محاسبه حد یازدهم ریاضی

سؤال ۱: حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۱۲}}(\sqrt{۳}\cos x-\sin x)$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه۴

با ضرب و تقسیم یک عدد ۲ ابتدا عبارت را ساده می کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۱۲}} ۲\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos x-\frac{۱}{۲}\sin x\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۱۲}} ۲\sin\left(\frac{\pi}{۳}-x\right)$$

$$=۲\sin\left(\frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۱۲}\right)=۲\sin\frac{\pi}{۴}=\sqrt{۲}$$

(راه حل دوم) $-(\sin x-\sqrt{۳}\cos x)=-\frac{۱}{\cos\frac{\pi}{۳}}\sin\left(x-\frac{\pi}{۳}\right)=-۲\sin\left(x-\frac{\pi}{۳}\right)$

نکته: برای حل حدهای مثلثاتی می توانیم از اتحادهای زیر کمک بگیریم.

۱) $\sin^۲ x=۱-\cos^۲ x$ ۲) $۱+\cos ۲x=۲\cos^۲ x$

۳) $۱-\cos ۲x=۲\sin^۲ x$ ۴) $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$

سؤال ۲: اختلاف حد چپ و راست تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۱+\cos\pi x}}{\sin\pi x}$ در نقطه $x=۱$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه۳

به کمک اتحادهای $۱+\cos\pi x=۲\cos^۲\frac{\pi x}{۲}$, $\sin\pi x=۲\sin\frac{\pi x}{۲}\cos\frac{\pi x}{۲}$ داریم:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt{۲\cos^۲\frac{\pi x}{۲}}}{۲\sin\frac{\pi x}{۲}\cos\frac{\pi x}{۲}}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt{۲}\left|\cos\frac{\pi x}{۲}\right|}{۲\cos\frac{\pi x}{۲}}=\lim_{x\to ۱^+}-\frac{\sqrt{۲}\cos\frac{\pi x}{۲}}{۲\cos\frac{\pi x}{۲}}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

به طور مشابه حد چپ برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است. بنابراین اختلاف حد چپ و راست برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=\sqrt{۲}$ است.

سؤال ۳: حاصل $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۴}} \dfrac{\tan x - ۱}{\cos ۲x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $-\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه۲

از اتحاد $\cos ۲x = \cos^۲ x - \sin^۲ x$ استفاده می کنیم.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - ۱}{\cos^۲ x - \sin^۲ x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{\frac{\sin x - \cos x}{\cos x}}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{\sin x - \cos x}{-(\sin x - \cos x)\cos x(\cos x + \sin x)} = \frac{۱}{-\frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \sqrt{۲}} = -۱$$

سؤال ۴: حاصل $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۴}} \dfrac{\sin ۴x}{\cot x - \tan x}$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۱-

پاسخ: گزینه۳

با توجه به اتحاد $\cot x - \tan x = ۲\cot ۲x$ داریم:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{۲\overbrace{\sin ۲x \cos ۲x}^{۱}}{۲\cot ۲x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{۲\cos ۲x}{\frac{۲\cos ۲x}{\sin ۲x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \sin ۲x = ۱$$

سؤال ۵: حاصل $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۴}} \dfrac{\cos\left(x + \frac{\pi}{۴}\right)}{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\sqrt[۴]{۲}}$ ۲) $\sqrt[۴]{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

پاسخ: گزینه۲

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{۴}\right) = \cos x \cos\frac{\pi}{۴} - \sin x \sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos x - \sin x)$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{۴}\right)}{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos x - \sin x)}{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}} \times \frac{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(\cos x - \sin x) \times (\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x})}{(\cos x - \sin x)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$$

سؤال ۶: مقدار $\lim_{x \to -\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin 2x}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$ برابر است با:

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه۲

می دانیم $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$ زیرا:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} \underbrace{2\sin x \cos x}_{\sin 2x} = 1 + \sin 2x$$

از طرفی می دانیم $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ پس:

$$1+\sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 = \left(\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = 2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\lim_{x \to \left(-\frac{\pi}{4}\right)} \frac{1+\sin 2x}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = \lim_{x \to \left(-\frac{\pi}{4}\right)} \frac{2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = 2$$

قضیه فشردگی :

