



RIAZISARA

www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات
و...**

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)

<https://t.me/riazisara>



ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)

<https://www.instagram.com/riazisara.ir>



حسابان ۱، آشنایی بیشتر با تابع -

۸۱- برای تابع $f: [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ کدام یک از نمایش‌های زیر قابل قبول است؟
 $f(x) = x^2 - 2x$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 - 2x \end{cases} \quad (1) \\ & \begin{cases} f: [-1, 4] \rightarrow [3, 8] \\ f(x) = x^2 - 2x \end{cases} \quad (2) \\ & \begin{cases} f: [-1, 4] \rightarrow [0, +\infty) \\ f(x) = x^2 - 2x \end{cases} \quad (4) \\ & \begin{cases} f: [-1, 4] \rightarrow [-1, 10] \\ f(x) = x^2 - 2x \end{cases} \quad (3) \end{aligned}$$

۸۲- از مجموعه $A = \{a, b, c\}$ به مجموعه $B = \{1, 2\}$ چند تابع می‌توان نوشت به طوری که شامل $(a, 1)$ باشد؟
(۱) ۸ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۶

حسابان ۱، انواع توابع

۸۳- تابع $f: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ با کدام تابع زیر برابر است؟
 $f(x) = x\sqrt{-x}$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} g: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = -\sqrt{-x^3} \end{cases} \quad (1) \\ & \begin{cases} g: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = \sqrt{-x^3} \end{cases} \quad (2) \\ & \begin{cases} g: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = \frac{x^2\sqrt{-x}}{x} \end{cases} \quad (3) \\ & \begin{cases} g: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = \frac{x^2\sqrt{-x}}{x} \end{cases} \quad (4) \end{aligned}$$

۸۴- اگر دامنه تابع f با ضابطه $f(x) = -\sqrt{(2x-6)(2x^2+bx+c)}$ بازه $[2, +\infty)$ باشد، مقدار $f(b+c)$ کدام است؟
(۱) $-4\sqrt{3}$ (۲) صفر (۳) $-2\sqrt{2}$ (۴) وجود ندارد.

۸۵- در کدام یک از معادلات زیر، y تابعی از x می‌باشد؟

$$\begin{aligned} & \sqrt{-x} + 2 = y^2 \quad (1) \\ & y^3 - 4y + x = 5 \quad (2) \\ & x = y^2 + y - 2 \quad (4) \\ & x^2y = 5 \quad (3) \end{aligned}$$

حسابان ۱، وارون تابع

۸۷- تابع $f(x) = -2x^2 - (2a-12)x + 3$ در بازه $(-\infty, a]$ وارون پذیر است. مقدار a چند عدد طبیعی می‌تواند باشد؟
(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۹۵- برد تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x+2} & , 2 \leq [x] \leq 4 \\ \sqrt{5x-1} & , 0 < [x] < 2 \end{cases}$ برابر است با ([] ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) $[2, 3) \cup [\frac{5}{4}, \frac{11}{4}]$ (۲) $[2, 5)$
(۳) $[0, \frac{11}{4})$ (۴) $[\frac{5}{4}, \frac{11}{4})$

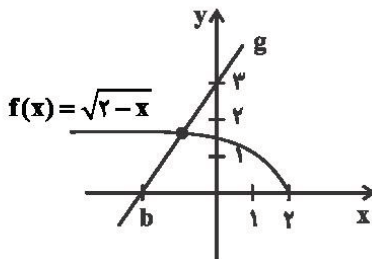
۹۲- وارون تابع $f(x) = x^2 - 6x + 1$; $x \geq 3$ ، خط به معادله $y = 7x - 1$ را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟
(۱) -۷ (۲) -۴ (۳) ۱ (۴) ۸

حسابان ۱ ، اعمال روی توابع

۹۳- اگر $f(x) = \sqrt{x+5}$ ، $g(x) = \sqrt{5-x}$ و $(f \cdot g)(a) = 3$ باشد، برای a چند مقدار متمایز وجود دارد؟
(۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۴

۹۴- اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = (2x^2 - 1)^2$ باشد، مجموع جواب‌های معادله $(f \circ g)(x) = x$ کدام است؟
(۱) صفر (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

۸۸- نمودار تابع f و تابع خطی g به صورت مقابل است. اگر $(f \circ g)(-10) = 3$ باشد، مقدار b کدام است؟



- (۱) $-\frac{7}{2}$
(۲) $-\frac{5}{2}$
(۳) -۲
(۴) -۳

۸۹- اگر توابع $f = \{(3, 5), (4, 7), (9, 6), (7, 2)\}$ و $g = \{(3, 2), (8, 6), (9, 5)\}$ را داشته باشیم. تابع $f \circ g^{-1}$ کدام است؟
(۱) $\{(2, 5), (5, 6)\}$ (۲) $\{(2, 5), (5, 6), (6, 9)\}$
(۳) $\{(5, 2), (6, 5)\}$ (۴) $\{(5, 2), (6, 5), (9, 6)\}$

۹۰- اگر تابع f به صورت $f = \{(-3, -3), (6, 0), (7, 1), (9, -3)\}$ و دامنه تابع g به صورت $D_g = \{-3, \frac{7}{4}, 1\}$ باشد، مجموعه برد تابع $(g \circ f)(x)$ حداکثر چند عضو دارد؟
(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹۱- دو تابع $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ و $g(x) = \sqrt{2x-1}$ مفروض‌اند، دامنه تابع $(f \circ g)(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟
(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۸۶- نمودار تابع $y = x\left[\frac{x}{4}\right] - |x-1|$ در بازه $(1, -2]$ محور x ها را در چند نقطه قطع می‌کند؟ ([] ، نماد جزء صحیح است).

(۴) ۲

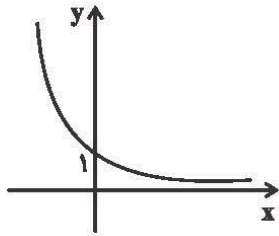
(۳) ۱

(۲) بی‌شمار

(۱) صفر

حسابان ۱، تابع نمایی

۹۶- شکل مقابل نمودار تابع $y = (1-2a)^x$ است. کدام گزینه درست است؟



(۱) $\frac{1}{a} < a$

(۲) $a^2 > a^3$

(۳) $a > \sqrt{a}$

(۴) $(a+1)^2 > 3$

۹۷- نمودار تابع $f(x) = 4^{1-x}$ در بازه $(0, +\infty)$ در چه وضعیتی با نمودار $g(x) = (0/4)^{2x-2}$ قرار دارد؟

(۲) پایین‌تر

(۱) بالاتر

(۴) ابتدا پایین‌تر سپس بالاتر

(۳) ابتدا بالاتر سپس پایین‌تر

۹۸- مجموعه جواب نامعادله $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2x-5} \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{-x+4}$ کدام است؟

(۴) $(-\infty, -3]$

(۳) $[-2, +\infty)$

(۲) $(-\infty, -2]$

(۱) $[-3, +\infty)$

۹۹- جرم یک ماده بعد از هر دهه، ۲۵٪ کاهش می‌یابد. بعد از گذشت ۳۰ سال، حدوداً چند درصد ماده از بین خواهد رفت؟

