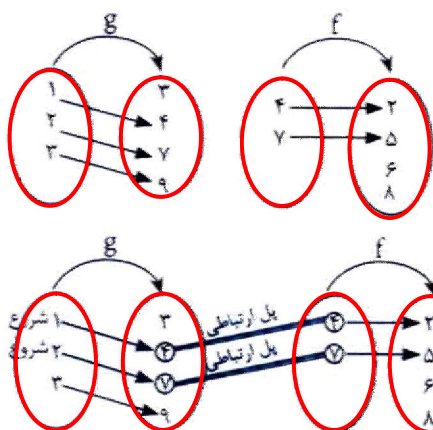
از داستان بالا می‌شد فهمید که باید ۲ مرحله طی بشه تا تابع $f(g(x))$ تشکیل بشه:

مرحله ۱) باید x هایی که اجازه عبور از g رو دارن ($x \in D_g$) وارد تابع g کنیم تا $g(x)$ ها خارج بشن.

مرحله ۲) در بین $g(x)$ های خارج شده، اون $g(x)$ هایی که اجازه‌ی عبور از f رو دارن $g(x) \in D_f$ وارد تابع f کنیم تا $f(g(x))$ خارج بشه.



سؤال: اگر توابع f و g به شکل روبرو باشند، $f(g(x))$ را بدست آورید.



با توجه به توضیحات داده شده همیشه تابع $f(g(x))$ رو اینجوری مشخص کرد:

$$f(g(x)) = \{(1, 2), (2, 5)\}$$

سؤال ۲: اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (0, 3), (4, -1)\}$ و $g = \{(2, 3), (-1, 4), (4, 1), (3, 0)\}$ باشد تابع $g \circ f^{-1}$ کدامست؟

(۱) $\{(1, 3), (0, 0)\}$ (۲) $\{(2, 4), (3, 5)\}$ (۳) $\{(2, 0), (-1, 4)\}$ (۴) $\{(5, 3), (-1, 1)\}$

پاسخ: گزینه (۴)

بچه‌ها! برای تشکیل تابع $g(f^{-1}(x))$ باید از دامنه f^{-1} شروع کنید، یعنی:

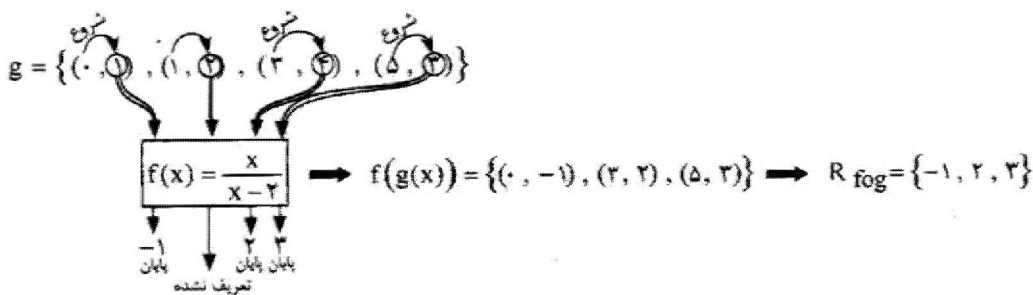
$$f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (3, 0), (-1, 4)\} \rightarrow g(f^{-1}(x)) = \{(5, 3), (-1, 1)\}$$

گزینه «۴»

همونطور که می‌بینید تابع $g(f^{-1}(x))$ در صورتی تشکیل میشه که برد تابع f^{-1} با دامنه‌ی تابع g اشتراک داشته باشه (پل ارتباطی)

سؤال ۳: اگر $f(x) = \frac{x}{x-2}$ و $g = \{(0, 1), (1, 2), (3, 4), (5, 3)\}$ باشد برد تابع $f \circ g$ کدامست؟

برای تشکیل تابع $f(g(x))$ باید از دامنه‌ی تابع g شروع کنیم، $g(x)$ به دست اومده رو درون ضابطه‌ی f قرار بدیم تا خروجی نهایی بدست بیاد.

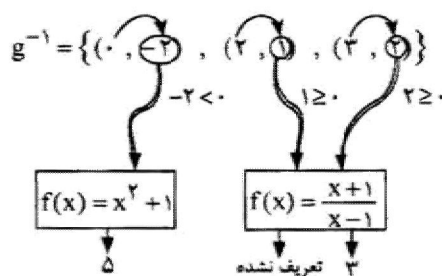


سؤال ۴: اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 0 \\ \frac{x+1}{x-1} & x \geq 0 \end{cases}$ و $g = \{(-2, 0), (1, 2), (2, 3)\}$ باشد دامنه‌ی تابع $f \circ g^{-1}(x)$ کدامست؟

اگر می‌خواهید $f(g^{-1}(x))$ رو تشکیل بدید باید از دامنه‌ی g^{-1} شروع کنید و بعدش $g^{-1}(x)$ بدست اومده رو

اگر منفی بود درون ضابطه‌ی بالایی f بنویسید.

اگر نامنفی بود درون ضابطه‌ی پایینی f بنویسید.



$$\Rightarrow f \circ g^{-1}(x) = (0, 5), (2, 3)$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g^{-1}} = \{0, 2\}$$

سؤال ۵: اگر $g = \{(1, 2), (5, 4), (2, 3)\}$, $f = \{(2, 5), (3, 1), (4, 7)\}$ آنگاه تابع $fog - gof$ کدام است؟

$$fog = \begin{cases} 1 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} 5 \rightarrow (1, 5) \\ 5 \xrightarrow{g} 4 \xrightarrow{f} 7 \rightarrow (5, 7) \\ 2 \xrightarrow{g} 3 \xrightarrow{f} 1 \rightarrow (2, 1) \end{cases} \rightarrow fog = \{(1, 5), (5, 7), (2, 1)\}$$

$$gof = \begin{cases} 2 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{g} 4 \rightarrow (2, 4) \\ 3 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{g} 2 \rightarrow (3, 2) \\ 4 \xrightarrow{f} 7 \xrightarrow{g} \times \end{cases} \rightarrow gof = \{(2, 4), (3, 2)\}$$

$$\rightarrow gof - fog = \{(2, 4 - 1)\} = \{(2, 3)\}$$

سؤال ۶: اگر $g = \{(-1, 0), (3, -1), (1, 2)\}$, $f = \{(1, -1), (0, 1), (-1, 1)\}$ آنگاه $\frac{fog}{f \cdot g}$ کدام است؟

$$fog : \begin{cases} -1 \xrightarrow{g} 0 \xrightarrow{f} 1 \rightarrow (-1, 1) \\ 3 \xrightarrow{g} -1 \xrightarrow{f} 1 \rightarrow (3, 1) \\ 1 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} \times \end{cases} \rightarrow fog = \{(-1, 1), (3, 1)\}$$

$$f \times g = \{(-1, 0), (1, -2)\}$$

$$\frac{fog}{f \times g} = \left\{ \left(-1, \frac{1}{0} \right) \right\} = \emptyset$$

تعریف نشده

سؤال ۷: اگر $gof = \{(-1, 4), (2, 3)\}$, $f = \{(2, -2), (3, 1), (-1, 1)\}$ باشد حاصل $g(g(-2) - 2)$ کدام است.

ابتدا باید $g(-2)$ رو حساب کنیم. اِه، اما ما که g نداریم پس به اجبار ناچار به f رو می اندازیم:

$$\begin{aligned} (2, -2) \in f &\rightarrow f(2) = -2 \\ \rightarrow g(-2) &= g(f(2)) = gof(2) = 3 \\ \rightarrow g(g(-2) - 2) &= g(3 - 2) = g(1) \\ (-1, 1) \in f &\rightarrow f(-1) = 1 \rightarrow g(1) = g(f(-1)) = gof(-1) = 4 \end{aligned}$$

سؤال ۸: اگر $g = \{(-1, 2), (3, 6), (-2, 4), (7, 1), (-3, 1)\}$, $fog = \{(-1, 3), (-2, 5), (7, 3), (-3, 3)\}$ آنگاه f کدام است.

$$\begin{aligned} -1 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} 3 &\Rightarrow (2, 3) \in f \\ 3 \xrightarrow{g} 6 \xrightarrow{f} 3 &\Rightarrow \times \\ -2 \xrightarrow{g} 4 \xrightarrow{f} 5 &\Rightarrow (4, 5) \in f \\ 7 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 3 &\Rightarrow (1, 3) \in f \\ -3 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 3 &\Rightarrow (1, 3) \in f \\ f &= \{(2, 3), (4, 5), (1, 3), (1, 3)\} \end{aligned}$$

سؤال ۹: اگر $fog = \{(-1, 0), (1, -2), (2, 3)\}$, $f = \{(-1, -2), (-2, 0), (0, 3)\}$ آنگاه g کدام است.

$$-1 \xrightarrow{g} \bigcirc \xrightarrow{f} 0 \Rightarrow \bigcirc = -2 \Rightarrow (-1, -2) \in g$$

$$1 \xrightarrow{g} \bigcirc \xrightarrow{f} -2 \Rightarrow \bigcirc = -1 \Rightarrow (1, -1) \in g$$

$$2 \xrightarrow{g} \bigcirc \xrightarrow{f} 3 \Rightarrow \bigcirc = 0 \Rightarrow (2, 0) \in g$$

$$\Rightarrow g = \{(-1, -2), (1, -1), (2, 0)\}$$

سؤال ۱۰: اگر $fog(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 3)$, $f(x) = x^2 + 4x$ باشد یکی از ضابطه های تابع g کدام می تواند باشد.

$$g(x) = x^2 + 2 \quad (2)$$

$$g(x) = x^2 + 1 \quad (1)$$

$$g(x) = x^2 - 1 \quad (4)$$

$$g(x) = 2x^2 + 1 \quad (3)$$

$$fog(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 3) \Rightarrow g^2(x) + 4g(x) = x^4 + 2x^2 - 3 \xrightarrow{+4}$$

$$g^2(x) + 4g(x) + 4 = x^4 + 2x^2 + 1 \Rightarrow (g(x) + 2)^2 = (x^2 + 1)^2 \Rightarrow g(x) + 2 = \pm(x^2 + 1)$$

$$\begin{cases} g(x) + 2 = x^2 + 1 \Rightarrow g(x) = x^2 - 1 \\ g(x) + 2 = -x^2 - 1 \Rightarrow g(x) = -x^2 - 3 \end{cases}$$

سؤال ۱۱: اگر $f(x^2 + 2x) = \frac{x^4 + 4}{x^2 - 2x + 2}$ مقدار $f(5)$ کدام است. (کانون ۹۰)

$$9 \quad (4)$$

$$7 \quad (4)$$

$$5 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

$$x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)$$

$$\Rightarrow f(x^2 + 2x) = \frac{(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)}{x^2 - 2x + 2} = x^2 + 2x + 2$$

$$\Rightarrow f(x) = x + 2 \Rightarrow f(5) = 7$$

سؤال ۱۲: اگر $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $gof = fo \frac{1}{f}$ باشد ضابطه تابع g کدام است.

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad (4)$$

$$g(x) = \frac{x}{1-x} \quad (3)$$

$$g(x) = \frac{1}{1-x} \quad (2)$$

$$g(x) = \frac{1}{1+x} \quad (1)$$

اگر $A(x) = \frac{1}{x}$ فرض کنیم آنگاه $Aof = \frac{1}{f}$ پس:

$$fo \frac{1}{f} = foAof$$

اما طبق فرض می دانیم: $gof = fo \frac{1}{f}$ یعنی:

$$gof = foAof \Rightarrow g = foA = f\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + 1} = \frac{1}{1+x}$$

سؤال ۱۳: با توجه به نمودار زیر اگر $g(x) = 3x - 2$ باشد مقدار $f(5)$ کدام است.



- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

$$x^2 = g(f(2x+1)) \xrightarrow{g(x)=3x-2} x^2 = 3f(2x+1) - 2 \xrightarrow{x=5} 4 = 3f(5) - 2 \Rightarrow 6 = 3f(5) \Rightarrow f(5) = 2$$



سؤال ۱۴: اگر $g(x) = 2x + \frac{3}{x}$, $fog(x) = \frac{x^2+1}{a+x}$, $f(y) = 2$ برای f باشد مقدار a کدام است.

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) $\frac{1}{8}$
(۴) $\frac{1}{4}$

$$f(g(x)) = \frac{x^2+1}{a+x} \Rightarrow f\left(2x + \frac{3}{x}\right) = \frac{x^2+1}{a+x}$$

بنابراین ابتدا x هایی را می یابیم که به ازای آن ها $g(x) = y$ شده باشد:

$$g(x) = y \Rightarrow 2x + \frac{3}{x} = y \Rightarrow 2x^2 - yx + 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(2x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} f\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f(y) = 2 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}{a+\frac{1}{2}} \Rightarrow a = \frac{1}{8} \\ \xrightarrow{x=3} f(g(3)) = f(y) = 2 = \frac{3^2+1}{a+3} \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

چون $x > 1$ پس فقط $x = 3$ و در نتیجه $a = 2$ قابل قبول است.



سؤال ۱۵: اگر $f(x) = [x] + [-x]$, $g(x) = x^2 - x - 2$ هرگاه $gof(x) = -2$ مجموعه مقادیر x کدام است.

- (۱) Z
(۲) $R-Z$
(۳) R
(۴) $\emptyset$

$$\begin{cases} x \in Z : f(x) = [x] + [-x] = 0 \Rightarrow g(f(x)) = g(0) = 0^2 - 0 - 2 = -2 \quad \checkmark \\ x \notin Z : f(x) = [x] + [-x] = -1 \Rightarrow g(f(x)) = g(-1) = (-1)^2 - (-1) - 2 = 0 \quad \times \end{cases}$$

$\Rightarrow x \in Z$



سؤال ۱۶: اگر $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{x}$, $g\left(x - \frac{1}{x}\right) = x + \frac{1}{x}$ برای مقدار $fog\left(\frac{5}{2}\right)$ کدام است.

- (۱) $\frac{1}{2}$
(۲) $\frac{3}{2}$
(۳) $\frac{7}{2}$
(۴) $\frac{5}{2}$

$$\left. \begin{aligned} f\left(x + \frac{1}{x}\right) &= x - \frac{1}{x} \\ x + \frac{1}{x} &= g\left(x - \frac{1}{x}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f\left(\underbrace{g\left(x - \frac{1}{x}\right)}_u\right) = x - \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow f(g(u)) = u \Rightarrow f(g(x)) = x \Rightarrow fog\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}$$



سؤال ۱۷: اگر $f(x + \sqrt{2x-1}) = x^2 - 6$ باشد حاصل $f(1)$ کدام است.