اگر در ی همسایگی محذوف a رابطهٔ $g(x) \le f(x) \le h(x)$ برقرار باشد به طوری که $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} f(x) = L$

آنگاه: $\lim_{x \to a} f(x) = L$

سؤال ۷: برای هر $x \neq 2$ رابطهٔ $4x - 5 < f(x) + x < x^2 - 1$ برقرار است. حاصل $\lim_{x \to 2} f(x)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳) ۴) ۴

پاسخ: گزینه۱

طبق فرض رابطهٔ $3x - 5 < f(x) < x^2 - 1 - x$ برقرار است چون $\lim_{x \to 2}(3x-5) = \lim_{x \to 2}(x^2 - 1 - x) = 1$ پس

طبق قضیهٔ فشردگی $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$.

📖 **سؤال ۸:** تابع $y=(x^{2}-1)[x]$ در چند نقطه از بازهٔ $(-2,2)$ حد ندارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

☜ **پاسخ:** گزینه۲

تابع $[x]$ در نقاطی که x صحیح است حد ندارد؛ یعنی نقاط $x=-1,0,1$ ولی چون $x^{2}-1$ در نقاط $x=-1, x=1$ برابر صفر است لذا تابع $y=(x^{2}-1)[x]$ در این نقاط حد دارد. بنابراین تابع داده شده فقط در $x=0$ حد ندارد.

📖 **سؤال ۹:** نشان دهید: $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$

☜ **پاسخ:** می دانیم $-1\le \sin\frac{1}{x}\le 1$ پس تابع $y=\sin\frac{1}{x}$ کران دار است و چون $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ ، پس طبق قضیهٔ تابع کران دار $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$ است.

📖 **سؤال ۱۰:** حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x\,[\tan x]$ را بیابید.

☜ **پاسخ:** فرض کنید $\tan x=\frac{1}{a}$ در این صورت $a\to 0$ و با توجه به وجود حد $a\left[\frac{1}{a}\right]$ در صفر داریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x\,[\tan x]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x\,\frac{\cos x}{\sin x}[\tan x]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x\times\lim_{a\to 0}a\left[\frac{1}{a}\right]=1\times 1=1$$

📖 **سؤال ۱۱:** حاصل $\lim\limits_{x\to 2}(x^{2}-4)\left[\frac{1}{x-2}\right]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

☜ **پاسخ:** گزینه۴

از تغییر متغیر $x-2=t$ استفاده می کنیم:

$$\lim_{x\to 2}(x+2)(x-2)\left[\frac{1}{x-2}\right]=4\times\lim_{x\to 2}(x-2)\left[\frac{1}{x-2}\right]=4\times\lim_{t\to 0}t\left[\frac{1}{t}\right]=4\times 1=4$$

روش دوم: استفاده از رابطهٔ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$:

در بخش قبل مشاهده کردید که $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ به طور مشابه می توان روابط زیر را نیز اثبات نمود.

$$1)\ \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \qquad 2)\ \lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} = 1 \qquad 3)\ \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

نکته: در حالت کلی تر $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin kx}{kx} = 1$ و $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan kx}{kx} = 1$

به طور مثال برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x}$ صورت و مخرج را در ۳ ضرب می کنیم. به $\lim\limits_{x \to 0} 3\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)$ می رسیم حاصل $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x}$ برابر ۱ است. پس $\lim\limits_{x \to 0} 3\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) = 3 \times 1 = 3$.

سؤال ۱۲: حاصل $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x + \sin x}{x + \sin x}$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه۲

چون $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ است پس $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ است. حال صورت و مفرج را بر x تقسیم می کنیم.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{3x}{x} + \frac{\sin x}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{\sin x}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{3 + \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = \frac{3+1}{1+1} = 2$$

سؤال ۱۳: حاصل $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}$ برابر است با:

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $-\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه۴

به کمک اتحاد مثلثاتی $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$ داریم:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{2\sin^2 x}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{2}\,|\sin x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-\sqrt{2}\sin x}{x} = -\sqrt{2} \times 1 = -\sqrt{2}$$

نکته: طبق قضیهٔ فشردگی داریم: $\lim\limits_{x \to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$

سؤال ۱۴: حاصل حدهای زیر را بیابید.