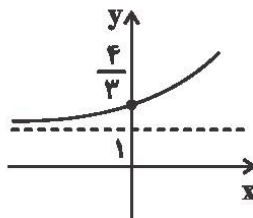
(۴) ۳۳

(۳) ۶۱

(۲) ۵۸

(۱) ۴۷

۱۰۰- نمودار مقابل متعلق به تابع $f(x) = 3^{x-a} + b$ است. کدام است $a+b$ ؟



(۱) ۱

(۲) -۲

(۳) ۲

(۴) صفر

هندسه ۲، چند ضلعي محاطي و محيطي -

۱۰۴- دایره‌ای به شعاع ۴ درون دوزنقه قائم‌الزاویه‌ای محاط شده است. اگر طول ساق غیرقائم این دوزنقه برابر ۱۷ باشد، مساحت دوزنقه کدام است؟

(۴) ۱۰۰

(۳) ۸۰

(۲) ۵۰

(۱) ۴۰

۱۰۵- مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده است، چند برابر مساحت این دایره است؟

(۴) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$

(۳) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

(۲) $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$

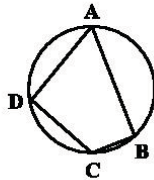
(۱) $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$

- ۱۰۶- یک شش ضلعی منتظم را در راستای قطر بزرگ آن به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. هر یک از چهار ضلعی‌های حاصل کدام ویژگی را دارند؟
 (۱) فقط محاطی هستند.
 (۲) فقط محیطی هستند.
 (۳) هم محاطی و هم محیطی هستند.
 (۴) نه محاطی و نه محیطی هستند.

- ۱۰۷- در مثلث ABC به اضلاع $AB = 2$ ، $AC = 2\sqrt{2}$ و $BC = 2\sqrt{3}$ ، میانه BM را از سمت M امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی مثلث را در نقطه N قطع کند. طول MN کدام است؟

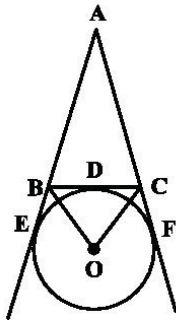
- (۱) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

- ۱۰۹- در شکل زیر اگر $AD = CD$ ، $\hat{B} = \hat{D}$ ، $AB = 14$ و $BC = 2$ باشد، مساحت چهارضلعی $ABCD$ کدام است؟



- (۱) ۶۰
 (۲) ۶۴
 (۳) ۶۸
 (۴) ۷۲

- ۱۱۰- در شکل زیر، اگر $AB = 12$ ، $AC = 13$ و $BD = 3$ باشد، مساحت مثلث OBC کدام است؟



- (۱) ۵
 (۲) $7/5$
 (۳) ۱۰
 (۴) $12/5$

هندسه ۲، تبدیل‌های هندسی -

- ۱۰۸- دو خط موازی d_1 و d_2 در صفحه به فاصله ۳ واحد از یکدیگر قرار دارند. تحت تابع T هر نقطه در این صفحه در صورتی که روی یکی از این دو خط یا بین آن‌ها واقع باشد، بر خودش تصویر می‌شود و در غیر این صورت تصویر آن بر بازتاب نقطه نسبت به خط دورتر منطبق است. کدام گزینه درست است؟

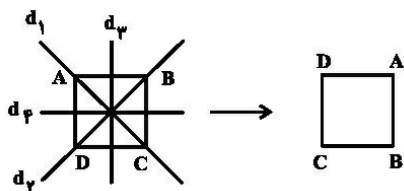
- (۱) T تبدیل نیست.
 (۲) T تبدیل است ولی طولی نیست.
 (۳) T تبدیلی طولی است ولی شیب خط‌ها را ثابت نگه نمی‌دارد.
 (۴) T تبدیلی طولی است که شیب خط‌ها را ثابت نگه می‌دارد.

- ۱۰۹- چه تعداد از گزاره‌های زیر در مورد بازتاب نسبت به خط d درست است؟
 الف) بازتاب تبدیلی طولی است.
 ب) بازتاب شیب خط را همواره ثابت نگه می‌دارد.
 پ) بازتاب فاقد نقطه ثابت تبدیل است.

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

- ۱۰۲- در بازتاب نسبت به خط d ، A' تصویر نقطه A است و تصویر نقطه B بر خودش منطبق است. اگر $AB = 10$ ، $AA' = 3x + 1$ و فاصله نقطه A از خط d ، برابر $x + 2$ باشد، محیط مثلث $AA'B$ کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۵ (۳) ۲۸ (۴) ۳۰



۱۰۳- در ترکیبی از کدام دو بازتاب، مربع ABCD مطابق شکل زیر تغییر می‌کند؟

- (۱) بازتاب ابتدا نسبت به d_3 و سپس نسبت به d_4
- (۲) بازتاب ابتدا نسبت به d_1 و سپس نسبت به d_2
- (۳) بازتاب ابتدا نسبت به d_2 و سپس نسبت به d_4
- (۴) بازتاب ابتدا نسبت به d_1 و سپس نسبت به d_4

آمار و احتمال ، مجموعه - زیر مجموعه -

۱۲۴- اگر مجموعه $A \times B$ دارای ۸ عضو و مجموعه $B \times C$ دارای ۱۲ عضو باشد، در این صورت حداقل تعداد اعضای مجموعه $C \times A$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۲

۱۲۵- اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 1| \leq 2\}$ باشد، مساحت ناحیه متناظر با ضرب دکارتی $A \times B$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۶

۱۲۶- اگر $A = \{a, 3\}$ ، $B = \{4, \frac{a}{4} + 1, b\}$ و $A \times B = B \times A$ باشد، حداقل مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

آمار و احتمال ، مبانی احتمال -

۱۲۱- در صورتی که آزمایشی متشکل از دو آزمایش با فضاهای نمونه S_1 و S_2 باشد، فضای نمونه آن به کدام

صورت است؟

- (۱) $S_1 \times S_2$ (۲) $S_1 \cap S_2$ (۳) $S_1 \cup S_2$ (۴) $(S_1 \cup S_2) - (S_1 \cap S_2)$

۱۲۲- اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، $P(A - B)$ همواره برابر کدام است؟

- (۱) $P(A) - P(B)$ (۲) $P(A \cap B)$ (۳) $P(A \cup B)$ (۴) $P(A)$

۱۲۳- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند، حاصل $P(B') + P(A \cap B)$ کدام است؟

- (۱) $P(A' \cup B)$ (۲) $P(A \cup B')$ (۳) $P(A - B)$ (۴) $P(B - A)$

۱۲۹- یک عدد دو رقمی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این که این عدد نه بر ۳ و نه بر ۴ بخش پذیر باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{43}{90}$ (۲) $\frac{22}{45}$ (۳) $\frac{23}{45}$ (۴) $\frac{47}{90}$

۱۳۰- فضای نمونه یک آزمایش تصادفی برابر $S = \{a, b, c, d, e\}$ است. اگر $P(\{a, b\}) = \frac{2}{7}$ و $P(\{b, c, d\}) = \frac{2}{3}$ باشد.