۴ (۴)

۲ (۳)

-۲ (۲)

-۴ (۱)

$$x + \sqrt{2x-1} = 1 \Rightarrow \sqrt{2x-1} = 1-x \xrightarrow[1-x \geq 0]{2x-1 \geq 0} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[x \leq 1]{x \geq \frac{1}{2}} 2x-1 = (1-x)^2 \xrightarrow[\frac{1}{2} \leq x \leq 1]{2x-1 = 1+x^2-2x} \rightarrow$$

$$x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2} \Rightarrow x = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow f(1) = (2 - \sqrt{2})^2 - 6 = 4 - 4\sqrt{2} + 2 - 6 = -4\sqrt{2}$$

سؤال ۱۸: فرض کنید $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 3)\}$, $g = \{(1, 1), (3, a), (4, 7)\}$, اگر $(f+g), (f-g)$ یک مجموعه یک



عضوی باشد آنگاه:

$a \neq 1$ (۴)

$a \neq -1$ (۳)

$a \neq 2$ (۲)

$a \neq 0, 2$ (۱)

$$D_{f+g} = D_{f-g} = \{1, 3\}$$

$$f+g = \{(1, 2+1), (3, 3+a)\} = \{(1, 3), (3, 3+a)\}$$

$$f-g = \{(1, 2-1), (3, 3-a)\} = \{(1, 1), (3, 3-a)\}$$

$$1 \xrightarrow{f-g} 1 \xrightarrow{f+g} 3 \Rightarrow (1, 3) \in (f+g) \cap (f-g)$$

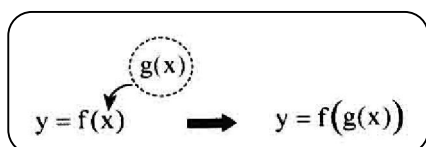
$$3 \xrightarrow{f-g} 3-a \xrightarrow{f+g} 0 \times$$

در صورت مسأله گفته که تک عضو $((3, 1))$ است. پس باید $3-a$ عضو دامنه $f+g$ نباشد یعنی:

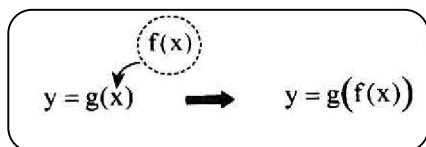
$$\begin{cases} 3-a \neq 1 \Rightarrow a \neq 2 \\ 3-a \neq 3 \Rightarrow a \neq 0 \end{cases} \Rightarrow a \neq 0, 2$$

روش بدست آوردن ضابطه‌ی توابع $g \circ f$ و $f \circ g$

فرض کنید ضابطه توابع f و g رو در اختیار دارید.



۱. برای بدست آوردن ضابطه‌ی تابع $y = f(g(x))$ کافیست که ضابطه‌ی g رو درون f قرار بدید. یعنی به جای x های تابع f ، ضابطه‌ی $g(x)$ جایگزین کنید.



۲. برای بدست آوردن ضابطه‌ی تابع $y = g(f(x))$ کافیست که ضابطه‌ی f رو درون g قرار بدید. یعنی به جای x های تابع g ، ضابطه‌ی $f(x)$ جایگزین کنید.

سؤال ۱۹: اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ و $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ باشد، ضابطه‌ی توابع $y = f \circ g(x)$ و $y = g \circ f(x)$ را بدست

آورید.

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{x^2 - 4} &\xrightarrow{g(x)} f(g(x)) = \sqrt{g^2(x) - 4} = \sqrt{(\sqrt{9 - x^2})^2 - 4} = \sqrt{9 - x^2 - 4} = \sqrt{5 - x^2} \\ g(x) = \sqrt{9 - x^2} &\xrightarrow{f(x)} g(f(x)) = \sqrt{9 - f^2(x)} = \sqrt{9 - (\sqrt{x^2 - 4})^2} = \sqrt{9 - (x^2 - 4)} = \sqrt{13 - x^2} \end{aligned}$$

سؤال ۲۰: اگر $f(x) = \frac{x}{1+x}$ و $g(x) = \tan x$ باشد، ضابطه‌ی $f(g^r(x))$ کدامست؟ $(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2})$

- (۱) $\tan^r x$ (۲) $\cot^r x$ (۳) $\sin^r x$ (۴) $\cos^r x$

پاسخ: گزینه (۳)

$$f(x) = \frac{x}{1+x} \xrightarrow{g^r(x)} f(g^r(x)) = \frac{g^r(x)}{1+g^r(x)} = \frac{\tan^r x}{1+\tan^r x} = \sin^r x$$

سؤال ۲۱: اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ باشد ضابطه‌ی $f \circ f(x)$ کدامست؟

- (۱) $x-1$ (۲) x (۳) $\frac{x+1}{x}$ (۴) $\frac{x-1}{x}$

پاسخ: گزینه (۲)

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \xrightarrow{f(x)} f(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x)-1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x-x+1}{x-1}} = x$$

سؤال ۲۲: اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$ باشد ضابطه‌ی $f \circ f(x)$ کدامست؟

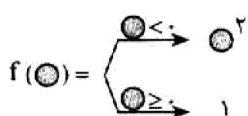
- (۱) x^2 (۲) ۱ (۳) x (۴) $x^2 + 1$

پاسخ: گزینه (۲)

چون تابع f دو ضابطه ایه باید بفهمیم حرف حسابش چیه.

فرمیگه: اگه ورودی به من منفی باشه من اون ورودی رو به توان دو می رسونم.

اگه ورودی به من نامنفی باشه من خروجی ۱ تحویل می دم.



حالا که فهمیدیم f با ورودی های خودش چی کار می کنه، بریم سراغ پیدا کردن ضابطه‌ی

$f(f(x))$.

همونطور که می دونید برای تشکیل $f(f(x))$ باید از x هی دامنه‌ی f شروع کنیم، یعنی:

$$\begin{cases} x < 0 \rightarrow f(f(x)) = f(x^2) = 1 \\ x \geq 0 \rightarrow f(f(x)) = f(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(f(x)) = 1$$

سؤال ۲۳: اگر $f(x) = \begin{cases} 2 & x \in Q \\ 1 & x \in Q' \end{cases}$ باشد ضابطه‌ی $f \circ f(x)$ کدامست؟

ببینم حرف حساب f چیه. f داره میگه: $\left. \begin{array}{l} \text{اگه ورودی گویا بهم بدید، خروجی گویای ۲ بهتون می دم.} \\ \text{اگه ورودی گنگ بهم بدید، خروجی گویای ۱ بهتون می دم.} \end{array} \right\}$

$$\begin{aligned} x \in Q &\Rightarrow f(f(x)) = f(2) = 2 \\ x \in Q' &\Rightarrow f(f(x)) = f(1) = 2 \end{aligned} \Rightarrow f(f(x)) = 2$$

سؤال ۲۴: اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ 4 & x < 0 \end{cases}$ مقدار $f(f(-f(x)))$ کدام است. (سنجش)

$f(x)$ فیه ازای هر $x \neq 0$ مقداری مثبت دارد و به ازای $x = 0$ حاصل آن صفر است.

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow f(f(-f(0))) = f(f(0)) = f(0) = 0 \\ x \neq 0 \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow -f(x) < 0 \Rightarrow f(-f(x)) = 4 \Rightarrow f(f(-f(x))) = f(4) = \sqrt{4} = 2 \end{cases}$$

منفی

$$\Rightarrow f(f(-f(x))) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 2 & x \neq 0 \end{cases}$$

ضابطه های $f(g(x))$ و $f(x)$ معلومند، ضابطه ی $g(x)$ کدامست؟

سؤال ۲۵: اگر $f(g(x)) = \frac{2x}{x-1}$ و $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ باشد ضابطه ی $g(x)$ کدامست؟

$$g(x) = \frac{\Delta x - 1}{x + 1} \quad (۴) \quad g(x) = \frac{x + 1}{x - 1} \quad (۳) \quad g(x) = \frac{\Delta x - 1}{x - 1} \quad (۲) \quad g(x) = \frac{4x - 1}{x + 2} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه (۴)

علاوه بر $f(g(x))$ ای که تو مسئله وجود داره، یه $f(g(x))$ هم ما بدست میاریم. یعنی:

$$\text{مسئله: } f(g(x)) = \frac{2x}{x-1} \quad \text{از طرفی: } f(x) = \frac{x+1}{x-2} \Rightarrow f(g(x)) = \frac{g(x)+1}{g(x)-2}$$

حالا این دو تا $f(g(x))$ رو با هم برابر قرار می دهیم تا $g(x)$ بدست بیاید.

$$\begin{aligned} \frac{g(x)+1}{g(x)-2} &= \frac{2x}{x-1} \Rightarrow 2xg(x) - 4x = xg(x) - g(x) + x - 1 \Rightarrow xg(x) + g(x) = \Delta x - 1 \\ \Rightarrow g(x)(x+1) &= \Delta x - 1 \Rightarrow g(x) = \frac{\Delta x - 1}{x + 1} \end{aligned}$$

ضابطه های $f(g(x))$ و $g(x)$ معلومند، ضابطه ی $f(x)$ کدامست؟

سؤال ۲۶: اگر $f(g(x)) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ و $g(x) = x - \frac{1}{x}$ باشد مقدار $f(\Delta)$ کدامست؟

$$29 \quad (۴) \quad 27 \quad (۳) \quad 25 \quad (۲) \quad 23 \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه (۳)

آقا اجازه! در تابع $f(g(x)) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ به جای $g(x)$ مقدار $x - \frac{1}{x}$ رو قرار می دیم.

$$\begin{cases} g(x) = x - \frac{1}{x} \\ f(g(x)) = x^2 + \frac{1}{x^2} \end{cases} \Rightarrow f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

عبارتی که درون تابع f قرار داده $\left(x - \frac{1}{x}\right)$ هست. پس اگر طرف دوم تساوی رو برحسب $\left(x - \frac{1}{x}\right)$ بنویسیم، قانون تابع f معلوم میشه. یعنی مشخص میشه که f با عبارت هایی که واردش میشن چی کار میکنه:

$$f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f\left(x - \frac{1}{x}\right) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 \Rightarrow f(0) = 0^2 + 2 \Rightarrow f(5) = 5^2 + 2 = 27$$

سؤال ۲۷: اگر $f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{2x}{x-1}$ باشد ضابطه $f(x)$ کدامست؟

اگر عبارت درون f رو توی جعبه ای به نام t قرار بدیم و تابع داده شده رو برحسب t بازنویسی کنیم، قانون تابع f رو می تونیم بدست بیاریم. یعنی:

$$f\left(\frac{t}{\frac{t}{x}+1}\right) = \frac{2x}{x-1} \Rightarrow f(t) = \frac{2\left(\frac{1}{\frac{1}{t}-1}\right)}{\left(\frac{1}{\frac{1}{t}-1}\right)-1} \Rightarrow f(t) = \frac{2}{\frac{1}{t}-1} \Rightarrow f(t) = \frac{2}{\frac{1-t}{t}} \Rightarrow f(t) = \frac{2t}{1-t} \Rightarrow f(x) = \frac{2x}{1-x}$$

سؤال ۲۸: اگر $g = \{(2,3), (3,4), (5,6)\}$ و $f = \{(2,5), (3,4), (4,5)\}$ باشد fog کدام است؟

$$2 \xrightarrow{g} 3 \xrightarrow{f} 4 \Rightarrow (2,4) \in fog$$

$$3 \xrightarrow{g} 4 \xrightarrow{f} 5 \Rightarrow (3,5) \in fog$$

$$5 \xrightarrow{g} 6 \xrightarrow{f} \times$$

$$\Rightarrow fog = \{(2,4), (3,5)\}$$

سؤال ۲۹: اگر $f(x) = x - \sqrt{x}$ ، $g(x) = \sin^2 x$ باشند ضابطه تابع fog کدام است. (تجربی ۹۲)

$$\begin{array}{llll} (1) -\frac{1}{4}\sin^2 2x & (2) -\frac{1}{2}\sin^2 2x & (3) \frac{1}{4}\cos^2 2x & (4) \frac{1}{2}\cos^2 2x \end{array}$$

$$f(g(x)) = f(\sin^2 x) = \sin^2 x - \sqrt{\sin^2 x} = \sin^2 x - \sin x = \sin^2 x (\sin^2 x - 1)$$

$$= \sin^2 x (-\cos^2 x) = -\sin^2 x \cos^2 x = -(\sin x \cos x)^2 = -\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 = -\frac{1}{4}\sin^2 2x$$

سؤال ۳۰: اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ ، $g(x) = x+4$ باشند، جواب معادله $gof(x) = fog(x)$ کدام است؟ (خارج ۹۷)

$$(1) -1 \text{ و } -7 \quad (2) -7 \text{ و } 1 \quad (3) 7 \text{ و } -1 \quad (4) 7 \text{ و } 1$$

$$\frac{2(x+4)-1}{(x+4)+2} = \frac{2x-1}{x+2} + 4 \Rightarrow \frac{2x+7}{x+6} = \frac{6x+7}{x+2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}$$

$$(2x+7)(x+2) = (x+6)(6x+7) \Rightarrow 2x^2 + 4x + 7x + 14 = 6x^2 + 7x + 36x + 42$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 32x + 28 = 0 \xrightarrow{:\div 4} x^2 + 8x + 7 = 0 \Rightarrow (x+1)(x+7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -7 \end{cases}$$

سؤال ۱۳: اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$, $g = \{(1, 2), (5, 4), (6, 5), (2, 3)\}$, $g(f(a)) = 5$, g باشد عدد a کدام است.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) (داخلی تجربی ۹۱)

$$g(f(a)) = 5 \Rightarrow f(a) = 6 \Rightarrow a + \sqrt{a} = 6 \Rightarrow a + \sqrt{a} - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} + 3) = 0 \Rightarrow \sqrt{a} - 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4$$

مثبت

سؤال ۱۴: اگر $f(x) = \sqrt{2-x-x^2}$ مقدار $f(f(-1))$ کدام است. (تجربی ۸۸)

۱ (۱) تعریف نشده ۲ (۲) صفر ۳ (۳) ۱ ۴ (۴) $\sqrt{2}$

$$f(-1) = \sqrt{2 - (-1) - (-1)^2} = \sqrt{2 + 1 - 1} = \sqrt{2}$$

$$f(f(-1)) = f(\sqrt{2}) = \sqrt{2 - \sqrt{2} - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2 - \sqrt{2} - 2} = \sqrt{-\sqrt{2}}$$

منفی

سؤال ۱۵: اگر $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2 + 2x + 1$, حاصل $fog(1 - \sqrt{2}) - gof(1 - \sqrt{2})$ کدام است؟

۱ (۱) $4(1 - \sqrt{2})$ ۲ (۲) $4(\sqrt{2} - 1)$ ۳ (۳) ۴ ۴ (۴) $4\sqrt{2}$ (داخل تجربی ۸۹)

$$g(x) = (x+1)^2 \Rightarrow g(1 - \sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2} + 1)^2 = (2 - \sqrt{2})^2 = 4 - 4\sqrt{2} + 2 = 6 - 4\sqrt{2} \Rightarrow f(g(1 - \sqrt{2}))$$

$$= f(6 - 4\sqrt{2}) = |6 - 4\sqrt{2}| = 6 - 4\sqrt{2}$$

$$f(1 - \sqrt{2}) = |1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow g(f(1 - \sqrt{2})) = g(\sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2} - 1 + 1)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$

$$fog(1 - \sqrt{2}) - gof(1 - \sqrt{2}) = 6 - 4\sqrt{2} - 2 = 4 - 4\sqrt{2} = 4(1 - \sqrt{2})$$

سؤال ۱۶: اگر $f(x) = x^2 - 2[x]$ مقدار $f\left(-\frac{1}{2}f(\sqrt{3})\right)$ کدام است؟ (تجربی ۹۰)

۱ (۱) $1/75$ ۲ (۲) $2/25$ ۳ (۳) $2/5$ ۴ (۴) $2/75$

$$f(x) = x^2 - 2[x] \Rightarrow f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 2[\sqrt{3}] = 3 - 2(1) = 1$$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}f(\sqrt{3})\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left[-\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4} - 2(-1) = \frac{1}{4} + 2 = 2/25$$