$$۱)\ \lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{x^{۲}}$$

پاسخ: صورت ومفرج را در $۱+\cos x$ ضرب و تقسیم می کنیم.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{x^{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{x^{۲}}\times\frac{۱+\cos x}{۱+\cos x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos^{۲}x}{x^{۲}\underbrace{(۱+\cos x)}_{۲}}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^{۲}x}{۲x^{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{۲}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{۲}=\frac{۱}{۲}(۱)^{۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\tan x-\sin x}{x^{۳}}$$

پاسخ: از اتحاد $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ استفاده می کنیم.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x-\sin x}{x^{۳}}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^{۳}}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x(۱-\cos x)}{x^{۳}\underbrace{\cos x}_{۱}}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}\times\frac{۱-\cos x}{x^{۲}}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}\times\frac{۲\sin^{۲}\frac{x}{۲}}{x^{۲}}=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\times\frac{۱}{۲}\left(\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\frac{x}{۲}}\right)^{۲}=۱\times\frac{۱}{۲}\times ۱^{۲}=\frac{۱}{۲}$$

دقت کنید حاصل $\lim_{x\to ۰}\dfrac{۱-\cos x}{x^{۲}}$ در قسمت ۱ به یک روش دیگر حل شده است.

روش سوم: تغییر متغیر :

در این روش با تغییر مناسب متغیر حد مورد نظر را به یک حد ساده تر تبدیل می کنیم و سپس حد جدید را محاسبه می کنیم.

به طور مثال برای محاسبهٔ $\lim_{x\to ۰}\dfrac{\sin ۲x}{x}$ از تغییر متغیر $۲x=t$ استفاده می کنیم وقتی $x\to ۰$ آنگاه $t\to ۰$.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۲x}{x}=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin t}{\frac{t}{۲}}=۲\lim_{t\to ۰}\frac{\sin t}{t}=۲\times ۱=۲$$

تذکر: در عباراتی شبیه $\sin f(x)$ وقتی $f(x)\to ۰$ از تغییر متغیر $t=f(x)$ استفاده می کنیم.

سؤال ۱۵: حاصل $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\sqrt{x}-1)}{x-1}$ را بیابید.

پاسخ: فرض کنید $t=\sqrt{x}-1$ در این صورت $t\to 0$ داریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\sqrt{x}-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\times\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

تذکر: وقتی $x\to a$ از تغییر متغیر $x-a=t$ استفاده می کنیم. در این صورت $t\to 0$. در سوالات مثلثاتی این تغییر متغیر بسیار سودمند است.

سؤال ۱۶: حاصل $\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin 3x}$ برابر کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{2}}{6}$ ۲) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

پاسخ: گزینه۱

قرار می دهیم $t=x-\pi$ پس $t\to 0^+$.

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin 3x}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{1+\cos(t+\pi)}}{\sin 3(t+\pi)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos t}}{-\sin 3t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}}{-\sin 3t}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}}{-\sin 3t}=\lim_{t\to 0^+}-\sqrt{2}\frac{\sin\frac{t}{2}}{t}\times\frac{t}{\sin 3t}=\lim_{t\to 0^+}-\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\right)\left(\frac{1}{3}\frac{3t}{\sin 3t}\right)$$

$$=-\sqrt{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=-\frac{\sqrt{2}}{6}$$

سؤال ۱۷: حاصل $\lim_{x\to\pi}(x-\pi)\tan\frac{x}{2}$ برابر است با:

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) -2 ۴) 2

پاسخ: گزینه۳

با تغیر متغیر $x-\pi=t$ داریم:

$$x-\pi=t\Rightarrow x=t+\pi\Rightarrow\cos\frac{x}{2}=\cot\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=-\tan\frac{t}{2}$$

$$x\to\pi\Leftrightarrow t\to 0$$

$$\lim_{x\to\pi}(x-\pi)\tan\frac{x}{2}=\lim_{x\to\pi}\frac{x-\pi}{\cot\frac{x}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{-\tan\frac{t}{2}}=-2$$

تذکر: $\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\tan bx}=\frac{a}{b}$

سؤال ۱۸: اگر $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{k\,|\cos x|}{2x-\pi} = \frac{1}{3}$ آنگاه مقدار k کدام است؟