حاصل $P(b) - P(e)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{21}$ (۲) $\frac{2}{21}$ (۳) $\frac{1}{7}$ (۴) $\frac{2}{7}$

آمار و احتمال، احتمال غیر هم شانس

۱۲۷- در یک آزمایش تصادفی، $S = \{x, y, z, t\}$ فضای نمونه است. اگر $P(x)$ ، $P(y)$ ، $P(z)$ و $P(t)$ یک دنباله حسابی با

قدرنسبت $\frac{1}{7}$ تشکیل دهند $(P(x) < P(y))$ ، احتمال وقوع پیشامد $\{x, y\}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{14}$ (۲) $\frac{2}{7}$ (۳) $\frac{5}{14}$ (۴) $\frac{3}{7}$

۱۲۸- یک تاس به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد اول دو برابر احتمال وقوع هر عدد مرکب است. اگر $P(1) = \frac{1}{5}$ باشد.

آن‌گاه در پرتاب این تاس، احتمال وقوع یک عدد زوج کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{10}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{5}$

هندسه ۲- آشنا، چند ضلعي محاطي و محيطي -

۱۱۱- اگر اضلاع مثلث ABC را a ، b و c و شعاع دایره‌های محاطی خارجی متناظر با این اضلاع را به ترتیب r_a ، r_b و r_c بنامیم و داشته

باشیم: $a > b > c$ ، آن‌گاه کدام گزینه همواره صحیح است؟

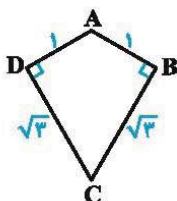
- (۱) $r_a < r_b < r_c$ (۲) $r_b > r_a > r_c$ (۳) $r_b < r_c < r_a$ (۴) $r_a > r_b > r_c$

۱۱۲- در مثلث متساوی‌الساقین، اندازه ارتفاع وارد بر قاعده ۸ و شعاع دایره محاطی داخلی آن ۳ واحد است، طول قاعده این مثلث کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶

۱۱۳- اندازه شعاع کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین دایره محاطی یک مثلث قائم‌الزاویه به ترتیب برابر ۱ و ۶ است. اندازه شعاع دایره محیطی این مثلث کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{3}{5}$



۱۱۴- در چهارضلعی $ABCD$ ، نسبت شعاع دایره محیطی به شعاع دایره محاطی آن کدام است؟

- (۱) $3 - \sqrt{3}$ (۲) $\frac{3 + \sqrt{3}}{6}$ (۳) $\frac{3 + \sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$

۱۱۵- در یک دوزنقه محیط بر یک دایره، طول خط واصل بین وسط‌های دو ساق آن ۱۲ واحد است. محیط دوزنقه کدام است؟

- (۱) ۳۶ (۲) ۴۴ (۳) ۴۶ (۴) ۴۸

۱۱۶- مربعی به ضلع ۲ درون دایره‌ای محاط است. عمودمنصف‌های اضلاع این مربع را رسم می‌کنیم تا دایره را در چهار نقطه قطع کنند. این چهار نقطه با رئوس مربع تشکیل یک هشت‌ضلعی می‌دهند. طول ضلع این هشت‌ضلعی کدام است؟

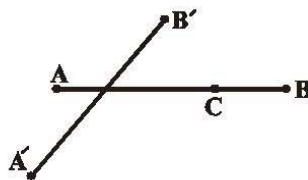
- (۱) $2\sqrt{2} \sin 22/5^\circ$ (۲) $2\sqrt{2} \tan 22/5^\circ$ (۳) $4 \sin 22/5^\circ$ (۴) $4 \tan 22/5^\circ$

هندسه ۲- آشنا، تبدیل های هندسی

۱۱۷- مثلث ABC به اضلاع ۳، ۴ و ۵ مفروض است. اگر این مثلث را تحت تبدیل طولیای T، به مثلث A'B'C' تصویر کنیم، شعاع دایره محاطی داخلی مثلث A'B'C' کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۱۱۸- فرض کنید T یک تبدیل طولیای و $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$ باشد. اگر مطابق شکل زیر، C نقطه‌ای روی پاره‌خط AB باشد و $T(C) = C'$ ، آن‌گاه تعداد نقاط ممکن در صفحه برای C' کدام است؟



- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۱۱۹- خط d و نقطه A به فاصله ۱ واحد از آن مفروض است. اگر تبدیل S بازتاب نسبت به خط d باشد، فاصله نقطه A از $S(S(S(A)))$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۲۰- پاره‌خط AB به طول ۱۰، خط L را در نقطه‌ای به جز A و B با زاویه ۴۵ درجه قطع نموده و تبدیل S بازتاب نسبت به خط L می‌باشد. اگر $S(A) = A'$ و $S(B) = B'$ باشد، مساحت چهارضلعی AA'BB' کدام است؟

- (۱) ۵۰ (۲) $50\sqrt{2}$ (۳) ۱۰۰ (۴) $100\sqrt{2}$

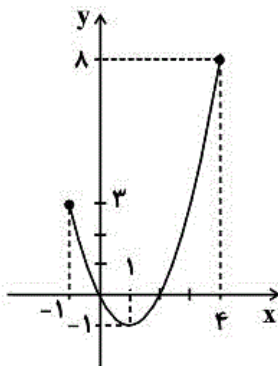
۸۱- گزینه «۳»

(سارا واعظ‌زاده)

دامنه تابع $f(x)$ برابر $[-1, 4]$ است. نمودار تابع را رسم کرده و برد آن را به دست می‌آوریم. طبق نمودار زیر، برد تابع برابر $[-1, 8]$ است. در

نتیجه هر تابعی به صورت $\begin{cases} f: [-1, 4] \rightarrow B \\ f(x) = x^2 - 2x \end{cases}$ که در

آن $[-1, 8] \subseteq B$ باشد، نمایش دیگری از تابع خواهد بود.



در گزینه «۱»، دامنه تابع $\mathbb{R}$ می‌باشد که نمایش درستی برای f نیست.

در گزینه «۲»، $[3, 8] \not\subseteq [-1, 8]$. بنابراین گزینه «۲» پاسخ صحیح نمی‌باشد.

در گزینه «۴» نیز، $[0, +\infty) \not\subseteq [-1, 8]$. بنابراین گزینه «۴» نیز پاسخ صحیح نمی‌باشد.

در گزینه «۳»، $[-1, 8] \subseteq [-1, 10]$ می‌باشد، بنابراین گزینه «۳» پاسخ صحیح است.

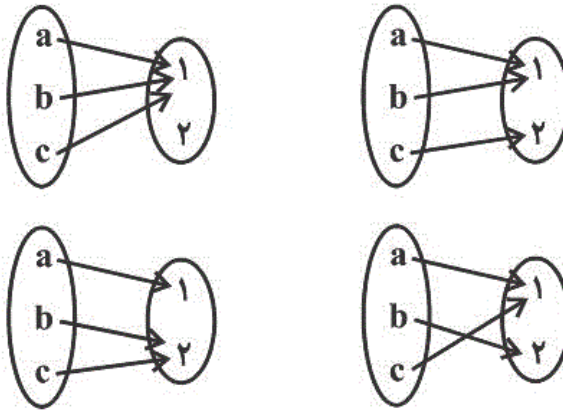
(مسابقه ۱- تابع - صفحه‌های ۳۸ تا ۴۰)

۴

۳✓

۲

۱



نکته: اگر A مجموعه m عضوی و B مجموعه n عضوی باشد، تعداد توابع از A به B برابر است با n^m . در این سوال چون عضو a استفاده شد، پس $۲^۲$ تابع می‌توان نوشت.