سؤال ۱۷: تابع $f = \{(2, 1), (3, 2), (4, 5), (1, 7)\}$, $g = \{(1, 2), (3, 1), (a, 3), (b, 1)\}$, $(4, 2) \in fog$ هستند اگر

$(4, 1) \in gof$ باشد دوتایی مرتب کدام است؟ (سراسری ۹۰)

$$(4, 1) \in fog \rightarrow gof(4) = 1 \rightarrow g(f(4)) = 1 \rightarrow g(5) = 1 \xrightarrow{g(b)=1} b = 5$$

$$(4, 2) \in fog \rightarrow gof(4) = 2 \rightarrow g(f(4)) = 2 \rightarrow g(3) = 2 \xrightarrow{f(r)=2} g(4) = 3$$

$$\xrightarrow{g(a)=2} a = 3$$

$$\rightarrow (a, b) = (3, 5)$$

سؤال ۳۶: اگر $f(x) = |x| - x$ ضابطه $f \circ f(x)$ برابر است با..... (سراسری ۸۳)

$$f(f(x)) = f(|x| - x) = \underbrace{||x| - x| - (|x| - x)}_{\text{همواره نامنفی}} = |x| - x - |x| + x = 0$$

سؤال ۳۷: اگر $f(x) = 2 - |x - 2|$ ضابطه تابع $f(f(x))$ برابر کدام است؟ (سراسری خارج از کشور ۹۰)

$$f(f(x)) = f(2 - |2 - x|) = 2 - |(2 - |2 - x|) - 2| = 2 - |-|2 - x|| = 2 - |2 - x| = f(x)$$

سؤال ۳۸: اگر $f(x) = 2x^2 - x - 1$ و $g(x) = 5 + 2x$ ریشه های معادله $f \circ g(x) = 0$ کدام است؟ (سنجش)

$$2x^2 - x - 1 = (2x + 1)(x - 1) = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}, 1$$

بهرتر است ابتدا ببینیم تابع f چه وقت مساوی صفر می شود:

$$\begin{cases} 5 + 2x = 1 \\ 5 + 2x = -\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -\frac{11}{4} \end{cases}$$

حال کافیه معادله های $g(x) = 1$ و $g(x) = -\frac{1}{2}$ رو حل کنیم:

سؤال ۳۹: اگر $f(x) = x^2 + x - 2$ و $g(x) = \frac{1}{2}(x - 3)$ مجموعه طول نقاطی از منحنی تابع $f \circ g$ که در زیر محور

x ها قرار می گیرند برابر کدام بازه است.

(۱) $(-5, 1)$ (۲) $(-1, 5)$ (۳) $(-2, 1)$ (۴) $(1, 5)$ (خارج تجربی ۹۱)

$$f(g(x)) < 0$$

ابتدا محدوده ای را می یابیم که $x^2 + x - 2 < 0$ یعنی

$$(x + 2)(x - 1) < 0 \Rightarrow -2 < x < 1$$

پس برای اینکه $f(g(x)) < 0$ شود باید:

$$-2 < g(x) < 1 \Rightarrow -2 < \frac{1}{2}(x - 3) < 1 \Rightarrow -4 < (x - 3) < 2 \Rightarrow -1 < x < 5 \Rightarrow \text{گزینه ۲}$$

سؤال ۴۰: اگر $f(x) = x^2 + 3x$ و $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ مجموعه طول نقاطی از منحنی تابع $g \circ f$ که در بالای محور

x ها قرار گیرد برابر کدام بازه است.

(۱) $(-4, 1)$ (۲) $(-3, 2)$ (۳) $(-2, 1)$ (۴) $(-1, 4)$ (داخلی تجربی ۹۱)

$$g \circ f(x) = -\frac{1}{2}g(x) + 2 = -\frac{1}{2}x(x^2 + 3x) + 2 = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2$$

$$g \circ f(x) > 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 2 < 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 < 0$$

$$\Rightarrow (x + 4)(x - 1) < 0 \Rightarrow -4 < x < 1$$

راه حل دوم) ابتدا نقاط را پیدا می کنیم که $g(x) > 0$ باشد یعنی:

$$-\frac{1}{2}x + 2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x < 2 \Rightarrow x < 4$$

پس برای اینکه $g(f(x)) > 0$ باشد باید $f(x) < 4$ شود یعنی:

$$x^2 + 3x < 4 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 < 0 \Rightarrow (x + 4)(x - 1) < 0 \Rightarrow -4 < x < 1$$

سؤال ۴۱: اگر $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 8x^2 + 6x + 5$ باشد تابع $f(x)$ کدام است؟ (خارج تجربی ۹۵)

- (۱) $2x^2 + 3x + 1$ (۲) $2x^2 - 2x + 3$ (۳) $2x^2 - x + 4$ (۴) $2x^2 + x + 3$

$$(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$f(2x + 1) = 8x^2 + 6x + 5 = 2(4x^2 + 4x + 1) - (2x + 1) + 4 = 2(2x + 1)^2 - (2x + 1) + 4$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^2 - x + 4$$

سؤال ۴۲: اگر $f(x) = 4(x^2 - 4x + 5)$, $g(x) = 2x - 3$ باشد تابع $f(x)$ کدام است. (داخلی ریاضی ۹۳)

- (۱) $x^2 - 4x + 3$ (۲) $x^2 - 4x + 5$ (۳) $x^2 - 2x + 5$ (۴) $x^2 - 2x + 3$

$$(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

$$f(2x - 3) = 4x^2 - 16x + 20 \Rightarrow (2x - 3)^2 - 2(2x - 3) + 5 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 5$$

$$x = 2: f(g(2)) = 4(4 - 8 + 5) \Rightarrow f(g(2)) = 4 \xrightarrow{g(2)=1} f(1) = 4$$

تنها گزینه ای که به ازای $x = 1$ مقدار ۴ را می دهد گزینه ۳ است.

سؤال ۴۳: اگر $f(2x - 3) = 4x^2 - 14x + 13$ باشد ضابطه $f(x)$ برابر کدام است؟ (داخل ۹۷)

- (۱) $x^2 - x + 3$ (۲) $x^2 - 2x - 1$ (۳) $x^2 - 2x + 1$ (۴) $x^2 - x + 1$

$$(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

$$f(2x - 3) = 4x^2 - 14x + 13 = (2x - 3)^2 - (2x - 3) + 1$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - x + 1$$

سؤال ۴۴: اگر $f(x) = 2x + 3$, $g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20$ باشند ضابطه $fog(x)$ کدام است. (داخل ریاضی ۹۲)

- (۱) $2x^2 - 7x + 3$ (۲) $2x^2 - 3x + 7$ (۳) $4x^2 - 2x + 1$ (۴) $4x^2 - 4x + 11$

$$(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

$$g(2x + 3) = 8x^2 + 22x + 20 \Rightarrow 2(2x + 3)^2 - (2x + 3) + 5$$

$$\Rightarrow g(x) = 2x^2 - x + 5$$

$$\Rightarrow gof = f(g(x)) = 2g(x) + 3 = 4x^2 - 2x + 10 + 3 = 4x^2 - 2x + 13$$

سؤال ۴۵: اگر $f(x) = x^2 - x - 2$, $f(g(x)) = x^2 + x - 2$ آنگاه $(f+g)(x)$ کدام گزینه می تواند باشد.

- (۱) $x^2 - 1$ (۲) $x^2 + 1$ (۳) $x^2 - 2x$ (۴) $x^2 + 2x$ (خارج تجربی ۹۰)

$$f(g(x)) = (g(x))^2 - g(x) - 2 = x^2 + x - 2 = g^2 - g - 2 = x^2 + x - 2$$

$$\Rightarrow g^2 - g = x^2 + x \Rightarrow g^2 - g - x^2 - x = 0 \Rightarrow g^2 - x^2 - g - x = 0$$

$$\Rightarrow (g - x)(g + x) - (g + x) = 0 \Rightarrow (g + x)(g - x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} g + x = 0 \Rightarrow g = -x \\ g - x - 1 = 0 \Rightarrow g = x + 1 \end{cases} \xrightarrow{f(x) = x^2 - x - 2} \begin{cases} (f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - x - 2 - x = x^2 - 2x - 2 \\ \text{یا} \\ (f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - x - 2 + x - 1 = x^2 - 1 \end{cases}$$

سؤال ۴۶: اگر $g(x) = \sqrt{4x+1}$, $f(x) = x^2 + x$ باشند مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع gof و خط $y=3$ به

معادله کدام است. (داخل تجربی ۹۵)

۶ (۴)

۴/۵ (۴)

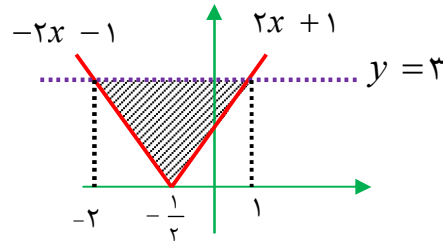
۴ (۲)

۳ (۱)

$$g(f(x)) = \sqrt{4f(x)+1} = \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = \sqrt{(2x+1)^2} = |2x+1|$$

$$|2x+1|=3 \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=3 \\ 2x+1=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$



سؤال ۴۷: اگر $g = \{(1,2), (5,4), (2,3)\}$, $f = \{(2,5), (3,1), (4,7)\}$ آنگاه تابع $gof - fog$ کدام است؟

$$fog = \begin{cases} 1 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} 5 \rightarrow (1,5) \\ 5 \xrightarrow{g} 4 \xrightarrow{f} 7 \rightarrow (5,7) \\ 2 \xrightarrow{g} 3 \xrightarrow{f} 1 \rightarrow (2,1) \end{cases} \rightarrow fog = \{(1,5), (5,7), (2,1)\}$$

$$gof = \begin{cases} 2 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{g} 4 \rightarrow (2,4) \\ 3 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{g} 2 \rightarrow (3,2) \\ 4 \xrightarrow{f} 7 \xrightarrow{g} \times \end{cases} \rightarrow gof = \{(2,4), (3,2)\}$$

$$\rightarrow gof - fog = \{(2,4-1)\} = \{(2,3)\}$$

سؤال ۴۸: اگر $g = \{(-1,0), (3,-1), (1,2)\}$, $f = \{(1,-1), (0,1), (-1,1)\}$ آنگاه $\frac{fog}{f.g}$ کدام است؟

$$fog : \begin{cases} -1 \xrightarrow{g} 0 \xrightarrow{f} 1 \rightarrow (-1,1) \\ 3 \xrightarrow{g} -1 \xrightarrow{f} 1 \rightarrow (3,1) \\ 1 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} \times \end{cases} \rightarrow fog = \{(-1,1), (3,1)\}$$

$$f \times g = \{(-1,0), (1,-2)\}$$

$$\frac{fog}{f \times g} = \left\{ \left(-1, \frac{1}{0} \right) \right\} = \emptyset$$

تعریف نشده

سؤال ۴۹: اگر $f = \{(1,2), (3,1), (2,2), (4,1)\}$ و $g = \{(1,1), (2,0), (3,-1)\}$ تابع $(f+g).(f-g)$ که

$h(x) = 1$ است کدام است؟

$\{(1,1), (2,3), (3,1)\}$ (۲)

$\{(2,8), (3,8)\}$ (۱)

$\{(1,3), (2,6), (3,4)\}$ (۴)

$\{(1,2), (2,3)\}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

تک تک توابع را به دست می آوریم و آنها را در هم ضرب می کنیم:

$$f - g = \{(1, 1), (2, 2), (3, 2)\}$$

$$f + g = f + 1 = \{(1, 3), (2, 2), (3, 3), (4, 2)\}$$

$$(f - g)(f + 1) = \{(1, 3), (2, 6), (3, 4)\}$$

سؤال ۵۰: اگر $g(x) = \sqrt{x+6}$, $f(x) = \sqrt{2-x}$ اولاً دامنه fog را بیابید ثانیاً ضابطه تابع fog را معلوم کنید.

پاسخ: ابتدا به کمک تعریف دامنه را پیدا می‌کنیم:

$$D_{fog} = \{x : x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

$$x \in D_g \Rightarrow x \geq -6 \quad D_g = [-6, +\infty)$$

$$g(x) \in D_f \Rightarrow g(x) \leq 2 \Rightarrow \sqrt{x+6} \leq 2 \Rightarrow x+6 \leq 4 \Rightarrow x \leq -2$$

$$\Rightarrow D_{fog} = [-6, +\infty) \cap (-\infty, -2] = [-6, -2]$$

$$fog(x) = f(g(x)) = \sqrt{2 - g(x)} = \sqrt{2 - \sqrt{x+6}} \quad \text{حال ضابطه } fog \text{ را به دست می‌آوریم:}$$

سؤال ۵۱: اگر $g(x) = 4x - 4a$, $f(x) = x^2 + 2a$ مقدار a کدام باشد تا $fog(a) = gof(a) + a$ برقرار

باشد؟

پاسخ: ابتدا را به دست می‌آوریم:

$$fog(a) = f(g(a)) = g^2(a) + 2a = (4a - 4a)^2 + 2a = 2a$$

$$gof(a) = g(f(a)) = 4f(a) - 4a = 4(a^2 + 2a) - 4a = 4a^2 + 4a$$

$$2a = 4a^2 + 4a + a \Rightarrow 2a = 4a^2 + 5a \Rightarrow 4a^2 + 3a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

سؤال ۵۲: اگر تابع f وارون پذیر باشد و $g(x) = 1 + f\left(\frac{x}{2}\right)$ ضابطه تابع g^{-1} کدام است؟

$$f^{-1}(2x) - 1 \quad (4) \quad 1 - f^{-1}(2x) \quad (3) \quad 2f^{-1}(1-x) \quad (2) \quad 2f^{-1}(x-1) \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

برای یافتن $g^{-1}(x)$ کافی است x را بر حسب y پیدا کنید:

$$y = 1 + f\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y - 1 = f\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow f^{-1}(y - 1) = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2f^{-1}(y - 1) \Rightarrow g^{-1}(x) = 2f^{-1}(x - 1)$$

سؤال ۵۳: اگر $f(x) = 2x - 9$ دامنه تعریف $y = \sqrt{f^{-1}(2x^3 - x^2)} - x^3$ شامل چند عدد صحیح است؟

(۴) بی شمار

(۳) ۹

(۲) ۷

(۱) ۶

پاسخ: گزینه ۲

 f صعودی اکید و معکوس پذیر است پس معکوس آن هم یک تابع صعودی اکید است پس:

$$f^{-1}(2x^3 - x^2) - x^3 \geq 0 \Rightarrow f^{-1}(2x^3 - x^2) \geq x^3 \Rightarrow 2x^3 - x^2 \geq f(x^3)$$

$$2x^3 - x^2 \geq 2x^3 - 9 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow x \in [-3, 3]$$

سؤال ۴۵: اگر $0 < a < 1$, $g(x) = \sqrt{x^2 + 4}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ آنگاه حاصل $f\left(a + \frac{1}{a}\right) + g\left(a - \frac{1}{a}\right)$ کدام است؟

$$\sqrt{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 4} + \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 4} = \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2} + \sqrt{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2}$$

$$\underbrace{\left|a - \frac{1}{a}\right|}_{\text{منفی}} + \underbrace{\left|a + \frac{1}{a}\right|}_{\text{مثبت}} \quad 0 < a < 1 \rightarrow \frac{1}{a} > a$$

$$-a + \frac{1}{a} + a + \frac{1}{a} = \frac{2}{a}$$

سؤال ۵۵: اگر $f(x) = \frac{3x+1}{x+a}$, $f \rightarrow f(x) = x$, $f \circ f(x) = x$ آنگاه a کدام است؟

در تابع $\frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $a+d=0$ باشد آنگاه $f \circ f(x) = x$ می شود.



$$\rightarrow 3+a=0 \rightarrow a=-3$$

دامنه‌ی توابع gof و fog

$$y = f(g(x)) \rightarrow D_{fog} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

$$y = g(f(x)) \rightarrow D_{gof} = \{x \mid x \in D_f, f(x) \in D_g\}$$

سؤال ۵۶: اگر $f(x) = \sqrt{x-2}$ و $g(x) = \sqrt{4-x}$ باشد دامنه‌ی تعریف تابع $gof(x)$ کدامست؟

- (۱) $[2, 4]$ (۲) $[18, +\infty)$ (۳) $(-\infty, 4]$ (۴) $(-\infty, 0]$

پاسخ: ۱

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x-2} & \Rightarrow D_f = [2, +\infty) \\ g(x) = \sqrt{4-x} & \Rightarrow D_g = (-\infty, 4] \end{cases}$$

$$\sqrt{x-2} \text{ نمی‌تونه منفی باشه}$$

$$D_{g(f(x))} = \{x \mid x \in D_f, f(x) \in D_g\} = \{x \mid x \in [2, +\infty), \sqrt{x-2} \in (-\infty, 4]\}$$

$$D_{g(f(x))} = [2, +\infty) \cap [2, 18] = [2, 18]$$

$$\sqrt{x-2} \in [0, 4] \Rightarrow x-2 \in [0, 16] \Rightarrow x \in [2, 18]$$



اگر خواستید دامنه‌ی تابع fog یا gof رو بدست بیارید:
دو تابع f و g رو با هم ترکیب کنید و (قبل از ساده کردن عبارت ها) دامنه رو بدست بیارید.