۱) $-\frac{5}{6}$ ۲) $-\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه۴

$$x \to \frac{\pi}{2}^+ \Rightarrow \cos x < 0 \Rightarrow |\cos x| = -\cos x$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{k\,|\cos x|}{2x-\pi} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{-k\cos x}{2x-\pi} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{-k\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{-2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \frac{k}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

سؤال ۱۹: حاصل $\lim\limits_{x \to 2} (x^2-4)\cot\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ چقدر است؟

۱) $\frac{2}{\pi}$ ۲) $\frac{4}{\pi}$ ۳) $\frac{8}{\pi}$ ۴) $\frac{16}{\pi}$

پاسخ: گزینه۳

قرار می دهیم $x-2=t$ پس $t \to 0$ و داریم:

$$\lim_{x \to 2} \underbrace{(x+2)}_{4}(x-2)\cot\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \lim_{t \to 0} 4t\cot\left(\frac{\pi}{2}(2+t)\right) = \lim_{t \to 0} 4t\cot\left(\pi + \frac{\pi}{2}t\right)$$

$$= \lim_{t \to 0} 4t\cot\frac{\pi}{2}t = \lim_{t \to 0} \frac{4t}{\tan\left(\frac{\pi}{2}t\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{4t}{\frac{\pi}{2}t} = \frac{8}{\pi}$$

سؤال ۲۰: اگر $\lim\limits_{x \to 2} (x-a)\tan\frac{\pi}{4}x$ برابر عدد حقیقی b باشد مقدار $a+b\pi$ کدام است؟

۱) ۴-   ۲) ۲-   ۳) ۲   ۴) ۴

پاسخ: گزینه۲

حاصل $\lim\limits_{x \to 2} \tan\frac{\pi}{2}x = \infty$ پس شرط لازم برای وجود حد آن است که $\lim\limits_{x \to 2}(x-a) = 0$ باشد پس $a=2$ است قرار می دهیم $t = x-2$ در این صورت $t \to 0$.

$$\lim_{x\to ۲}(x-۲)\tan\left(\frac{\pi}{۴}x\right)=\lim_{t\to ۰}(t+۲-۲)\tan\left(\frac{\pi}{۴}(t+۲)\right)=\lim_{t\to ۰}\tan\left(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}t\right)$$

$$=\lim_{t\to ۰}\left(-t\cot\frac{\pi}{۴}t\right)=\lim_{t\to ۰}\frac{-t}{\tan\frac{\pi}{۴}t}=\lim_{t\to ۰}\frac{-۴}{\pi}\left(\frac{\frac{\pi}{۴}t}{\tan\frac{\pi}{۴}t}\right)=-\frac{۴}{\pi}\times ۱=-\frac{۴}{\pi}$$

بنابراین $b=-\frac{۴}{\pi}$، در نتیجه $a+b\pi=۲-۴=-۲$.

روش چهارم: هم ارزی:

در همسایگی a تابع $f(x)$ را با یک چند جمله ای هم ارز می نامیم. هرگاه نمودار آنها تقریباً بر هم منطبق باشند (رفتاری کاملاً شبیه هم داشته باشند) در این صورت می توانیم در محاسبهٔ حد به جای $f(x)$ هم ارز آن را جایگزین کنیم.

هم ارزی های مهم: وقتی $u\to ۰$ توابع هم ارز مهم به صورت زیر می باشند. ($\sim$ نماد هم ارزی است.)

۱) $\sin u\sim u$

۲) $\tan u\sim u$

۳) $\cos u\sim ۱-\frac{u^۲}{۲}$

۴) $\cos^m u\sim ۱-m\frac{u^۲}{۲}$

۵) $(۱+u)^n\sim ۱+nu$

۶) $\sqrt[n]{۱+u}\sim ۱+\frac{۱}{n}u$

سؤال ۲۱: حاصل $\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{x\tan x}$ را بیابید.