(مسابان ۱- تابع - صفحه‌های ۳۸ تا ۴۰)

۴

۳

۲✓

۱

۸۳- گزینه ۱»

(روح اله پهلوانی)

می‌دانیم اگر عبارتی منفی بخواهد به داخل رادیکال با فرجه زوج انتقال یابد، ابتدا یک منفی پشت رادیکال قرار می‌دهیم و سپس با انتقال عبارت به داخل رادیکال توانش در فرجه ضرب می‌شود.

$$f(x) = x\sqrt{-x} \quad x \in (-\infty, 0] \quad -\sqrt{-x \times x^2} = -\sqrt{-x^3}$$

بنابراین گزینه ۱» صحیح است چون دامنه و ضابطه‌اش با تابع f برابر است.

(مسابان ۱- تابع - صفحه‌های ۴۱ تا ۴۳ و ۴۶ تا ۴۸)

۴

۳

۲

۱✓

$$(2x - 6)(2x^2 + bx + c) \geq 0$$

با این که $x = 3$ ریشه عبارت $2x - 6$ است اما به ازای آن عبارت زیر رادیکال تغییر علامت نداده است چرا که دامنه تابع به شکل $[2, +\infty)$ است. بنابراین باید $x = 3$ ریشه عبارت $2x^2 + bx + c$ باشد، به عبارتی $x = 3$ ریشه مضاعف عبارت زیر رادیکال است:

$$2(9) + 3b + c = 0 \Rightarrow 3b + c = -18 \quad (1)$$

از سویی از دامنه f پیداست که عبارت زیر رادیکال به ازای $x = 2$ تغییر علامت داده است. بنابراین $x = 2$ نیز باید ریشه ساده عبارت $2x^2 + bx + c$ باشد:

$$2(4) + 2b + c = 0 \Rightarrow 2b + c = -8 \quad (2)$$

از معادله‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$b = -10, \quad c = 12$$

$$\Rightarrow f(b + c) = f(2) = 0$$

(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

۴

۳

۲✓

۱

رابطه گزینه ۳» به صورت $y = \frac{5}{x^2}$ است که به ازای هر x مخالف صفر تنها یک مقدار برای y حاصل می‌شود. بنابراین تابع است. حال سایر گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱» نادرست - زیرا اگر $x = -1$ باشد، داریم:

$$\sqrt{+1} + 2 = y^2 \Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$$

گزینه ۲» نادرست - زیرا اگر $x = 5$ باشد، داریم:

$$y^3 - 4y + 5 = 5 \Rightarrow y^3 - 4y = 0$$

$$\Rightarrow y(y^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = \pm 2 \end{cases}$$

گزینه ۴» نادرست - زیرا اگر $x = 0$ باشد، داریم:

$$y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow (y + 2)(y - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۴۸ و ۴۹)

۴

۳✓

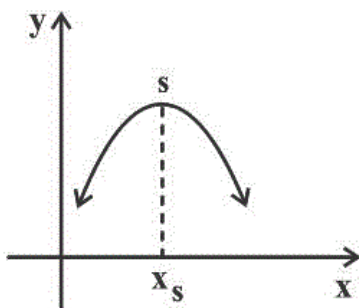
۲

۱

۸۷- گزینه «۳»

(مسیر سعیری)

تابع f سهمی است و مطابق شکل در بازه $(-\infty, x_s)$ یک به یک و وارون پذیر است. حال برای این که در بازه $(-\infty, a]$ وارون پذیر باشد باید مقدار a از طول رأس سهمی کمتر یا با آن مساوی باشد.



$$x_s = \frac{2a - 12}{-4} \geq a \Rightarrow 2a - 12 \leq -4a \Rightarrow 6a \leq 12 \Rightarrow a \leq 2$$

(مسابقه ۱- تابع - صفحه های ۵۴ تا ۵۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

نامساوی $2 \leq [x] \leq 4$ معادل است با $2 \leq x < 5$. از طرفی $0 < [x] < 2$ نیز معادل $1 \leq x < 2$ است. بنابراین:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x+2} & 2 \leq x < 5 \\ \sqrt{5x-1} & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

برد تابع $y_1 = \sqrt{5x-1}$ وقتی $1 \leq x < 2$ است، برابر است با:

$$5 \leq 5x < 10 \Rightarrow 4 \leq 5x-1 < 9 \Rightarrow 2 \leq \sqrt{5x-1} < 3$$

$$\Rightarrow 2 \leq y_1 < 3 \Rightarrow R_{y_1} : [2, 3)$$

از طرفی برد $2 \leq x < 5$: $y_2 = \frac{2x+1}{x+2}$ نیز برابر است با:

$$y = \frac{2x+1}{x+2} = 2 - \frac{3}{x+2} \xrightarrow{\frac{3}{7} < \frac{3}{x+2} \leq \frac{3}{4}}$$

$$2 - \frac{3}{4} \leq y_2 < 2 - \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{5}{4} \leq y_2 < \frac{11}{7} \Rightarrow R_{y_2} : [\frac{5}{4}, \frac{11}{7})$$

$$R_f = [2, 3) \cup [\frac{5}{4}, \frac{11}{7})$$

لذا:

(مسابقه ۱- تابع - صفحه‌های ۴۴ تا ۵۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

۹۲- گزینه «۳»

(وفید رافتی)

ابتدا ضابطه وارون تابع f را به دست می آوریم:

$$y = x^2 - 6x + 1$$

$$y - 1 = x^2 - 6x \xrightarrow{\text{به دو طرف ۹ واحد اضافه می کنیم}}$$

$$y + 8 = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow (x - 3)^2 = y + 8$$

$$\xrightarrow[\text{جذر}]{x \geq 3} \underbrace{x - 3}_{\text{مثبت}} = \sqrt{y + 8}$$

$$x = \sqrt{y + 8} + 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x + 8} + 3$$

$$\xrightarrow{\text{طبق گزینه ها}} \sqrt{x + 8} + 3 = 7x - 1 \xrightarrow{\text{معادله تلاقی}} x = 1$$

(مسایان ۱- تابع - صفحه های ۵۳ تا ۶۲)

۴

۳✓

۲

۱

۹۳- گزینه «۲»

(اکبر کلاه ملکی)

$$(f \cdot g)(a) = 3 \Rightarrow f(a) \times g(a) = 3 \Rightarrow \sqrt{a + 5} \times \sqrt{5 - a} = 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{25 - a^2} = 3 \Rightarrow 25 - a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 4$$

هر دو قابل قبول هستند.