نکته فیلی ظریف

سؤال ۵۷: اگر $f(x) = \sqrt{3-x}$, $g(x) = \log_3(x^2+2x)$ باشند دامنه fog کدام است. (داخلی تجربی ۹۴)

(۱) $[-4, 2]$ (۲) $[-2, 0]$ (۳) $[-4, -1) \cup (1, 2]$ (۴) $[-4, -2) \cup (0, 2]$

$$D_f : 3 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$$

$$D_g : x^2 + 2x > 0 \Rightarrow x(x+2) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \text{یا} \\ x < -2 \end{cases}$$

$$D_{fog} : \{x \in D_g \mid g \in D_f\} : \{x > 0 \text{ یا } x < -2 \mid \log_3(x^2+2x) \leq 3\}$$

$$\Rightarrow \log_3(x^2+2x) \leq 3 \Rightarrow x^2+2x \leq 27 \Rightarrow x^2+2x-27 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x+9)(x-3) \leq 0 \Rightarrow -9 \leq x \leq 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \cap -9 \leq x \leq 3 = -9 \leq 0 < -2 \text{ یا } 0 < x \leq 3 = [-4, -2) \cup (0, 2] \\ x < -2 \end{cases}$$

روش دوم) $f(g(x)) = \sqrt{3 - \log_3(x^2+2x)}$ است عددی که باعث اختلاف در گزینه ها می شود را چک می کنیم.

گزینه ۱ و ۲ نادرست است $\Rightarrow$ تعریف نشده $\Rightarrow$ تعریف نشده) $f(g(0)) = f(0) =$
گزینه ۳ نادرست است $\Rightarrow$ تعریف نشده $f(g(-1)) =$

گزینه ۴ درست است.

سؤال ۵۸: اگر $f(x) = \sqrt{2-x}$, $g(x) = \log(x^2-15x)$ باشند دامنه fog کدام است؟ (داخل ریاضی ۹۵)

(۱) $(0, 5] \cup [20, 25)$ (۲) $(-5, 0) \cup (15, 20]$ (۳) $[15, 20]$ (۴) $[-5, 0)$

$$D_f : 2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

$$D_g : x^2 - 15x > 0 \Rightarrow x(x-15) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 15 \\ \text{یا} \\ x < 0 \end{cases}$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g \in D_f\} = \{x > 15 \text{ یا } x < 0 \mid \log(x^2-15x) \leq 2\}$$

$$\Rightarrow \{x > 15 \text{ یا } x < 0 \mid x^2-15x \leq 100\}$$

$$\Rightarrow \{x > 15 \text{ یا } x < 0 \mid x^2-15x-100 \leq 0\}$$

$$\Rightarrow \{x > 15 \text{ یا } x < 0 \mid (x-20)(x+5) \leq 0\}$$

$$\Rightarrow \{x > 15 \text{ یا } x < 0 \mid -5 \leq x \leq 20\} \Rightarrow [-5, 0) \cup (15, 20]$$

سؤال ۵۹: اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}$ و $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ باشند دامنه تابع fog کدام است. (خارج تجربی ۹۴)

(۱) $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ (۲) $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ (۳) $(-2, 0)$ (۴) $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{cases} D_g = R \\ D_f : -x^2 + x + 2 > 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 2 \end{cases}$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in R \mid -1 < \left(\frac{1}{4}\right)^x < 2\}$$

$$-1 < \left(\frac{1}{4}\right)^x < 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x < 2 \Rightarrow 2^{-2x} < 2^1 \Rightarrow -2x < 1 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$$

همواره صحیح است

پس دامنه $fog(x)$ برابر $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ است.

سؤال ۶۰: اگر $f(x) = \sqrt{x+|x|}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x}$ دامنه gof کدام است؟ (خارج ۸۷)

(۱) $(0, 8) \cup (8, +\infty)$ (۲) $R - \{0, 8\}$ (۳) $R - \{0\}$ (۴) $(0, +\infty)$

$$D_f : x + |x| \geq 0 \Rightarrow x \in R$$

$$D_g : x^2 - 4x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0, 4$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f \in D_g\} = \{x \in R \mid \sqrt{x+|x|} \neq 0, 4\} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+|x|} \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \\ \sqrt{x+|x|} \neq 4 \Rightarrow x+|x| \neq 16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x + |x| \neq 16 \xrightarrow{x \geq 0} 2x \neq 16 \Rightarrow x \neq 8$$

$$\Rightarrow D_{gof} = R - \{0, 8\}$$

سؤال ۶۱: اگر $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \cos x$ حاصل $gof(0) + fog(0)$ کدام است؟ (کتاب درسی)

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) $\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۳

گفتیم برای پیدا کردن مقدار $(fog)(0)$ اول $g(0)$ را پیدا می‌کنیم و بعد مقدار $f(g(0))$ پس داریم:

$$f(x) = \cos x, g(x) = \sqrt{x}$$

$$(fog)(0) = f(g(0)) = f(\sqrt{0}) = f(0) = \cos 0 = 1$$

$$(gof)(0) = g(f(0)) = g(\cos 0) = g(1) = \sqrt{1} = 1$$

$$(fog)(0) + (gof)(0) = 1 + 1 = 2$$

سؤال ۶۲: یک ماده غذایی از داخل یخچال که خارج شود، تعداد باکتری های آن برحسب دما به صورت $N(d) = 2 \circ d^2 - 8 \circ d + 500$ است و هم چنین دمای این ماده غذایی برحسب زمان با تابع $d(t) = 4t + 3$ افزایش می یابد. تعداد باکتری های ماده غذایی که ۳ ساعت قبل از یخچال بیرون آمده، در حال حاضر کدام است؟

(۱) ۳۳۰۰ (۲) ۲۲۰۰ (۳) ۳۸۰۰ (۴) ۲۴۰۰ (کتاب درسی)

پاسخ: گزینه ۴

تعداد باکتری ها برحسب دما از تابع $N(d) = 2 \circ d^2 - 8 \circ d + 500$ به دست می آید و دما نیز از تابع $d(t) = 4t + 3$ مناسبه می شود. پس برای پیدا کردن تعداد باکتری ها بعد از ۳ ساعت باید $N(d(3))$ را پیدا کنیم:

$$N(d(3)) = N(4(3) + 3) = N(15) = \underbrace{2 \circ (15)^2}_{4500} - \underbrace{8 \circ (15)}_{1200} + 500 = 3800$$

سؤال ۶۳: الناز می خواهد از فروشگاه بهار یک لپ تاپ با قیمت دو میلیون و چهار صد هزار تومان خریداری نماید. اگر الناز یک کارت تخفیف ۲۰ درصدی داشته باشد و از طرفی فروشگاه برای خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی دهد، الناز در بهترین حالت لپ تاپ را با چه قیمتی خریداری می کند؟ (کتاب درسی)

(۱) ۱۷۶۰۰۰۰ (۲) ۱۷۲۰۰۰۰ (۳) ۱۶۸۰۰۰۰ (۴) ۱۶۴۰۰۰۰

پاسخ: گزینه ۲

الناز دو انتخاب دارد: اول کارت تخفیف بیست درصدی را ببرد و روی قیمت تخفیف فورده، ۲۰۰ هزار تومان نقدی تخفیف بگیرد یا برعکس. بینیم کدام به صرفه تر است؟

اگر تابع $f(x)$ نشان دهنده قیمت لپ تاپ بعد از تخفیف ۲۰۰ هزار تومان و تابع $g(x)$ نشان دهنده قیمت آن بعد از تخفیف ۲۰ درصدی باشد داریم:

$$f(x) = x - 200000, g(x) = x - \frac{20}{100}x = \frac{4}{5}x$$

حالا باید $(fog)(2400000)$ و $(gof)(2400000)$ را مقایسه کنیم:

$$(fog)(2400000) = f\left(\frac{4}{5} \times 2400000\right) = f(1920000) = 1920000 - 200000 = 1720000$$

$$(gof)(2400000) = g(2400000 - 200000) = g(2200000) = \frac{4}{5} \times 2200000 = 1760000$$

پس بهترین قیمتی که الناز می تواند خریداری کند برابر ۱۷۲۰۰۰۰ است.

سؤال ۶۴: اگر $f = \{(7, 8), (5, 3), (9, 8), (11, 4)\}$ و $g = \{(5, 7), (3, 5), (7, 9), (9, 11)\}$ تعداد زوج مرتب های تابع fog چند تا بیشتر از تعداد زوج مرتب های تابع gof است؟ (کتاب درسی)

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ: گزینه ۴

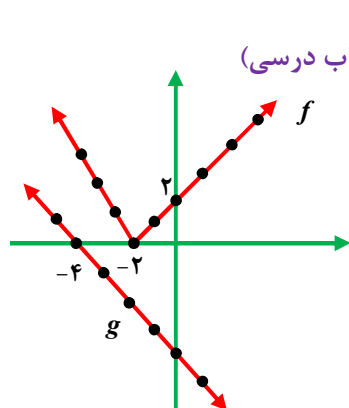
تابع (fog) و (gof) را پیدا می کنیم:

$$f = \{(7, 8), (5, 3), (9, 8), (11, 4)\}$$

$$g = \{(5, 7), (3, 5), (7, 9), (9, 11)\}$$

$$fog = \{(5, 8), (3, 3), (7, 8), (9, 4)\}, gof = \{(5, 5)\}$$

پس fog ، ۴ زوج مرتب و gof ، ۱ زوج مرتب دارد و $4 - 1 = 3$



سؤال ۶۵: با توجه به نمودار f , g حاصل $\frac{fog(-1) + gof(0)}{f(1)}$ کدام است؟ (کتاب درسی)

(۱) ۱

(۲) -۱

(۳) $\frac{5}{9}$

(۴) $-\frac{5}{9}$

پاسخ: گزینه ۲

هر کدام از عامل های صورت و مخرج را با استفاده از نمودار پیدا می کنیم:

$$(fog)(-1) = f(g(-1)) = f(-3) = 1$$

$$(gof)(0) = g(f(0)) = g(1) = -6$$

$$(f(1)) = f(1) = 2$$

$$\frac{1 + (-6)}{2} = -\frac{5}{2} = -2.5$$

سؤال ۶۶: کدام گزینه درست است؟ (کتاب درسی)

(۱) اگر $f(7) = 5$ و $g(4) = 7$ آنگاه $g(4) = 35$

(۲) برای دو تابع f, g که $f \neq g$ تساوی $fog(x) = gof(x)$ هیچ وقت برقرار نیست.

(۳) اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 2x - 1$ آنگاه $fog(5) = g(2)$

(۴) اگر $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ آنگاه $fog(x) = -x^2$

پاسخ: گزینه ۳

هر کدام از گزینه ها را بررسی می کنیم:

$$1) f(7) = 5, g(4) = 7 \Rightarrow (fog)(4) = f(g(4)) = f(7) = 5$$

پس (۱) نادرست است.

در مورد (۲) تساوی $fog = gof$ معمولاً برقرار نیست اما بعضی از وقتها حتی اگر $f \neq g$ باشد ممکن است $fog = gof$ باشد مثلاً:

$$f(x) = x^2, g(x) = x^2$$

$$(fog)(x) = (x^2)^2 = x^4$$

$$(gof)(x) = (x^2)^2 = x^4$$

پس (۲) هم نادرست است.

در (۳) داریم:

$$f(x) = \sqrt{x}, g(x) = 2x - 1$$

$$g(2) = 3, (fog)(5) = f(g(5)) = f(9) = \sqrt{9} = 3$$

پس (۳) درست است. نادرستی (۴) را هم خودتان بررسی کنید.

سؤال ۶۷: اگر $(3x^2 - 4x + 1)^5$ به جای شماره های ۱ و ۲ به ترتیب می توان تابع های و را قرار داد. (کتاب درسی)

$$\begin{array}{ll} (1) \quad 3x^2 - 4x + 1, \sqrt[5]{x} & (2) \quad \sqrt[5]{x}, 3x^2 - 4x + 1 \\ (3) \quad 3x^2 - 4x + 1, x^5 & (4) \quad x^5, 3x^2 - 4x + 1 \end{array}$$

پاسخ: گزینه ۴

تابع $h(x) = (3x^2 - 4x + 1)^5$ را به صورت زیر می توانیم به صورت دو تابع f و g بنویسیم:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 3x^2 - 4x + 1 \\ g(x) = x^5 \end{array} \right\} \Rightarrow h(x) = (g \circ f)(x)$$

پس در $(3x^2 - 4x + 1)^5$ به جای x به جای $\square$ باید تابع $3x^2 - 4x + 1$ و به جای $\square$ باید تابع x^5 را قرار داد.