پاسخ: به جای $\cos x$ هم ارز آن $۱-\frac{x^۲}{۲}$ و به جای $\tan x$ از هم ارز آن x استفاده می کنیم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{x\tan x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\left(۱-\frac{x^۲}{۲}\right)}{xx}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{x^۲}{۲}}{x^۲}=\frac{۱}{۲}$$

سؤال ۲۲: با فرض $\lim_{x\to ۰}\frac{\cos ax-\sqrt{\cos x}}{x^۲}=-\frac{۱}{۴}$ مقدار a کدام است؟

۱) ± ۱ ۲) ± ۲ ۳) ± ۳ ۴) ± ۴

پاسخ: گزینه۱

از هم ارزی $\cos u\sim ۱-\frac{u^۲}{۲}$ استفاده می کنیم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\cos ax-\sqrt{\cos x}}{x^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\frac{a^۲x^۲}{۲}-\sqrt{۱-\frac{x^۲}{۲}}}{x^۲}$$

حال از هم ارزی $\sqrt[n]{1+u}\sim 1+\frac{1}{n}u$ استفاده می کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{a^2x^2}{2}-\left(1-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2a^2+1}{4}x^2}{x^2}=\frac{-2a^2+1}{4}$$

پس $\frac{-2a^2+1}{4}=-\frac{1}{4}$ و لذا $a=\pm 1$.

سؤال ۲۳: حاصل $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{4}\right)^+}\dfrac{\cot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{1+\sin 2x}}$ **برابر است با:**

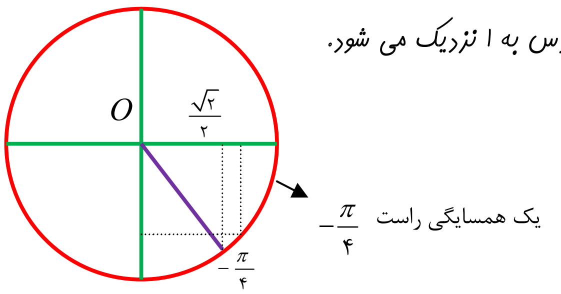
۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $-\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه۱

$$\begin{cases}\cot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{\cos x\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\\ 1+\sin 2x=1+2\sin x\cos x=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=(\sin x+\cos x)^2\end{cases}$$

در یک همسایگی راست $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ مثلاض بازهٔ $\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$، $\cos x$ مثبت و $\sin x$ منفی است اما قدرمطلق $\cos x$ بیشتر از قدرمطلق $\sin x$ است پس حاصل $\sin x+\cos x$ در این همسایگی مثبت است. به دایرهٔ مثلثاتی دقت کنید:
در این همسایگی مقدار قدرمطلق $\cos x$ از قدر مطلق $\sin x$ بیشتر است زیرا هر مقدار به محور کسینوس ها نزدیک می شویم کسینوس به ۱ نزدیک می شود.

$$-\frac{\pi}{4}<x<0\Rightarrow|\sin x+\cos x|=\sin x+\cos x$$



با توجه به توضیحات فوق داریم:

$$\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{4}\right)^+}\frac{\cot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{1+\sin 2x}}=\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{4}\right)^+}\frac{\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}{|\sin x+\cos x|}=\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{4}\right)^+}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sin x+\cos x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sin x+\cos x}$$

$$\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{4}\right)^+}\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{-1}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

سؤال ۲۴: حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x - 2\sin x}{x^3}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) صفر

پاسخ: گزینه۲

می دانیم $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ در نتیجه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x - 2\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x - 2\sin x}{x^3} = \lim -\frac{2\sin x(1-\cos x)}{x^3}$$
$$= \lim -\frac{2\sin x}{x}\times\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{2(1-\cos x)}{x^2}$$

برای محاسبهٔ حد فوق چند راه پیشنهاد می کنیم:

۱) می دانیم $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ در نتیجه:

$$\lim_{x\to 0} -\frac{2(1-\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{4\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} -4\underbrace{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2}_{\frac{1}{2}} = -4\times\frac{1}{4} = -1$$

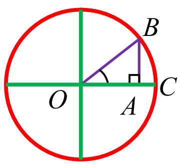
۲) با ضرب صورت و مفرج کسر در $1+\cos x$ داریم:

$$\lim_{x\to 0} -\frac{2(1-\cos x)}{x^2}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} -\frac{2(1-\cos^2 x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} -\frac{2\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$= \lim -2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{1}{1+\cos x} = -2\times 1\times\frac{1}{2} = -1$$