(مسایان ۱- تابع - صفحه های ۴۶ تا ۴۸ و ۶۳ تا ۶۶)

۴

۳

۲✓

۱

۹۴- گزینه «۲»

(یوسف حسینی)

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{(2x^2 - 1)^2} = |2x^2 - 1| = x \xrightarrow{x \geq 0}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 1 = x \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 & \text{ق ق} \\ x = -\frac{1}{2} & \text{غ ق ق} \end{cases} \\ 2x^2 - 1 = -x \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 & \text{غ ق ق} \\ x = \frac{1}{2} & \text{ق ق} \end{cases} \end{cases}$$

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

بنابراین مجموع جواب های معادله برابر است با:

(مسایان ۱- تابع - صفحه های ۴۶ تا ۴۸ و ۶۶ تا ۷۰)

۴

۳

۲✓

۱

۸۸- گزینه «۴»

(سعید اکبرزاده)

g تابع خطی است که از نقطه $(0, 3)$ می‌گذرد. اگر شیب این خط را m در نظر بگیریم، داریم:

$$y - 3 = m(x - 0) \Rightarrow y = mx + 3 \Rightarrow g(x) = mx + 3$$

$$(fog)(-10) = 3$$

$$\Rightarrow f(g(-10)) = f(-10m + 3) = \sqrt{2 - (-10m + 3)} = 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{10m - 1} = 3 \Rightarrow 10m - 1 = 9 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow g(x) = x + 3$$

حال نقطه برخورد تابع g با محور x ها را می‌یابیم:

$$g(x) = 0 \Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow b = -3$$

(مسابان ۱- تابع - صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸ و ۶۶ تا ۷۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

۸۹- گزینه «۱»

(سعید عزیزی)

ابتدا باید تابع g را معکوس کنیم و سپس $f \circ g^{-1}$ را بیابیم:

$$g^{-1} = \{(2, 3), (6, 8), (5, 9)\}$$

اکنون $f \circ g^{-1}$ را به دست می‌آوریم.

$$x \in D_{g^{-1}} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow g^{-1}(2) = 3 \Rightarrow f(g^{-1}(2)) = f(3) = 5 \\ x = 6 \Rightarrow g^{-1}(6) = 8 \\ \Rightarrow f(g^{-1}(6)) = f(8) \rightarrow \text{تعریف نشده است} \\ x = 5 \Rightarrow g^{-1}(5) = 9 \Rightarrow f(g^{-1}(5)) = f(9) = 6 \end{cases}$$

پس $f \circ g^{-1} = \{(2, 5), (5, 6)\}$ است.

(مسابان ۱- تابع - صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲ و ۶۶ تا ۷۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

از آنجا که برد هر تابع حداکثر برابر است با تعداد اعضای دامنه و y های تکراری در برد، یکبار حساب می‌شوند، داریم:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$g(f(-3)) = g(-3) \Rightarrow \text{۳- در دامنه } g \text{ موجود است.} \quad \checkmark$$

$$g(f(6)) = g(0) \Rightarrow \text{صفر در دامنه } g \text{ موجود نیست.} \quad \times$$

$$g(f(7)) = g(1) \Rightarrow \text{۱ در دامنه } g \text{ موجود است.} \quad \checkmark$$

$$g(f(9)) = g(-3) \Rightarrow \text{y آن عضو تکراری برد است.}$$

$$D_{g \circ f} \rightarrow \text{۲ عضو دارد} \rightarrow \text{۲ عضو دارد}$$

(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۶۶ تا ۷۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

طبق تعریف دامنه ترکیب دو تابع داریم:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

ابتدا دامنه توابع f و g را به دست می آوریم:

$$f(x) = \sqrt{x(1-x)} \Rightarrow x(1-x) \geq 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & & 0 & 1 \\ \hline x(1-x) & - & 0 & + & 0 & - \end{array} \Rightarrow D_f = [0, 1]$$

$$g(x) = \sqrt{2x-1} \Rightarrow 2x-1 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 1$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow D_g = [\frac{1}{2}, +\infty)$$

$$D_{fog} = \{x \in [\frac{1}{2}, +\infty) \mid \sqrt{2x-1} \in [0, 1]\}$$

از حل نامعادله $0 \leq \sqrt{2x-1} \leq 1$ داریم:

$$0 \leq \sqrt{2x-1} \leq 1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 0 \leq 2x-1 \leq 1$$

$$\xrightarrow{+1} 1 \leq 2x \leq 2 \xrightarrow{\div 2} \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

$$\Rightarrow D_{fog} = \{x \geq \frac{1}{2} \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 1\} = [\frac{1}{2}, 1]$$

بنابراین دامنه fog شامل یک عدد صحیح است.

(مسئله ۱- تابع - صفحه های ۴۶ تا ۴۸ و ۴۴ تا ۷۰)

۴

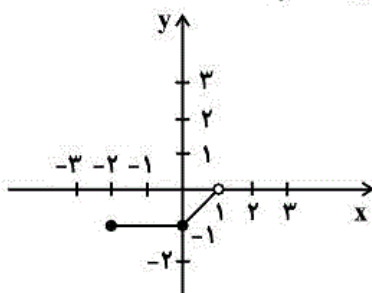
۳

۲ ✓

۱

$$-\frac{x}{2} = -1 \rightarrow y = x(-1) - (-(x-1)) = -1$$

$$\frac{x}{2} = 0 \rightarrow y = x(0) - (-(x-1)) = x-1$$



بنابراین محور x ها را قطع نمی کند.

(مسئله ۱- تابع - صفحه های ۴۹ تا ۵۳ و ۶۳ تا ۶۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

۹۶- گزینه ۲»

(علی شهبازی)

از نمودار تابع نمایشی رسم شده، نتیجه می گیریم عدد $1-2a$ بین 1 و 0 است:

$$0 < 1-2a < 1 \xrightarrow{-1} -1 < -2a < 0 \xrightarrow{\div(-2)} 0 < a < \frac{1}{2}$$

با توجه به گزینه ها، فقط $a^2 > a^3$ درست است.

(مسئله ۱- توابع نمایشی و لگاریتمی - صفحه های ۷۲ تا ۷۹)

۴

۳

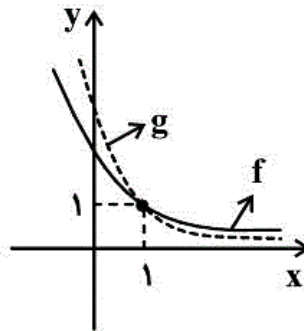
۲ ✓

۱

نمودار دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می کنیم.

$$f(x) = 4^{1-x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} = \left(\frac{25}{100}\right)^{x-1}$$

$$g(x) = (0.4)^{2x-2} = \left(\frac{4}{10}\right)^{2x-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{2(x-1)} = \left(\frac{4}{25}\right)^{x-1} = \left(\frac{16}{100}\right)^{x-1}$$



با توجه به شکل در بازه $[0, +\infty)$ نمودار تابع f ابتدا پایین تر و سپس بالاتر از نمودار تابع g قرار دارد.

(مسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی- صفحه های ۷۲ تا ۷۹)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

ابتدا پایه های دو طرف نامعادله را یکسان می کنیم:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-x+4} = \left(\frac{3}{4}\right)^{x-4} = \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^{x-4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2x-8}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3x-5} \geq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2x-8}$$

می دانیم که در نامعادله $a^x \geq a^y$ ، اگر $0 < a < 1$ باشد، آن گاه $x \leq y$:

$$\frac{0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1}{\rightarrow} 3x - 5 \leq 2x - 8 \Rightarrow x \leq -3$$

(مسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی- صفحه های ۷۲ تا ۷۹)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

۹۹- گزینه ۲»

(نامد فرضعلی بیک)

اگر M_0 را جرم اولیه این ماده فرض کنیم، جرم باقی مانده از این ماده پس از t دهه، طبق رابطه $m(t) = M_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^t$ به دست می آید (چون طی هر دهه، $\frac{1}{4}$ از جرم موجود کم می شود و $\frac{3}{4}$ آن باقی می ماند) حال با جای گذاری $t = 3$ (۳۰ سال، برابر ۳ دهه است) داریم:

$$m(3) = M_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} M_0$$

پس $M_0 - \frac{27}{64} M_0 = \frac{37}{64} M_0$ در این مدت از بین می رود که $\frac{37}{64}$ تقریباً $\frac{58}{100}$ است.

(مسابان ۱- توابع نمایی و گاریتمی- صفحه های ۷۲ تا ۷۹)

۴

۳

۲✓

۱

۱۰۰- گزینه ۳»

(اکبر کلاه ملکی)

اولاً برد تابع بازه $(-\infty, +\infty)$ است پس $b = 1$ و $f(x) = 3^{x-a} + 1$ از طرفی:

$$f(0) = \frac{4}{3} \Rightarrow 3^{-a} + 1 = \frac{4}{3} \Rightarrow 3^{-a} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow a = 1 \Rightarrow a + b = 1 + 1 = 2$$

(مسابان ۱- توابع نمایی و گاریتمی- صفحه های ۷۲ تا ۷۹)

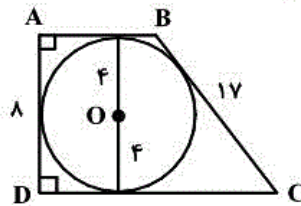
۴

۳✓

۲

۱

چهارضلعی ABCD محیطی است، بنابراین داریم:



$$AB + CD = AD + BC = 8 + 17 = 25$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AD(AB + CD) = \frac{1}{2} \times 8 \times 25 = 100$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۴ ✓

۳

۲

۱

۱۰۵- گزینه «۳»

(شایان عباسی)

مرکز دایره محیطی هر مثلث، محل هم‌رسمی عمودمنصف‌های اضلاع آن مثلث است. در مثلث متساوی‌الاضلاع، میانه، ارتفاع و عمودمنصف نظیر یک ضلع بر هم منطبق‌اند. با توجه به این که میانه‌ها در هر مثلث یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند، داریم:



$$OA = \frac{2}{3} AH \Rightarrow R = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a \Rightarrow a = \sqrt{3} R$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{\text{دایره}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2}{\pi R^2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{3} R)^2}{\pi R^2} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4} R^2}{\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$$

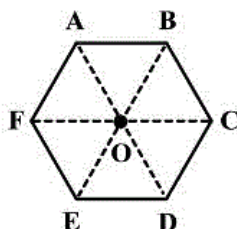
(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۴

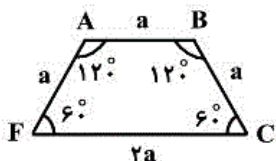
۳ ✓

۲

۱



شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ مطابق شکل از شش مثلث متساوی الاضلاع تشکیل شده است. فرض کنید این شش ضلعی را در راستای قطر CF به دو چهارضلعی تقسیم کنیم و چهارضلعی $ABCF$ را در نظر بگیریم. داریم:



محاطی است $\Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{F} = 180^\circ$

$AB + CF \neq AF + BC \Rightarrow$ محیطی نیست $ABCF$

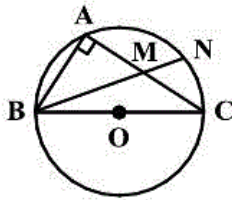
(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۴

۳

۲

۱✓



$$(2\sqrt{3})^2 = 2^2 + (2\sqrt{2})^2 \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$\xrightarrow{\text{عکس قضیه فیثاغورس}} \hat{A} = 90^\circ$$

مثلث ABC قائم‌الزاویه است و در نتیجه ضلع BC از این مثلث یکی از قطرهای دایره محیطی مثلث است. مطابق شکل داریم:

$$\triangle BAM : BM^2 = AB^2 + AM^2 = 2^2 + (\sqrt{2})^2 = 6$$

$$\Rightarrow BM = \sqrt{6}$$

طبق روابط طولی در این دایره داریم:

$$BM \times MN = AM \times MC \Rightarrow \sqrt{6} \times MN = \sqrt{2} \times \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{2}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

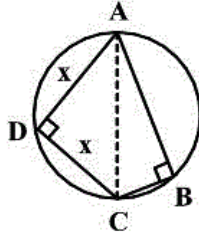
۴

۳

۲

۱✓

چهارضلعی ABCD محاطی است، بنابراین زاویه‌های روبه‌روی آن مکمل یکدیگرند. داریم:



$$\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{B}=\hat{D}} \hat{B} = \hat{D} = 90^\circ$$

یعنی مثلث‌های ABC و ADC قائم‌الزاویه هستند.

$$\Delta ABC: AC^2 = AB^2 + BC^2 = 196 + 4 = 200$$

$$\Delta ADC: AC^2 = AD^2 + DC^2 \Rightarrow 200 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 100$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC = \frac{1}{2} \times 14 \times 2 = 14$$

$$S_{ADC} = \frac{1}{2} AD \times DC = \frac{1}{2} x^2 = 50$$

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = 14 + 50 = 64$$

(هندسه ۲- دایره - صفحه ۲۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

طول مماس‌های رسم شده از یک نقطه خارج دایره بر آن دایره برابر یکدیگرند، بنابراین داریم:

$$AE = AF \Rightarrow AB + BE = AC + CF$$

$$\xrightarrow{BE=BD} ۱۲ + ۳ = ۱۳ + CF \Rightarrow CF = ۲$$

$$\xrightarrow{CD=CF} CD = ۲$$

$$BC = BD + CD = ۳ + ۲ = ۵$$

$$۱۳^2 = ۱۲^2 + ۵^2 \Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\xrightarrow{\text{عکس قضیه فیثاغورس}} \hat{A}BC = ۹۰^\circ$$

بنابراین مثلث ABC قائم‌الزاویه است و در نتیجه در این مثلث داریم:

$$P = \frac{۵ + ۱۲ + ۱۳}{۲} = ۱۵$$

$$S = \frac{1}{2} AB \times BC = \frac{1}{2} \times ۱۲ \times ۵ = ۳۰$$

$$OD = r_a = \frac{S}{P - a} = \frac{۳۰}{۱۵ - ۵} = ۳$$

$$S_{OBC} = \frac{1}{2} \times OD \times BC = \frac{1}{2} \times ۳ \times ۵ = ۷/۵$$