سؤال ۶۸: اگر $f(x) = 3x^2 + x - 1$, $g(x) = 1 - 2x$ حاصل ضرب ریشه های معادله $(g \circ f)(x) = -5$ کدام است؟ (کتاب درسی)

$$\begin{array}{llll} (1) \quad \frac{4}{3} & (2) \quad -\frac{4}{3} & (3) \quad 1 & (4) \quad -1 \end{array}$$

پاسخ: گزینه ۲

❖ راه اول) برای حل معادله $(g \circ f)(x) = -5$ اول جواب معادله $g(x) = -5$ را پیدا می کنیم و سپس $f(x)$ را برابر با جواب پیدا شده قرار می دهیم:

$$g(x) = -5 \Rightarrow 1 - 2x = -5 \Rightarrow x = 3$$

$$f(x) = 3 \Rightarrow 3x^2 + x - 1 = 3 \Rightarrow 3x^2 + x - 4 = 0$$

سوال حاصل ضرب ریشه های معادله آفر را می فواید که می دانیم برابر است با $\frac{c}{a}$ یعنی: $-\frac{4}{3}$

❖ راه دوم) $g \circ f$ را تشکیل می دهیم:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = 1 - 2(3x^2 + x - 1) = 1 - 6x^2 - 2x + 2 = -6x^2 - 2x + 3$$

و آن را مساوی -5 می گذاریم: $-6x^2 - 2x + 3 = -5 \Rightarrow 6x^2 + 2x - 8 = 0$

$$P = \frac{c}{a} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$

ضرب ریشه ها می شود:

سؤال ۶۹: اگر $f(x) = x - 2$, $g(x) = x^2 - 1$ ضابطه و دامنه تابع gof کدام است؟ (کتاب درسی)

- (۱) $gof(x) = (x-1)^2 - 2, D_{gof} = R$
 (۲) $gof(x) = x^2 - 4x + 3, D_{gof} = \{\pm 1\}$
 (۳) $gof(x) = x^2 - 4x + 3, D_{gof} = R$
 (۴) $gof(x) = (x-1)^2 - 2, D_{gof} = \{\pm 1\}$

پاسخ: گزینه ۳

پون $f(x) = x - 2, g(x) = x^2 - 1$ ضابطه gof را به راحتی مناسبه می کنیم:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = (x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 4 - 1 = x^2 - 4x + 3$$

برای دامنه gof هم می دانیم: $D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$

و چون $D_g = R, D_f = R$ بنابراین: $D_{gof} = R \Rightarrow D_{gof} = \{x \in R \mid (x-2) \in R\}$

همواره برقرار است

سؤال ۷۰: اگر $f(x) = \sqrt{x-1}, g(x) = 2x^2 - 1$ کدام است $D_{fog} \cap D_{gof}$ ؟ (کتاب درسی)

- (۱) $[0, +\infty)$
 (۲) $(0, +\infty)$
 (۳) $[1, +\infty)$
 (۴) $(1, +\infty)$

پاسخ: گزینه ۳

اول دامنه هر کدام از تابع های f, g را پیدا می کنیم:

$$f(x) = \sqrt{x-1} \Rightarrow D_f = [1, +\infty)$$

$$g(x) = 2x^2 - 1 \Rightarrow D_g = R$$

حالا D_{fog}, D_{gof} را تعیین می کنیم:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in R \mid (2x^2 - 1) \in [1, +\infty)\} = \{x \mid 2x^2 - 1 \geq 1\}$$

$$= \{x \mid x^2 \geq 1\} = \{x \mid |x| \geq 1\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in [1, +\infty) \mid \sqrt{x-1} \in R\} = [1, +\infty)$$

همواره برقرار است

بنابراین اشتراک دامنه gof و fog می شود: $((-\infty, -1] \cup [1, +\infty)) \cap [1, +\infty) = [1, +\infty)$

سؤال ۷۱: اگر $f(x) = \sqrt{3-2x}, g(x) = \frac{6}{x-5}$ دامنه تابع gof کدام است؟ (کتاب درسی)

- (۱) $R - \{5\}$
 (۲) $R - \{-1\}$
 (۳) $\left[-\infty, \frac{3}{2}\right] - \{5\}$
 (۴) $\left[-\infty, \frac{3}{2}\right] - \{-1, 1\}$

پاسخ: گزینه ۴

اول دامنه تابع های f, g را پیدا می کنیم:

$$f(x) = \sqrt{3-2x} \Rightarrow 3-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow D_f : x \leq \frac{3}{2}$$

$$g(x) = \frac{6}{x-5} \Rightarrow D_g = R - \{5\} \text{ یا } D_g : x \neq 5$$

حالا می رویم سراغ دامنه gof :

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \left\{x \leq \frac{3}{2} \mid \sqrt{3-2x} \neq 5\right\} = \left\{x \leq \frac{3}{2} \mid 3-2x \neq 25\right\}$$

$$= \left\{x \leq \frac{3}{2} \mid x \neq -11\right\} = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] - \{-11\}$$

سؤال ۷۲: اگر $f(x) = \frac{2}{x-1}$, $g(x) = \frac{3}{x}$ دامنه تابع fog شامل چند عدد صحیح نمی شود؟ (کتاب درسی)

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

اول دامنه f, g را پیدا می کنیم: $g(x) = \frac{3}{x} \Rightarrow D_g: x \neq 0$, $f(x) = \frac{2}{x-1} \Rightarrow D_f: x \neq 1$

حالا دامنه fog را به دست می آوریم:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \left\{x \neq 0 \mid \frac{3}{x} \neq 1\right\} = \{x \neq 0 \mid x \neq 3\} = R - \{0, 3\}$$

پس دامنه تابع fog شامل دو عدد صحیح نیست.

سؤال ۷۳: اگر $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \sin x$ تابع gof در تمامی نقاط کدام بازه زیر تعریف شده است؟

۱ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ۲ $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ ۳ $\left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$ ۴ $(-2\pi, -\pi)$ (کتاب درسی)

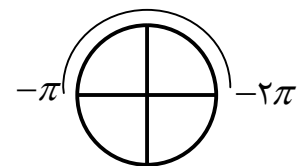
پاسخ: گزینه ۴

ابتدا تعریف دامنه تابع gof را می نویسیم:

$$f(x) = \sin x \Rightarrow D_f = R$$

$$g(x) = \sqrt{x} \Rightarrow D_g = [0, +\infty)$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in R \mid \sin x \geq 0\}$$



بنابراین باید بازه ای را انتخاب کنیم که در آن همواره $\sin x \geq 0$ باشد که با توجه به گزینه ها می شود (۴):

$$-2\pi < x < -\pi \Rightarrow \sin x > 0$$

سؤال ۷۴: اگر $f(x) = \sqrt{1-x}$ آنگاه دامنه تعریف تابع $fof(x) = \sqrt{1+f^{-1}(x)}$ کدام است؟

۱ $[0, 1]$ ۲ $[-1, 1]$ ۳ $(-\infty, -1]$ ۴ $(-\infty, 1]$

پاسخ: گزینه ۴

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \text{ می دانیم:}$$

پس دامنه تابع $y = \sqrt{1 + (f^{-1} \circ f)(x)}$ برابر است با دامنه تابع $y = \sqrt{1 + x}$ به شرط آن که $f^{-1} \circ f$ تعریف شده باشد،
یعنی $x \in D_{f^{-1} \circ f}$ و چون $D_{f^{-1} \circ f} = D_f$ پس دامنه تابع $y = \sqrt{1 + (f^{-1} \circ f)(x)}$ برابر می شود با:

$$دامنه = \{x \mid 1 + x \geq 0 \mid x \in D_f\}$$

از طرف دیگر دامنه تابع $f(x) = \sqrt{1 - x}$ برابر است با $x \leq 1$ پس:

$$دامنه = \{x \mid x \geq 1 \mid x \leq 1\} = [-1, 1]$$

سؤال ۷۵: اگر $f(x) = [x] + [2 - x]$ ، $g(x) = 3^x$ جواب های معادله $(gof)(x) = 27$ چگونه است؟

(۲) فقط یک جواب منفی

(۱) فقط یک جواب مثبت

(۴) جواب ندارد

(۳) یک جواب مثبت و یک جواب منفی

پاسخ: گزینه ۴

همانطور که قبلاً هم دیدیم برای پیدا کردن جواب های معادله $(gof)(x) = 27$ ، اول معادله $g(x) = 27$ را حل می کنیم:

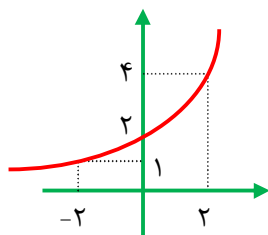
حالا جواب به دست آمده را برابر $f(x)$ قرار می دهیم:

$$[x] + [2 - x] = 3 \Rightarrow [x] + [-x] + 2 = 3 \Rightarrow [x] + [-x] = 1$$

از طرف دیگر می دانیم حاصل $[x] + [-x]$ یا برابر صفر است (وقتی که x صحیح باشد) یا برابر (-1) است (وقتی x صحیح نباشد)

پس معادله $[x] + [-x] = 1$ هرگز جواب ندارد.

سؤال ۷۶: نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. اگر $(f \circ f)(t) = 4$ مقدار $f(t - 2)$ چقدر است؟



(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲

توجه کنید که:

$$f(x) = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$f(x) = 2 \Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow (f \circ f)(t) = f(f(t)) = 4$$

$$f(t) = 2 \Rightarrow t = 0$$

$$f(t - 2) = f(-2) = 1$$

سؤال ۷۷: اگر $g(x) = x^2 - x + 4$ ، $(gof)(x) = x + f(x)$ مقدار $f(3)$ چقدر است؟

(۴) ۲

(۳) -۲

(۲) ۱

(۱) -۱

پاسخ: گزینه ۲

توجه کنید که:

$$(gof)(x) = x + f(x) \Rightarrow g(f(x)) = x + f(x)$$

$$f^2(x) - f(x) + 4 = x + f(x) \Rightarrow f^2(x) - 2f(x) - x + 4 = 0$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x = 3$ به دست می آید.

$$f^2(3) - 2f(3) - 3 + 4 = 0 \Rightarrow f^2(3) - 2f(3) + 1 = 0$$

$$(f(3) - 1)^2 = 0 \Rightarrow f(3) = 1$$

سؤال ۷۸: اگر f یک تابع خطی باشد و $(f \circ f)(x) = 4x - 3$ مقدار $f(0)$ کدام است؟

- (۱) ۱ یا -۳ (۲) -۱ یا ۳ (۳) -۱ یا -۳ (۴) ۱ یا ۳

پاسخ: گزینه ۲

چون f خطی است پس ضابطه آن به صورت $f(x) = ax + b$ است پس:

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = af(x) + b = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b$$

$$a^2x + ab + b = 4x - 3 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ ab + b = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -2, b = 3 \\ a = 2, b = -1 \end{cases}$$

بنابراین: $f(x) = -2x + 3$ یا $f(x) = 2x - 1$

که نتیجه می شود: $f(0) = 3$ یا $f(0) = -1$

سؤال ۷۹: اگر تابع f اکیداً صعودی باشد $f(x) < 1, D_f = R$ مجموعه جواب های نامعادله

$$(f \circ f)(x) < f(x^2 + 2)$$

- (۱) R (۲) $(-\infty, 1)$ (۳) $(1, 2)$ (۴) $\emptyset$

پاسخ: گزینه ۱

نامعادله به صورت $f(f(x)) < f(x^2 + 2)$ است که چون تابع f اکیداً صعودی است نتیجه می شود. (۱) $f(x) < x^2 + x$

از طرف دیگر: $f(x) < 1, x^2 + 2 \geq 2$

بنابراین هر عدد حقیقی در نامعادله (۱) صدق می کند.

سؤال ۸۰: اگر تابع f اکیداً نزولی باشد $f(0) = -1, f(1) = 0, D_f = R$ دامنه تابع $g(x) = \log(f(x))$ کدام

است؟

- (۱) $(-\infty, 1)$ (۲) $(-\infty, 0)$ (۳) $(1, +\infty)$ (۴) $(0, +\infty)$

پاسخ: گزینه ۱

برای به دست آوردن دامنه تابع g کافی است نامعادله $f(x) > 0$ را حل کنیم. با توجه به $f(1) = 0$ نتیجه می شود

$$D_g = (-\infty, 1) \text{ زیرا } f(x) > f(1) \text{ و با توجه به اکیداً نزولی بودن تابع } f \text{ نتیجه می شود } x < 1 \text{ بنابراین}$$

سؤال ۸۱: اگر f تابعی صعودی با دامنه $[-3, 3]$ باشد و $f(2) = 0$ دامنه تابع $g(x) = \log(f(x+1))$ کدام است؟

- (۱) $[-4, 2]$ (۲) $(1, 3]$ (۳) $(1, 2]$ (۴) $[-4, 1)$

پاسخ: گزینه ۳

برای پیدا کردن دامنه تابع g ابتدا باید نامعادله $f(x+1) > 0$ را حل کنیم چون $f(2) = 0$ پس $f(x+1) > f(2)$ و با توجه به صعودی بودن تابع f نتیجه می شود $x+1 > 2$ و در نتیجه $x > 1$.
از طرف دیگر $D_f = [-3, 3]$ بنابراین $-3 \leq x+1 \leq 3$ و در نتیجه $-4 \leq x \leq 2$. بنابراین دامنه تابع g به صورت $(1, 2]$ است.

سؤال ۸۲: اگر تابع f اکیداً نزولی باشد $D_f = [0, +\infty)$, $f(0) = 2$, $f(1) = 0$ دامنه تابع $g(x) = (fof)(x)$ کدام است؟

- (۱) $[0, +\infty)$ (۲) $[1, +\infty)$ (۳) $[0, 1]$ (۴) $[1, 2]$

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا توجه کنید که: $D_g = D_{fof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \{x \mid x \geq 0, f(x) \geq 0\}$
با توجه به اینکه تابع f اکیداً نزولی است نتیجه می شود: $f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(1) \Rightarrow x \leq 1$
بنابراین: $D_g = \{x \mid x \geq 0, x \leq 1\} = [0, 1]$

سؤال ۸۳: اگر $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ و تابعی با دامنه R و اکیداً صعودی باشد دامنه تابع $g(x) = \sqrt{3 - (fof)(x)}$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, 1]$ (۲) $(-\infty, 2]$ (۳) $[1, +\infty)$ (۴) $[3, +\infty)$

پاسخ: گزینه ۱

دامنه تابع g از حل نامعادله زیر به دست می آید:

$$3 - (fof)(x) \geq 0 \Rightarrow f(f(x)) \leq 3 \Rightarrow f(f(x)) \leq f(2)$$

با توجه به اینکه تابع f اکیداً صعودی است نتیجه می شود: $f(x) \leq 2 \Rightarrow f(x) \leq f(1)$

مجدداً از اکیداً صعودی بودن تابع f نتیجه می شود $x \leq 1$.

$$D_g = (-\infty, 1]$$

تست ترکیب دو تابع و دامنه fog و gof

سؤال ۱: برای هر a و b حقیقی تابع f در تساوی $f(a+b) = f(a) + f(b) - 2f(ab)$ صدق می کند. در این صورت $f(4)$ برابر کدام است.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) صفر (۴) ۴

سؤال ۲: هرگاه $xf(y) + yf(x) = f(xy)$, $x, y > 0$ ضابطه f کدام می تواند باشد.

- (۱) $f(x) = \log x$ (۲) $f(x) = x \log x$ (۳) $f(x) = x - \log x$ (۴) $f(x) = x + \log x$

سؤال ۳: اگر $f\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = x + \frac{1}{x}$ باشد $f(\cos x)$ ضابطه f با فرض $0 < x < \frac{\pi}{2}$ کدام است.

- (۱) $\frac{2}{\sin x}$ (۲) $2 \tan x$ (۳) $\frac{1}{\sin x}$ (۴) $\tan x$

سؤال ۴: اگر برای هر a, b حقیقی رابطه های $f(a+b) = f(a)f(b)$ و $f(0) \neq 0$ برقرار باشد حاصل $f(-x)$ کدام نمی تواند باشد. (ویژه تیزهوشان)

- (۱) $f(x)$ (۲) $-f(x)$ (۳) $f\left(\frac{1}{x}\right)$ (۴) $\frac{1}{f(x)}$

سؤال ۵: اگر برای هر $x \leq -1$, $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{x}$ باشد برای $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ حاصل $f\left(\frac{2}{\cos \alpha}\right)$ برابر کدام است.