۳) در $x=0$ از هم ارزی $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ استفاده می کنیم:

$$\lim_{x\to 0} -2\frac{(1-\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{2\times\frac{x^2}{2}}{x^2} = -1$$

سؤال ۲۵: اگر $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - \sin x\cos x}{\tan^3 ax} = 4$ باشد مقدار a کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه۴

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \sin x\cos x}{\tan^3 ax} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{\tan^3 ax} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\tan ax}\times\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\tan^2 ax}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan ax}\times\lim_{x\to 0}2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\tan ax}\right)^2=\frac{1}{a}\times 2\times\left(\frac{\frac{1}{2}}{a}\right)^2=\frac{1}{a}\times 2\times\frac{1}{4a^2}=\frac{1}{2a^3}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2a^3}=4\Rightarrow a^3=\frac{1}{8}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

سؤال ۲۷: حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه۲

می توانیم از هم ارزی های $\sin x\sim x$ و $\tan x\sim x$ و $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$ استفاده کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(\cos x-1)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^3}=-\frac{1}{2}$$

سؤال ۲۸: حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه۲

به صورت کسر یک $\cos 2x$ اضافه و یک بار کم می کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x+\cos 2x-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x+\cos 2x-\cos x\cos 2x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x+\cos 2x(1-\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos 2x}{x^2}+\cos 2x\times\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\cos 2x\times\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

سؤال ۲۹: اگر $\lim_{x\to 4}\frac{a+\cos\pi x}{x-4\sqrt{x}+4}=b$ باشد مقدار ab کدام است؟

۱) -4π ۲) $-4\pi^2$ ۳) $-8\pi^2$ ۴) صفر

پاسخ: گزینه۳

چون حد مخرج تابع $f(x)=\frac{a+\cos\pi x}{x-4\sqrt{x}+4}$ در $x=4$ صفر است، پس شرط لازم برای موجود بودن این حد در $x=4$ آن است که حد صورت هم صفر باشد:

$$\lim_{x \to ۴}(a+\cos \pi x)=۰ \Rightarrow a+\cos ۴\pi \Rightarrow a=-۱$$

$$\lim_{x \to ۴}\frac{-۱+\cos \pi x}{x-۴\sqrt{x}+۴}=\lim_{x \to ۴}\frac{-(۱-\cos \pi x)}{(\sqrt{x}-۲)^۲}=\lim_{x \to ۴}\frac{-۲\sin^۲ \frac{\pi x}{۲}}{(\sqrt{x}-۲)^۲}$$

$$=\lim_{x \to ۴}\frac{-۲\sin^۲ \frac{\pi x}{۲}\times(\sqrt{x}+۲)^۲}{(\sqrt{x}-۲)^۲\times(\sqrt{x}+۲)^۲}=\lim_{x \to ۴}\frac{-۲\sin^۲ \frac{\pi x}{۲}\times(\sqrt{x}+۲)^۲}{(x-۴)^۲}$$

چون $\lim_{x \to ۴}(\sqrt{x}+۲)^۲$ غیرصفر است در ادامه برای کم حجم تر شدن محاسبات مقدار آن یعنی ۱۶ را قرار می دهیم:

$$\lim_{x \to ۴} f(x)=\lim\frac{-۲\sin^۲ \frac{\pi}{۲}x\times ۱۶}{(x-۴)^۲}=\lim\frac{-۳۲\sin^۲ \frac{\pi}{۲}x}{(x-۴)^۲}$$

به کمک تغییر متغیر $x-۴=t$ داریم:

$$\begin{cases} x-۴=t \Leftrightarrow x=t+۴ \\ x \to ۴ \Leftrightarrow t \to ۰ \end{cases} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{۲}x=\sin\left(\frac{\pi}{۲}(t+۴)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{۲}t+۲\pi\right)=\sin\frac{\pi}{۲}t$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to ۴}\frac{-۳۲\sin^۲ \frac{\pi}{۲}x}{(x-۴)^۲}=\lim_{t \to ۰}\frac{-۳۲\sin^۲ \frac{\pi}{۲}t}{t^۲}=\lim_{t \to ۰}-۳۲\times\left(\frac{\sin\frac{\pi}{۲}t}{t}\right)^۲=-۳۲\times\frac{\pi^۲}{۴}=-۸\pi^۲$$