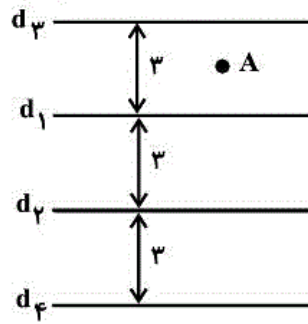
(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۴

۳

۲ ✓

۱



با توجه به تعریف تابع T ، این تابع نمی‌تواند یک تبدیل در صفحه باشد، زیرا اگر T تبدیل باشد، آن‌گاه هر نقطه در این صفحه باید تصویر دقیقاً یک نقطه از صفحه تحت تابع T باشد و بالعکس. به عنوان مثال اگر نقطه A را به فاصله کمتر از ۳ واحد از خط d_1 در نظر بگیریم، آن‌گاه این نقطه، تصویر هیچ نقطه‌ای تحت این تابع نیست چون در صورتی که نقطه‌ای مانند B بالای خط d_1 باشد، تصویر آن تحت این تابع بر بازتاب آن نسبت به خط d_2 منطبق می‌گردد که پایین خط d_4 قرار دارد و اگر نقطه B پایین خط d_2 باشد، تصویر آن تحت این تابع بر بازتاب آن نسبت به خط d_1 منطبق می‌گردد که بالای خط d_3 قرار دارد. همچنین اگر نقطه بین دو خط d_1 و d_2 باشد، تصویر آن بر خودش منطبق است.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۳۴ تا ۴۰)

۴

۳

۲

۱✓

۱۰۱- گزینه ۲»

(امیرحسین ابومصوب)

در بین گزاره‌های داده شده تنها گزاره «الف» درست است. بازتاب تبدیلی طولی است ولی در حالت کلی شیب خط را ثابت نگه نمی‌دارد. از طرفی تمام نقاط روی محور بازتاب (خط d) در بازتاب ثابت باقی می‌مانند، پس بازتاب دارای بی‌شمار نقطه ثابت تبدیل است.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

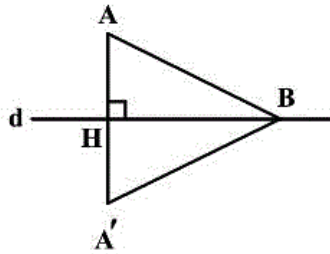
۴

۳

۲✓

۱

با توجه به این که تصویر نقطه B تحت این بازتاب بر خودش منطبق است، پس نقطه B روی خط d قرار دارد. از طرفی مطابق شکل $AH = A'H$ است، بنابراین داریم:



$$AA' = 2AH \Rightarrow 3x + 1 = 2(x + 2)$$

$$\Rightarrow 3x + 1 = 2x + 4 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow AA' = 10$$

$$\Delta AA'B \text{ محیط} = AB + A'B + AA' = 10 + 10 + 10 = 30$$

(هندسه ۲- تبدیل های هندسی و کاربردها- صفحه های ۳۷ تا ۴۰)

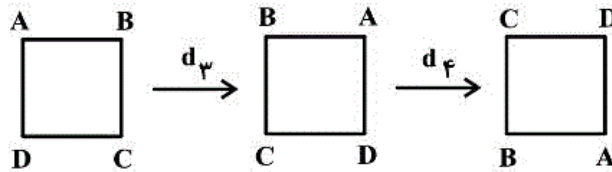
۴ ✓

۳

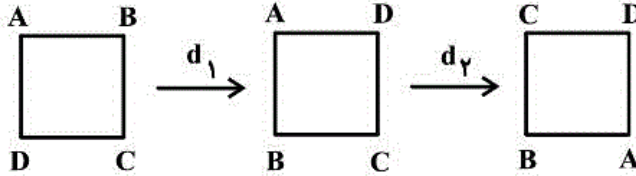
۲

۱

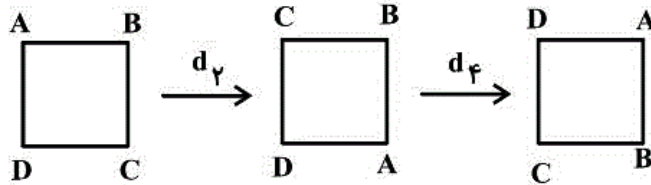
گزینه «۱»:



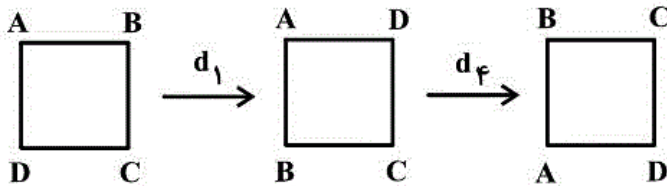
گزینه «۲»:



گزینه «۳»:



گزینه «۴»:



(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

۴

۳✓

۲

۱

(مرتضی فوهم علوی)

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B) = 8$$

$$n(B \times C) = n(B) \times n(C) = 12$$

برای این که مجموعه $C \times A$ دارای حداقل تعداد عضوهای ممکن باشد، باید $n(A)$ و $n(C)$ کمترین مقدار ممکن باشند، بنابراین کافی است تا $n(B)$ بیشترین مقدار باشد در واقع $n(B)$ باید بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۸ و ۱۲ یعنی برابر ۴ باشد. در این صورت داریم:

$$\left. \begin{array}{l} n(A) = 2 \\ n(C) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow n(C \times A) = n(C) \times n(A) = 6$$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات- صفحه ۳۵)

۴

۳

۲✓

۱

۱۲۵- گزینه «۴»

(امیرحسین ابومحبوب)

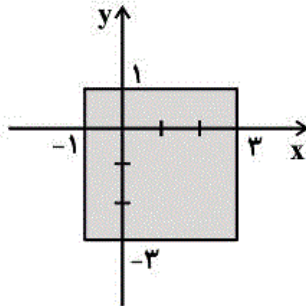
$$x^2 - 2x - 3 \leq 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) \leq 0$$

$$\Rightarrow -1 \leq x \leq 3 \Rightarrow A = [-1, 3]$$

$$|x+1| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x+1 \leq 2 \Rightarrow -3 \leq x \leq 1$$

$$\Rightarrow B = [-3, 1]$$

مطابق شکل ناحیه متناظر با ضرب دکارتی $A \times B$ ، مربعی به طول ضلع ۴ و مساحت ۱۶ است.



(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات - صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

۱۲۶- گزینه «۳»

(سیدوید ذوالفقاری)

$$A \times B = B \times A \xrightarrow{A, B \neq \emptyset} A = B$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B = \{4, 3, b\} \\ A = \{4, 3\} \end{array} \right. \Rightarrow a = 4 \Rightarrow \{4, \frac{a}{2} + 1, b\} = \{a, 3\}$$

بنابراین b برابر یکی از دو عدد ۳ یا ۴ است و در نتیجه حداقل مقدار $a + b$ به ازای $b = 3$ حاصل می‌شود که برابر است با:

$$\min(a + b) = 4 + 3 = 7$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات - صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

۱۲۱- گزینه «۱»

(سیدوید ذوالفقاری)

در صورتی که آزمایشی متشکل از دو آزمایش با فضاهای نمونه S_1 و S_2 باشد، فضای نمونه آن $S_1 \times S_2$ است که این نکته قابل تعمیم برای هر تعداد آزمایش هم‌زمان نیز می‌باشد.