- (۱) $-2 \tan \alpha$ (۲) $-\tan \alpha$ (۳) $\tan \alpha$ (۴) $2 \tan x$

سؤال ۶: در تابع $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & x > 3 \\ 2x+3 & x \leq 3 \end{cases}$ مقدار $f(f(5)) + f(f(1))$ کدام است؟ (تجربی ۹۰)

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

سؤال ۷: اگر $f(x) = [x]$, $g(x) = \frac{x}{1-x}$ آنگاه $fog(\sqrt{2})$ کدام است؟ (تجربی ۸۶)

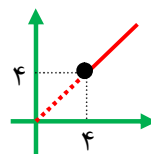
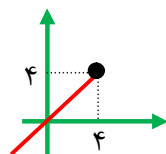
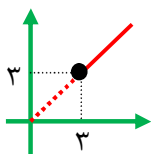
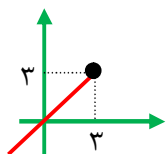
- (۱) -۴ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) -۱

سؤال ۸: اگر f یک تابع خطی و نزولی اکید باشد بطوریکه $f(x) = 4x - 4$ حاصل $f \circ f^{-1}(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}(x+4)$ (۲) $\frac{1}{4}(x+8)$ (۳) $\frac{1}{2}(4x+1)$ (۴) $\frac{1}{4}(x+2)$

سؤال ۹: اگر نمودار تابع $f(x) = 3 + \sqrt{4-x}$ نمودار تابع $f \circ f^{-1}$ در کدام گزینه آمده است؟

- (۱) (۲) (۳) (۴)



سؤال ۱۰: اگر $f = \{(0, -3), (3, 2), (a, b)\}$ ، $g = \{(-1, 1), (3, 4), (a+1, 3b)\}$ ، اگر $f^{-1}og(3) = -1$

مقدار $gof^{-1}(b)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۱۲

سؤال ۱۱: اگر $f = \{(1, 2), (2, 3), (-1, 4), (3, 1)\}$ باشد آنگاه $\frac{f}{f \circ f}$ مجموع اعضای برد تابع کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{6}$ (۲) ۳ (۳) $\frac{25}{6}$ (۴) $\frac{23}{6}$

سؤال ۱۲: توابع $f = \{(2, 3), (a, 2), (b, -1)\}$ ، $g = \{(1, -1), (3, 4), (2, 3), (-1, 2)\}$ مفروض اند اگر

$(3, -1) \in fog$ ، $(1, 3) \in gof$ باشد حاصل $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۲ (۴) ۴

سؤال ۱۳: اگر $f = \{(2, 3), (3, 4), (4, 3)\}$ ، $g = \{(3, 2), (4, 0), (5, 8)\}$ باشد آنگاه $(f + g) \circ f$ چند عضو

دارد؟

- (۱) هیچ (۲) یک (۳) دو (۴) سه

سؤال ۱۴: اگر $g(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ ، $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ باشد حاصل $g\left(a + \frac{1}{a}\right) + g\left(a - \frac{1}{a}\right)$ به ازای

$x > 1$ کدام است؟

- (۱) $2a$ (۲) $\frac{2}{a}$ (۳) a (۴) $\frac{1}{a}$

سؤال ۱۵: اگر $g(x) = \sqrt{2x + 3}$ ، $f(x) = 2x^2 + 2x - 1$ باشد مساحت ناحیه محدود به نمودار

$y = gof(x)$ و خط $y = 3$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) ۴ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) ۳

سؤال ۱۶: هرگاه $f(x) = 1 - |1 - x|$ ضابطه $f \circ f(-x)$ کدام است؟

- (۱) $f(x)$ (۲) $f(-x)$ (۳) $-f(x)$ (۴) $-f(-x)$

سؤال ۱۷: فرض کنید $f(x) = [x] + [-x]$ ضابطه $g(x)$ کدام باشد تا مجموعه جواب معادله

$gof(x) = 1$ برابر R باشد؟

- (۱) $x^2 - x - 1$ (۲) $x^2 + x - 1$ (۳) $x^2 - x + 1$ (۴) $x^2 + x + 1$

سؤال ۱۸: اگر $fog(x) = \frac{2x}{3x - 2}$ ، $g(x - 1) = 4 - 3x$ مقدار $f \circ f(1)$ چه عددی است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) صفر

سؤال ۱۹: اگر $f(x) = x^2 - x$ ، $f(g(x)) = x^4 + 2x^3 - x$ باشد ضابطه $g(x)$ کدام است؟

- (۱) $x^2 + x$ (۲) $x^2 - x$ (۳) $x^2 - 2x$ (۴) $x^2 + 2x$

سؤال ۲۰: اگر $fog(x) = x^2 - 7$ و $f(x) = x^2 + 6x + 2$ باشد ضابطه $g(x)$ کدام است؟

(۱) $x^2 + 3$ (۲) $x^2 - 3$ (۳) $3 - x^2$ (۴) $\frac{-x^2 - 3}{2}$

سؤال ۲۱: اگر $fog(x) = 6x^3 + 4x^6$ و $g(x) = 2x^3 - 1$ باشد ضابطه $f(x)$ کدام است؟

(۱) $x^2 + 3$ (۲) $x^2 + 4x + 4$ (۳) $x^2 + 5x + 4$ (۴) $x^2 + 4$

سؤال ۲۲: اگر $g(x) = 2x + 1$ و $fog(x) = 8x^2 + 6x + 5$ تابع f در کدام بازه یک به یک است؟

(۱) $[0, +\infty)$ (۲) $(-\infty, 1]$ (۳) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ (۴) $[1, +\infty)$

سؤال ۲۳: اگر $fog(x) = 4x^2 - 1$ و $g^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$ ضابطه $gof(x)$ کدام است؟

(۱) $2x^2 - 4x + 1$ (۲) $2x^2 + 4x - 1$ (۳) $4x^2 + 2x + 1$ (۴) $2x^2 - x - 1$

سؤال ۲۴: اگر $fog(x) = 4x^2 - 1$ و $g^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$ ضابطه $gof(x)$ کدام است؟

(۱) $2x^2 - 4x + 1$ (۲) $2x^2 + 4x - 1$ (۳) $4x^2 + 2x + 1$ (۴) $2x^2 - x - 1$

سؤال ۲۵: می دانیم f ، g توابع وارون پذیر هستند به طوری که $g^{-1}(1) = 2$ اگر $f^{-1}og(x) = x^3 + 3x$ مقدار چه عددی $f(14)$ است؟

(۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۱۴

سؤال ۲۶: هرگاه $f(x) = g\left(1 - \frac{2}{x}\right)$ و $g^{-1}(x) = 2 + \frac{5}{x}$ مقدار $f^{-1}(5)$ چه عددی است؟

(۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) -۲

سؤال ۲۷: اگر $f = \{(2, 3), (1, 2), (-1, 1)\}$ و $g(x) = x^3 + 3x$ باشد حاصل $f^{-1}og^{-1}(4)$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) -۱

سؤال ۲۸: اگر f یک چند جمله ای باشد $g(x) = x^2 - 2x$ و $gof(x) = 9x^2 - 1$ معکوس تابع fog کدام است؟

(۱) $\frac{x+9}{2}$ (۲) $\frac{x+9}{4}$ (۳) $\frac{x-4}{9}$ (۴) $\frac{x-2}{9}$

سؤال ۲۹: اگر $f(x) = (2x - 3)^2$ و $g(x) = x + 2$ نمودارهای دو تابع f و fog با کدام طول متقاطع اند؟

(سراسری ۹۲)

(۱) -۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{3}{2}$

سؤال ۳۰: تابع با ضابطه $g(x) = x - \sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f محور x ها را در دو نقطه به

طول های $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{6}$ قطع کند آنگاه نمودار تابع fog محور x ها را با کدام طول قطع می کند؟ (سراسری ۹۴)

(۱) $\frac{1}{9}, 3$ (۲) $\frac{1}{9}, \frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{4}, 9$

سؤال ۳۱: دو تابع با ضابطه های $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$ و $g = \{(2, -1), (-1, 4), (3, -2), (-4, -3)\}$

مفروض اند. اگر $g^{-1}(f(a)) = 3$ باشد a کدام است؟ (سراسری ۹۳)

- (۱) -۴ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) ۴

سؤال ۳۲: اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ به طوری که $gof = fo \frac{1}{f}$ ضابطه g کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{x-1}$ (۲) $\frac{1}{x}$ (۳) $-\frac{1}{x}$ (۴) $\frac{1}{1-x}$

سؤال ۳۳: اگر تابع $f(x) = (a-2)x^2 + (2a+1)x - 3$ با دامنه R معکوس پذیر باشد حاصل $f^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$

کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}(x+3)$ (۲) $\frac{x+9}{15}$ (۳) $\frac{1}{3}(x-5)$ (۴) $\frac{1}{9}(x+15)$

سؤال ۳۴: در تابع با ضابطه $f(x) = x^2(2-x)^2$ حاصل کدام $f(1+x) - f(1-x)$ است؟ (تجربی ۸۵)

- (۱) صفر (۲) $4x^2$ (۳) $2x^2$ (۴) $4x^2$

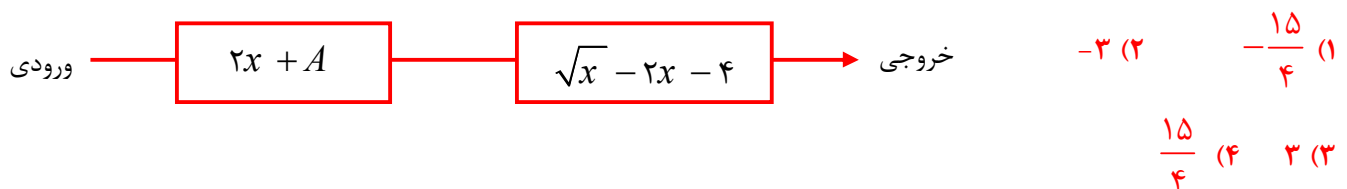
سؤال ۳۵: اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$ آنگاه تابع $f(f(x^2+1))$ کدام است؟

- (۱) $|x|$ (۲) $|x|$ (۳) $\begin{cases} |x| & x > 1 \\ 1 & x \leq 1 \end{cases}$ (۴) صفر

سؤال ۳۶: اگر $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ تابع $g(x) = (f(\sqrt{x}))^2 - f(x)$ چگونه است؟ (ریاضی خارج ۹۱)

- (۱) ثابت (۲) همانی (۳) یک به یک (۴) مثبت

سؤال ۳۷: اگر در شکل زیر خروجی ماشینی برای ورودی ۲ برابر ۵- باشد A کدام است؟ (ریاضی خارج ۸۳)



سؤال ۳۸: اگر $f(x) = [x]$ مجموعه مقادیر $f(x - f(x))$ کدام است؟ (تجربی خارج ۸۵)

- (۱) $\{0\}$ (۲) $\{\}$ (۳) $\{0, 1\}$ (۴) $\{-1, 0, 1\}$

سؤال ۳۹: دو تابع با ضابطه های $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^2 + x - 2$ مفروض اند اگر

$g(f(x)) = -2$ آنگاه مجموعه مقادیر x کدام است؟ (ریاضی ۸۹)

- (۱) $R - Z$ (۲) Z (۳) R (۴) $\emptyset$

سؤال ۴۰: اگر $f(x) + xf(-x) = 3x + 1$ آنگاه $f(2)$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{11}{5}$ (۲) $\frac{19}{5}$ (۳) $\frac{13}{5}$ (۴) $\frac{17}{5}$

سؤال ۴۱: اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, $g(x) = \sqrt{x^2 + 4}$, $f\left(a + \frac{1}{a}\right) + g\left(a + \frac{1}{a}\right) = 2a$ آنگاه حدود a کدام است.

- (۱) $0 < a \leq 1$ (۲) $a \geq 1$ (۳) $0 < |a| \leq 1$ (۴) $|a| \geq 1$

سؤال ۴۲: اگر تابع $f(x) = \frac{\sqrt{2-x^2}}{x}$ و تابع $|x| < \frac{\pi}{2}$ باشند دامنه fog کدام است. (داخلی تجربی ۸۷)

- (۱) $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ (۲) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ (۳) $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ (۴) $[-1, 0) \cup (0, 1]$

پاسخنامه تست ترکیب دو تابع و دامنه fog و gof

-۱

$$\begin{cases} a=b=1 \Rightarrow f(2) = f(1) + f(1) - 2f(1) = 0 \Rightarrow f(2) = 0 \\ a=b=2 \Rightarrow f(4) = \underbrace{f(2) + f(2) - 2f(4)}_0 \Rightarrow f(4) = 0 \end{cases}$$

۲- می دانیم که $x, y > 0$ و $x, y \neq 0$ طرفین رابطه را بر xy تقسیم می کنیم:

$$xf(y) + yf(x) = f(xy) \Rightarrow \frac{xf(y) + yf(x)}{xy} = \frac{f(xy)}{xy} \Rightarrow \frac{f(y)}{y} + \frac{f(x)}{x} = \frac{f(xy)}{xy}$$

حال اگر فرض کنیم $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ داریم: $g(y) + g(x) = g(xy)$

$$\boxed{\log a + \log b = \log ab}$$

پس $g(x) = \log x \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \log x \Rightarrow f(x) = x \log x$ باشد در نتیجه:

۳- روش اول

$$f\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = x + \frac{1}{x}, \quad \frac{1-x^2}{1+x^2} = y \Rightarrow (y+1)x^2 = 1-y \Rightarrow x^2 = \frac{1-y}{1+y}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} \xrightarrow{x>0} x = \sqrt{\frac{1-y}{1+y}}$$

$$\Rightarrow f(\cos x) = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} + \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} = \sqrt{\frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}}} + \sqrt{\frac{2\cos^2 \frac{x}{2}}{2\sin^2 \frac{x}{2}}}$$

$$= \left| \tan \frac{x}{2} \right| + \left| \cot \frac{x}{2} \right| \xrightarrow{x \text{ در ناحیه اول}} \tan \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{2} = \frac{2}{\sin x}$$

روش دوم: می دانیم $\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$ اگر به جای x ، $\tan \frac{x}{2}$ را قرار دهیم:

$$f\left(\frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}\right) = \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{2} \Rightarrow f(\cos x) = \tan \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{2} = \frac{2}{\sin x}$$

-۴

$$f(a+b) = f(a)f(b)$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{a=b=0} f(0) = f^2(0) \xrightarrow{f(0) \neq 0} \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases} \\ \xrightarrow{b=-a=-x} f(0) = f(x)f(-x) = 1 \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{f(x)} \end{cases}$$

توابعی که در آن $f(a+b) = f(a)f(b)$ یا $f(x) = \frac{1}{f(x)}$ صدق می کنند. اما ممکن است در شرط $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ صدق می کنند. اما ممکن است در

توابعی که در شرایط فوق صدق می کند $\frac{1}{f(x)} = f(x)$ یا $\frac{1}{f(x)} = f\left(\frac{1}{x}\right)$ باشد مانند تابع ثابت $f(x) = 1$

اما هرگز $\frac{1}{f(x)} = -f(x)$ نمی تواند باشد، چون $f^2(x) = -1$ خواهد شد!!!

۵-

$$\text{فرض: } \begin{cases} x + \frac{1}{x} = a \\ x - \frac{1}{x} = b \end{cases}$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4(x)\left(\frac{1}{x}\right) = 4 \Rightarrow a^2 - b^2 = 4 \Rightarrow b^2 = a^2 - 4 \Rightarrow b = \pm\sqrt{a^2 - 4} \Rightarrow f(a) = \pm\sqrt{a^2 - 4}$$

از آنجا که طبق فرض مسئله داریم: $x \leq -1$ پس $b = x - \frac{1}{x} \leq 0$ بوده پس از دو مقدار $\pm\sqrt{a^2 - 4}$ فقط مقدار $b = -\sqrt{a^2 - 4}$ قابل قبول است پس:

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{x} \Rightarrow f(a) = -\sqrt{a^2 - 4} \Rightarrow f\left(\frac{2}{\cos \alpha}\right) = -\sqrt{\left(\frac{2}{\cos \alpha}\right)^2 - 4} = -\sqrt{\frac{4}{\cos^2 \alpha} - 4}$$

$$= -\sqrt{4(1 + \tan^2 \alpha) - 4} = -\sqrt{4 \tan^2 \alpha} = -2|\tan \alpha| \xrightarrow[\tan \alpha < 0]{\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi} -2(-\tan \alpha) = 2 \tan \alpha$$

۶-

$$f(5) \xrightarrow{\Delta > 3} 5 - \sqrt{5 + 4} = 5 - \sqrt{9} = 2 \Rightarrow f(f(5)) = f(2) \xrightarrow{2 < 3} 2(2) + 3 = 7$$

$$f(1) \xrightarrow{1 < 3} 2(1) + 3 = 5 \Rightarrow f(f(1)) = f(5) \xrightarrow{\Delta > 3} 5 - \sqrt{5 + 4} = 2$$

$$\Rightarrow f(f(5)) + f(f(1)) = 7 + 2 = 9$$

۷-

$$g(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \times (1 + \sqrt{2})}{(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2} + 2}{-1} = -2 - \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow f(g(\sqrt{2})) = f(-2 - \sqrt{2}) = \underbrace{[-2 - \sqrt{2}]}_{\text{حدوداً } -3/4} = -4$$

۸- پاسف: گزینه ۱

چون f یک تابع قطعی است پس $f(x) = ax + b$ به این ترتیب:

$$f \circ f(x) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b = 4x - 4$$

f تابع نزولی اکید است پس $a < 0$.

$$\begin{cases} a^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases} \\ ab + b = -4 \Rightarrow -2b + b = -4 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow f(x) = -2x + 4 \end{cases}$$

$$f(x) = -2x + 4 \Rightarrow x = \frac{4 - f(x)}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{4 - x}{2}$$

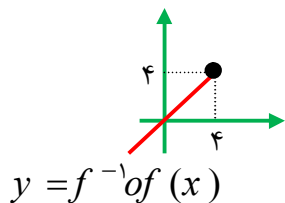
اینک $(x) f^{-1} \circ f^{-1}$ را به دست می آوریم.

$$f^{-1} \circ f^{-1}(x) = f^{-1}(f^{-1}(x)) = \frac{4 - f^{-1}(x)}{2} = \frac{4 - \frac{4-x}{2}}{2} = \frac{4+x}{4}$$

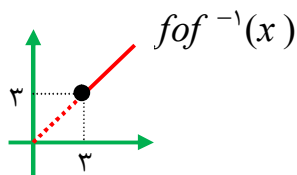
$$f^{-1} \circ f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(4+x)$$

۹- پاسخ: گزینه ۳

اولاً تابع معکوس پذیر است ثانیاً $D_f = (-\infty, 4], R_f = [3, +\infty)$



$$y = f^{-1} \circ f(x) = x, x \in D_f \Rightarrow x \leq 4$$



$$y = f \circ f^{-1}(x) = x, x \in R_f \Rightarrow x \geq 3$$

۱۰- پاسخ: گزینه ۱

برای حل تست داریم:

$$f^{-1} \circ g(3) = -1 \Rightarrow \begin{cases} g(3) = f(-1) \\ g(3) = 4 \end{cases} \Rightarrow f(-1) = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases}$$

$$g = \{(5, 1), (3, 2), (0, 12)\}$$

$$g \circ f^{-1}(b) = g \circ f^{-1}(4) = g(f^{-1}(4)) = g(-1) = 1$$

۱۱- پاسخ: گزینه ۳

$$(1, 2), (2, 3) \in f \Rightarrow (1, 3) \in f \circ f$$

$$(2, 3), (3, 1) \in f \Rightarrow (2, 1) \in f \circ f$$

$$(3, 1), (1, 2) \in f \Rightarrow (3, 2) \in f \circ f$$

$$\Rightarrow f \circ f = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$$

اعضای مشترک دامنهٔ توابع $f, f \circ f$ ، ۱، ۲، ۳ هستند پس در این ورودی های مشترک خروجی های آنها را برهم تقسیم می کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{f}{f \circ f} &= \left\{ \left(1, \frac{2}{3}\right), \left(2, \frac{3}{1}\right), \left(3, \frac{1}{2}\right) \right\} \Rightarrow R_{\frac{f}{f \circ f}} = \left\{ \frac{2}{3}, 3, \frac{1}{2} \right\} \Rightarrow \frac{2}{3} + 3 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{4 + 18 + 3}{6} = \frac{25}{6} \end{aligned}$$

۱۲- پاسخ: گزینه ۲

از آنجایی که $(3, -1) \in f \circ g$ است داریم: $f(g(3)) = -1$

$$f(\underbrace{g(3)}_4) = f(4) = -1 \text{ است پس: } g(3) = 4 \text{ از طرفی}$$

از آنجا که $(b, -1) \in f$ است پس $b = 4$ فوادر بود:

$$\begin{cases} f(b) = -1 \\ f(4) = -1 \end{cases} \Rightarrow b = 4$$

$$3 \xrightarrow{g} 4 \xrightarrow{f} -1$$

از آن که $(1, 3) \in \text{gof}$ است داریم: $g(f(1)) = 3$

از طرفی $g(2) = 3$ است پس $f(1) = 2$ فوادر بود.

از آن جا که $(a, 2) \in f$ است پس $a = 1$ است:

$$\begin{cases} f(a) = 2 \\ f(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 1$$

$$1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} 3$$

$\parallel$
 a

$$\Rightarrow a + b = 1 + 4 = 5$$

۱۳- پاسف: گزینه ۴

اگر فرض کنیم $h = f + g$ داریم: $h = \{(3, 2+4), (4, 0+3)\} = \{(3, 6), (4, 3)\}$

اگر $(f+g) \circ f = \text{hof}$ پس داریم:

$$\begin{cases} f(2) = 3 \\ h(3) = 6 \end{cases} \Rightarrow \text{hof}(2) = 6 \quad 2 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{h} 6 \Rightarrow (2, 6) \in \text{hof}$$

$$\begin{cases} f(3) = 4 \\ h(4) = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{hof}(3) = 3 \quad 3 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{h} 3 \Rightarrow (3, 3) \in \text{hof}$$

$$\begin{cases} f(4) = 3 \\ h(3) = 6 \end{cases} \Rightarrow \text{hof}(4) = 6 \quad 4 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{h} 6 \Rightarrow (4, 6) \in \text{hof}$$

$$\Rightarrow \text{hof} = \{(2, 6), (3, 3), (4, 6)\}$$

پس تابع $(f+g) \circ f$ دارای ۳ عضو است.

۱۴- پاسف: گزینه ۱

$$f\left(a + \frac{1}{a}\right) = \sqrt{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2} - 4 = \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2} + 2} - 4 \Rightarrow \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2} - 2} = \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2} = \left|a - \frac{1}{a}\right|$$

$$f\left(a + \frac{1}{a}\right) = \left|a - \frac{1}{a}\right| = a - \frac{1}{a} \text{ چون } a > 1 \text{ است پس } a - \frac{1}{a} \text{ مثبت است و داریم:}$$

$$\text{اگر } g(x) = \sqrt{x^2 + 4} \text{ داریم:}$$

$$g\left(a - \frac{1}{a}\right) = \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2} + 4 = \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 + 4} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2} + 2} = \sqrt{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2} = \left|a + \frac{1}{a}\right|$$

چون $a > 1$ است $a + \frac{1}{a}$ مثبت است و داریم:

$$g\left(a - \frac{1}{a}\right) = \left|a + \frac{1}{a}\right| = a + \frac{1}{a}$$

$$f\left(a + \frac{1}{a}\right) + g\left(a - \frac{1}{a}\right) = a - \frac{1}{a} + a + \frac{1}{a} = 2a$$

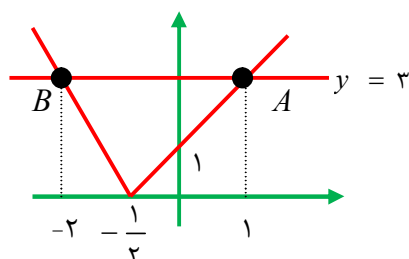
۱۵- پاسخ: گزینه ۱

ضابطه تابع gof را تشکیل می دهیم:

$$\begin{aligned} gof(x) &= g(f(x)) = \sqrt{2f(x) + 3} = \sqrt{2(2x^2 + 2x - 1) + 3} \\ &= \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = \sqrt{(2x + 1)^2} = |2x + 1| \end{aligned}$$

پس $gof(x) = |2x + 1|$ است. با رسم

این نمودار و خط $y = 3$ را به دست می آوریم:



مفتحات نقاط A, B از حل معادله $|2x + 1| = 3$ حاصل می شود:

$$|2x + 1| = 3 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 3 \Rightarrow x = 1 \\ 2x + 1 = -3 \Rightarrow x = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A(1, 3) \\ B(-2, 3) \end{matrix}$$

$$S = \frac{AB \times 3}{2} = \frac{3 \times 3}{2} = 4.5 \text{ در نتیجه:}$$

۱۶- پاسخ: گزینه ۲

$$f(x) = 1 - |1 - x|$$

$$f(-x) = 1 - |1 - (-x)| = 1 - |1 + x|$$

$$fof(-x) = f(f(-x)) = 1 - |1 - f(-x)| = 1 - |1 - \underbrace{(1 - |1 + x|)}_{f(-x)}| = 1 - |x + 1| = 1 - |x + 1| = f(-x)$$

تذکره: $||a|| = |a|$ (۱)

۱۷- پاسخ: گزینه ۴

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \text{ می دانیم}$$

$x \in D_f$ فروبی f - و صفر است حال اگر این دو مقدار وارد تابع g شوند باید فقط فروبی ۱ ایجاد شود. پس می توان گفت

صفر و -1 ریشه های تابع $y = g(x) - 1$ است زیرا اگر به ازای هر $x \in D_f$ اگر $f(x) = 0$ یا $f(x) = -1$ باشد آنگاه $g(0) = g(-1) = 1$. اگر صفر و -1 ریشه های یک چند جمله ای باشند آن چند جمله ای به صورت $ax(x+1)$ است در نتیجه:

$$g(x) - 1 = ax(x+1) \Rightarrow g(x) = ax(x+1) + 1$$

که به ازای $a = 1$ داریم: $g(x) = x^2 + x + 1$

۱۸- پاسخ: گزینه ۲

در تساوی $g(x-1) = 4 - 3x$ اگر به جای x قرار دهیم $x+1$ ضابطه $g(x)$ به دست می آید:

$$g(x) = 4 - 3(x+1) = -3x + 1$$

$$fog(x) = \frac{2x}{3x-2} \Rightarrow f(1-3x) = \frac{2x}{3x-2}$$

برای مناسبه $fof(1)$ لازم است $f(1)$ را به دست آوریم با توجه به رابطه بالا باید $1-3x = 1$ باشد تا $f(1)$ را بتوانیم به دست آوریم:

$$1-3x = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(1) = \frac{2 \times 0}{3 \times 0 - 2} = 0$$

پس $f(1) = 0$ است در نتیجه $fof(1) = f(f(1)) = f(0) = f(0)$ حال باید از رابطه $f(1-3x) = \frac{2x}{3x-2}$ به دست آوریم پس باید:

$$1-3x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow f(0) = \frac{2 \times \frac{1}{3}}{3 \times \frac{1}{3} - 2} = -\frac{2}{3}$$

$$fof(1) = f(0) = -\frac{2}{3}$$

۱۹- پاسخ: گزینه ۱

$$f(x) = x^2 - x$$

اگر به جای x در تساوی بالا قرار دهیم $g(x)$ داریم:

$$fog(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 - g(x) = x^4 + 2x^4 - x$$

با مربع سازی سمت چپ تساوی بالا داریم:

$$\left(g(x) - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = x^4 + 2x^2 - x$$

$$\left(g(x) - \frac{1}{2}\right)^2 = x^4 + 2x^2 - x + \frac{1}{4}$$

از طرفی به کمک اتحاد $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ داریم:

$$x^4 + 2x^3 - x + \frac{1}{4} = \left(x^2 + x - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(g(x) - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(x^2 + x - \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \begin{cases} g(x) - \frac{1}{2} = x^2 + x - \frac{1}{2} \\ g(x) - \frac{1}{2} = -\left(x^2 + x - \frac{1}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(x) = x^2 + x \\ g(x) = -x^2 - x + 1 \end{cases}$$

که $g(x) = x^2 + x$ در بین گزینه ها است.

۲۰- پاسخ: گزینه ۲

اگر به جای x در رابطه $y = f(x)$ قرار دهیم $g(x)$ داریم:

$$f(g(x)) = (g(x))^2 + 6g(x) + 2$$

$$(g(x))^2 + 6g(x) + 2 = x^4 - 7$$

به کمک اتحاد مربع دو جمله ای در سمت چپ تساوی بالا داریم:

$$\underbrace{(g(x) + 3)^2}_{(g(x))^2 + 6g(x) + 9} - 9 + 2 = x^4 - 7 \Rightarrow (g(x) + 3)^2 = x^4 \Rightarrow \begin{cases} g(x) + 3 = x^2 \Rightarrow g(x) = x^2 - 3 \\ g(x) + 3 = -x^2 \Rightarrow g(x) = -x^2 - 3 \end{cases}$$

۲۱- پاسخ: گزینه ۳

$$g(x) = 2x^3 - 1$$

$$fog(x) = f(g(x)) = f(2x^3 - 1) = 6x^3 + 4x^6$$

اگر فرض کنیم $t = 2x^3 - 1$ ، x^3 را بر حسب t به دست می آوریم و در رابطه بالا جایگذاری می کنیم:

$$t = 2x^3 - 1 \Rightarrow x^3 = \frac{t+1}{2} \Rightarrow f(t) = 6x^3 + 4(x^3)^2 = 6\left(\frac{t+1}{2}\right) + 4\left(\frac{t+1}{2}\right)^2 = 3t + 3 + (t+1)^2$$

$$= t^2 + 5t + 4 \Rightarrow f(x) = x^2 + 5x + 4$$

۲۲- پاسخ: گزینه ۴

اگر $t = 2x + 1$ باشد داریم:

$$\begin{cases} fog(x) = f(g(x)) = f(2x+1) = 8x^2 + 6x + 5 \\ 2x+1=t \Rightarrow x = \frac{t-1}{2} \end{cases} \Rightarrow f(t) = 8\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{t-1}{2}\right) + 5$$

$$\Rightarrow 2(t-1)^2 + 3(t-1) + 5 = 2t^2 - t + 4$$

پس ضابطه f به این صورت است: $f(x) = 2x^2 - x + 4$

با توجه به آنکه f یک سهمی است به ازای x های بیش از x رأس سهمی به ازای x های بیش از x رأس سهمی یا به ازای x

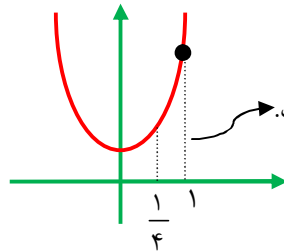
$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{4}$$

های کمتر از x رأس سهمی یک به یک فواید بود؛

پس f به ازای بازه های زیرمجموعه $A = \left[+\frac{1}{4}, +\infty\right)$ یا $B = \left(-\infty, +\frac{1}{4}\right]$ یک به یک است.

گزینه های ۳ و ۲ نادرست اند. زیرا $x = \frac{1}{4}$ نقطه درونی این بازه ها است یا به عبارتی زیرمجموعه A یا B نیستند. اما به ازای

بازه (۴) تابع f یک به یک است. به شکل دقت کنید:



۲۳- پاسخ: گزینه ۱

ابتدا تابع g را به دست می آوریم برای این منظور تابع معکوس g^{-1} را به دست می آوریم:

$$g^{-1}(x) = \frac{x-1}{2} \Rightarrow y = \frac{x-1}{2} \Rightarrow 2y = x-1 \Rightarrow x = 2y+1 \Rightarrow g(x) = 2x+1$$

با توجه به آن که $fog(x) = 4x^2 - 1$ داریم:

$$f(g(x)) = 4x^2 - 1 \xrightarrow{g(x)=2x+1} f(2x+1) = 4x^2 - 1$$

اگر $2x+1 = t$ باشد داریم $2x = t-1$ در نتیجه:

$$4x^2 - 1 = (\overbrace{2x}^{t-1} - 1)(2x+1) = (t-1-1)(t) = (t-2)t = t^2 - 2t$$

$$f(t) = t^2 - 2t \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x$$

با توجه به آن که $f(x) = x^2 - 2x$ و $g(x) = 2x+1$ است تابع gof را به دست می آوریم:

$$gof(x) = g(f(x)) = 2f(x) + 1 = 2(x^2 - 2x) + 1 = 2x^2 - 4x + 1$$

۲۴- پاسخ: گزینه ۱

ابتدا تابع g را به دست می آوریم برای این منظور تابع معکوس g^{-1} را به دست می آوریم:

$$g^{-1}(x) = \frac{x-1}{2} \Rightarrow y = \frac{x-1}{2} \Rightarrow 2y = x-1 \Rightarrow x = 2y+1 \Rightarrow g(x) = 2x+1$$

با توجه به آنکه $fog(x) = 4x^2 - 1$ داریم:

$$f(g(x)) = 4x^2 - 1 \xrightarrow{g(x)=2x+1} f(2x+1) = 4x^2 - 1$$

اگر $2x+1 = t$ باشد داریم $2x = t-1$ در نتیجه:

$$4x^2 - 1 = (\overbrace{2x}^{t-1} - 1)(2x+1) = (t-1-1)(t) = (t-2)t = t^2 - 2t$$

$$f(t) = t^2 - 2t \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x$$

با توجه به آنکه $f(x) = x^2 - 2x$ و $g(x) = 2x+1$ است تابع gof را به دست می آوریم:

$$gof(x) = g(f(x)) = 2f(x) + 1 = 2(x^2 - 2x) + 1 = 2x^2 - 4x + 1$$

۲۵- پاسخ: گزینه ۳

اگر $g^{-1}(1) = 2$ باشد داریم $g(2) = 1$ از طرفی:

$$f^{-1}g(x) = x^3 + 3x \Rightarrow f^{-1}(g(x)) = x^3 + 3x \xrightarrow{x=2} f^{-1}(g(2)) = 2^3 + 6 = 14$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\underbrace{g(2)}_1) = 14 \Rightarrow f^{-1}(1) = 14 \Rightarrow f(14) = 1$$

۲۶- پاسخ: گزینه ۱

اگر $f^{-1}(5) = \alpha$ باشد داریم $f(\alpha) = 5$ از طرفی داریم:

$$f(\alpha) = g\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) \Rightarrow g\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) = 5 \Rightarrow g^{-1}(5) = 1 - \frac{2}{\alpha}$$

از طرفی داریم $g^{-1}(5) = 2 + 1 = 3$ در نتیجه پس:

$$g^{-1}(x) = 2 + \frac{5}{x}$$

$$\begin{cases} g^{-1}(5) = 3 \\ g^{-1}(5) = 1 - \frac{2}{\alpha} \Rightarrow 1 - \frac{2}{\alpha} = 3 \Rightarrow \alpha = -1 \end{cases}$$

پس $f^{-1}(5) = -1$ و $f(-1) = 5$ است

۲۷- پاسخ: گزینه ۴

$$f^{-1}og^{-1}(4) = f^{-1}(g^{-1}(4))$$

ابتدا $g^{-1}(4)$ را به دست می آوریم:

$$g(\alpha) = \alpha^3 + 3\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 1 \text{ است پس: } g^{-1}(4) = \alpha \text{ باشد}$$

در نتیجه $g^{-1}(4) = 1$ است و داریم:

$$f^{-1}(\underbrace{og^{-1}(4)}_1) = f^{-1}(1) = -1$$

$$(-1, 1) \in f \Rightarrow (1, -1) \in f^{-1}$$

۲۸- پاسخ: گزینه ۳

$$g(x) = x^3 - 2x$$

$$\begin{cases} g(f(x)) = f(x)^3 - 2f(x) \\ gof(x) = 9x^3 - 1 \end{cases} \Rightarrow f(x)^3 - 2f(x) = 9x^3 - 1 \Rightarrow (f(x) - 1)^3 - 1 = 9x^3 - 1$$

$$\Rightarrow (f(x) - 1)^3 = (3x)^3 \Rightarrow \begin{cases} f(x) - 1 = 3x \Rightarrow f(x) = 3x + 1 \Rightarrow fof(x) = 9x + 4 \\ f(x) - 1 = -3x \Rightarrow f(x) = -3x + 1 \Rightarrow fof(x) = -9x - 2 \end{cases}$$

در بین گزینه ها معکوس تابع $y = 9x + 4 \Rightarrow x = \frac{y-4}{9} \Rightarrow (f \circ f)^{-1}(x) = \frac{x-4}{9}$ وجود دارد؛

۲۹- پاسخ: گزینه ۲

ابتدا ضابطه تابع fog را به دست می آوریم: $f \circ g(x) = f(g(x)) = (2(x+2)-3)^2 = (2x+1)^2$

حال با برابر قرار دادن $f(x)$, fog(x) طول نقاط برخورد را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} g(x) = x + 2 \\ f \circ g(x) = (2x+1)^2 \end{cases} \Rightarrow (2x+1)^2 = (2x-3)^2 \Rightarrow \begin{cases} 2x+1 = 2x-3 \Rightarrow \text{جواب ندارد} \\ 2x+1 = -2x+3 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

پس دو تابع در نقطه ای به طول $\frac{1}{2}$ متقاطع اند.

۳۰- پاسخ: گزینه ۲

اگر تابع f معور x ها را در نقاطی به طول ۶ و $-\frac{1}{4}$ قطع کند داریم: $f(6) = f(-\frac{1}{4}) = 0$

تابع fog زمانی معور x ها را قطع می کند که $f \circ g(x) = 0$ باشد. یعنی در نقاطی که به ازای طول آنها (x های که)

$g(x) = 6$ یا $g(x) = -\frac{1}{4}$ باشد:

$f \circ g(x) = 0 \Rightarrow \{x \in D_g \mid f(g(x)) = 0\}$

$$\begin{cases} x - \sqrt{x} = 6 \Rightarrow x = 9 \\ x - \sqrt{x} = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow x \in \left\{9, \frac{1}{4}\right\}$$

تذکر: در معادلات فوق با توجه به آن که حاصل $x - \sqrt{x}$ یک عدد گویا است به کمک حدس مقدار x را به دست آوریم (البته از گزینه ها نیز می توانیم کمک بگیریم).

۳۱- پاسخ: گزینه ۱

می دانیم $g^{-1}(\alpha) = \beta$ باشد داریم: $g(\beta) = \alpha$. پس چون $g^{-1}(f(a)) = 3$ است پس $g(3) = f(a)$ است

پس $g(3) = f(a) = -2$ است. پس با توجه به ضابطه f, a عددی است که به ازای آن تابع f مقداری منفی ایبار می کند.

با توجه به آنکه به ازای $x \geq 0$ تابع f مقادیر نامنفی ایبار می کند پس باید: $f(a) = -\sqrt{-a} = -2 \Rightarrow a = -4$

۳۲- پاسخ: گزینه ۴

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow \left(f \circ \frac{1}{f}\right)(x) = f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} - 1} = \frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1-f(x)}{f(x)}} \Rightarrow \left(f \circ \frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{1-f(x)}$$

$$g \circ f(x) = \left(f \circ \frac{1}{f}\right)(x) \Rightarrow g(f(x)) = \frac{1}{1-f(x)}$$

اگر $t = f(x)$ باشد داریم: $g(t) = \frac{1}{1-t} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{1-x}$

۳۳- پاسخ: گزینه ۲

می دانیم هر تابع درجه دوم (سه می) در دامنه R قطعاً یک به یک نیست پس باید f یک تابع فطحی باشد پس باید ضریب x^2 صفر باشد:

$$a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f(x) = 5x - 3$$

$$y = 5x - 3 \Rightarrow 5x = y + 3 \Rightarrow x = \frac{y + 3}{5} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + 3}{5} \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{\frac{x}{3} + 3}{5} = \frac{\frac{x + 9}{3}}{5} = \frac{x + 9}{15}$$

۳۴- پاسخ: گزینه ۱

با توجه به ضابطه داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2(2-x)^2 \\ \begin{cases} f(1+x) = (1+x)^2(2-1-x)^2 = (1+x)^2(1-x)^2 \\ f(1-x) = (1-x)^2(2-1+x)^2 = (1-x)^2(1+x)^2 \end{cases} \\ f(1+x) - f(1-x) &= (1+x)^2(1-x)^2 - (1-x)^2(1+x)^2 = 0 \end{aligned}$$

۳۵- پاسخ: گزینه ۱

با توجه به اینکه $x^2 + 1 \geq 1$ برای همواره f از ضابطه پایین تابع f استفاده می کنیم:

$$f(x^2 + 1) = 1 \Rightarrow f(f(x^2 + 1)) = f(1) = 1$$

۳۶- پاسخ: گزینه ۱

تابع g را با استفاده از ضابطه f تشکیل می دهیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + \frac{1}{(\sqrt{x})^2} \Rightarrow f(\sqrt{x}) = x + \frac{1}{x} \\ \Rightarrow (f(\sqrt{x}))^2 &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \end{aligned}$$

بنابراین تابع g برابر است با:

$$g(x) = (f(\sqrt{x}))^2 - f(x) = \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow g(x) = 2 \text{ تابع ثابت}$$

۳۷- پاسخ: گزینه ۲

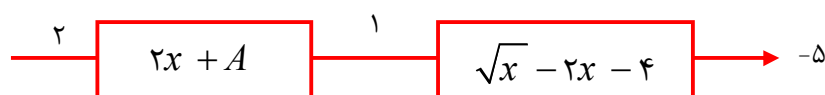
ورودی ماشین ۲ و خروجی آن ۵- است پس شکل زیر را خواهیم داشت:



پس تابع $y = \sqrt{x} - 2x - 4$ را برابر -5 قرار می دهیم تا ورودی آن را مناسبه کنیم:

$$\sqrt{x} - 2x - 4 = -5 \Rightarrow \sqrt{x} - 2x = -1 \Rightarrow x = 1$$

با مناسبه این مقدار شکل را به صورت زیر می بینیم:



$$\Rightarrow 2(2) + A = 1 \Rightarrow A = -3$$

۳۸- پاسف: گزینه ۱

با توجه به اینکه $f(x) = [x]$ داریم: $f(x - f(x)) = f(x - [x])$

حالا در تابع f به جای x ، $x - [x]$ قرار می دهیم: $f(x - [x]) = [x - [x]]$

چون $[x]$ عددی صحیح است می تواند از داخل جزء صحیح بزرگتر بیرون بیاید پس: $f(x - [x]) = [x] - [x] = 0$

۳۹- پاسف: گزینه ۳

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

پس تابع gof را تشکیل می دهیم برای این کار با توجه به تساوی بالا و ضابطه g خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Z} : g(f(x)) = g(0) = 0^2 + 0 - 2 = -2 \Rightarrow g(f(x)) = -2 \\ x \notin \mathbb{Z} : g(f(x)) = g(-1) = (-1)^2 + (-1) - 2 = -2 \Rightarrow g(f(x)) = -2 \end{cases}$$

این که کلاً برقرار بود پس تساوی به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ برقرار است.

۴۰-

$$\begin{aligned} \begin{cases} \xrightarrow{x=2} f(2) + 2f(-2) = 7 \\ \xrightarrow{x=-2} f(-2) - 2f(2) = -5 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} f(2) + 2f(-2) = 7 \\ -2f(2) + f(-2) = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(2) + 2f(-2) = 7 & (1) \\ -4f(2) + 2f(-2) = -10 & (2) \end{cases} \\ \xrightarrow{(1)-(2)} 5f(2) = 17 &\Rightarrow f(2) = \frac{17}{5} \end{aligned}$$

۴۱-

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \Rightarrow D_f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

$$f\left(a + \frac{1}{a}\right) + g\left(a - \frac{1}{a}\right) = \sqrt{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 4} + \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 4} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2} - 2} + \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2} + 2}$$

$$= \left| a - \frac{1}{a} \right| + \left| a + \frac{1}{a} \right|$$

طبق فرض مسئله عبارت فوق باید برابر $2a$ شود از طرفی می دانیم:

$$|x| + |y| \geq |x+y| \text{ و اگر } |x| + |y| = |x+y| \Rightarrow x.y \geq 0$$

$$A = \left| a - \frac{1}{a} \right| + \left| a + \frac{1}{a} \right| \geq 2|a| \xrightarrow{\text{فرض مسئله } A=2a} 2a \geq 2|a| \Rightarrow a \geq 0 \quad (۱)$$

این نامساوی زمانی به تساوی تبدیل می شود که:

$$\left(a - \frac{1}{a} \right) \left(a + \frac{1}{a} \right) \geq 0 \Rightarrow a^2 - \frac{1}{a^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{a^4 - 1}{a^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(a-1)(a+1)(a^2+1)}{a^2} \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{c} -1 & 0 & 1 \\ + & | & - & || & - & | & + \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 1 \\ \text{یا} \\ a \leq -1 \end{cases} \xrightarrow{a \geq 0} a \geq 1 \Rightarrow$$

-۴۲

$$D_f : [-1, 1] - \{0\}$$

$$D_{fog} = \{x \in D|g\} | g \in D_f \} = \{ |x| < \frac{\pi}{4} | \tan x \in D_f \}$$

$$\Rightarrow -1 \leq \tan x \leq 1, \tan x \neq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}, x \neq 0$$

$$\Rightarrow D_{fog} = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right] - \{0\} = \left[-\frac{\pi}{4}, 0 \right) \cup \left(0, \frac{\pi}{4} \right]$$