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۳ و ۴۴)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

۱۲۲- گزینه «۴»

(امیرحسین ابومحبوب)

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، آن گاه $A \cap B = \emptyset$ و $P(A \cap B) = 0$ است. بنابراین داریم:

$$P(A - B) = P(A) - \underbrace{P(A \cap B)}_0 = P(A)$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۵ و ۴۶)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

۱۲۳- گزینه «۲»

(نویر مفیدی)

$$P(B') + P(A \cap B) = 1 - P(B) + P(A \cap B)$$

$$= 1 - (P(B) - P(A \cap B)) = 1 - P(B - A)$$

$$= P[(B - A)'] = P[(B \cap A')'] = P(A \cup B')$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

☐ ۴

☐ ۳

☒ ۲

☐ ۱

۱۲۹- گزینه «۳»

(مرتضی فویم‌علوی)

فرض کنید $S = \{10, 11, 12, \dots, 99\}$ و A و B زیرمجموعه‌هایی از S باشند که اعضای آن‌ها به ترتیب بر ۳ و ۴ بخش پذیر است. داریم:

$$n(S) = 90$$

$$n(A) = \left[\frac{99}{3} \right] - \left[\frac{9}{3} \right] = 33 - 3 = 30$$

$$n(B) = \left[\frac{99}{4} \right] - \left[\frac{9}{4} \right] = 24 - 2 = 22$$

$$n(A \cap B) = \left[\frac{99}{12} \right] - \left[\frac{9}{12} \right] = 8 - 0 = 8$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{30}{90} + \frac{22}{90} - \frac{8}{90} = \frac{44}{90} = \frac{22}{45}$$

پیشامد بخش‌پذیر نبودن عدد انتخابی بر ۳ و ۴، معادل $A' \cap B'$ است، بنابراین داریم:

$$P(A' \cap B') = P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{22}{45} = \frac{23}{45}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های مشابه تمرین ۵ صفحه ۴۷)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

۱۳۰- گزینه ۲»

(امیرحسین ابومصوب)

فرض کنید $A = \{a, b\}$ و $B = \{b, c, d\}$ باشد. در این صورت داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(\{a, b, c, d\}) = P(\{a, b\}) + P(\{b, c, d\}) - P(b)$$

$$\Rightarrow 1 - P(e) = \frac{3}{7} + \frac{2}{3} - P(b)$$

$$\Rightarrow P(b) - P(e) = \left(\frac{3}{7} + \frac{2}{3}\right) - 1 = \frac{23}{21} - 1 = \frac{2}{21}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

۴

۳

۲ ✓

۱

۱۲۷- گزینه ۱»

(فرزانه قاکپاش)

$$P(x) + P(y) + P(z) + P(t) = 1$$

$$\Rightarrow P(x) + \left(P(x) + \frac{1}{7}\right) + \left(P(x) + \frac{2}{7}\right) + \left(P(x) + \frac{3}{7}\right) = 1$$

$$\Rightarrow 4P(x) + \frac{6}{7} = 1 \Rightarrow 4P(x) = \frac{1}{7} \Rightarrow P(x) = \frac{1}{28}$$

$$P(\{x, y\}) = P(x) + P(y)$$

$$= \frac{1}{28} + \left(\frac{1}{28} + \frac{1}{7}\right) = \frac{2}{28} + \frac{1}{7} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$P(۴) = P(۶) = x$$

$$P(۲) = P(۳) = P(۵) = ۲x$$

$$P(۱) + P(۲) + \dots + P(۶) = ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۵} + ۲x + ۲x + x + ۲x + x = ۱$$

$$\Rightarrow ۸x = \frac{۴}{۵} \Rightarrow x = \frac{۱}{۱۰}$$

$$P(\{۲, ۴, ۶\}) = P(۲) + P(۴) + P(۶)$$

$$= \frac{۲}{۱۰} + \frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۱۰} = \frac{۴}{۱۰} = \frac{۲}{۵}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۴

۳

۲✓

۱

۱۱۱- گزینه ۴»

(کتاب آبی)

اگر مساحت مثلث را با S و محیط آن را با $۲p$ نمایش دهیم، داریم:

$$r_a = \frac{S}{P-a}, \quad r_b = \frac{S}{P-b}, \quad r_c = \frac{S}{P-c}$$

حال با توجه به فرضیات مسئله نتیجه می‌شود که:

$$a > b \Rightarrow P-a < P-b \Rightarrow \frac{S}{P-a} > \frac{S}{P-b} \Rightarrow r_a > r_b$$

$$b > c \Rightarrow r_b > r_c$$

به طریق مشابه داریم:

$$r_a > r_b > r_c$$

بنابراین:

(هندسه ۲- دایره - صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

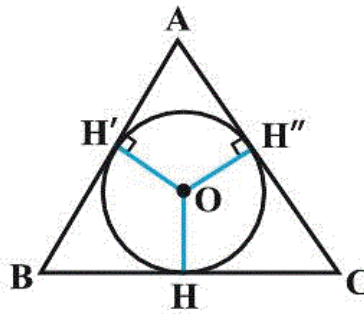
۴✓

۳

۲

۱

مطابق شکل $OH = OH' = OH'' = ۳$ و در نتیجه $OA = ۵$ است.



$$\Delta OAH' : AH'^2 = OA^2 - OH'^2 = 25 - 9$$

$$\Rightarrow AH'^2 = 16 \Rightarrow AH' = 4$$

حال اگر فرض شود $BH = HC = x$ ، با توجه به آن که مماس‌های رسم شده از یک نقطه بر دایره با یکدیگر برابرند، داریم:

$$AH'' = AH' = 4$$

$$BH' = BH = CH = CH'' = x$$

اگر S مساحت مثلث و P نصف محیط مثلث باشد، آن‌گاه:

$$r = \frac{S}{P} \Rightarrow 3 = \frac{\frac{1}{2} \times 8 \times 2x}{4 + 2x}$$

$$\Rightarrow 12 + 6x = 8x \Rightarrow 2x = 12$$

بنابراین طول قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین ABC ، برابر با ۱۲ است.

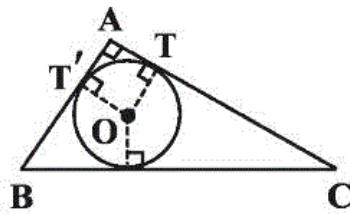
(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۴

۳

۲✓

۱



کوچک ترین دایره محاطی هر مثلث، دایره محاطی داخلی و بزرگ ترین دایره محاطی هر مثلث، دایره محاطی خارجی نظیر رأسی است که بزرگ ترین زاویه را دارد. مطابق شکل چهارضلعی $OTAT'$ مربع است، پس:

$$OT = AT = P - a \Rightarrow r = P - a = \frac{S}{P} \Rightarrow S = P(P - a)$$

حال با توجه به رابطه شعاع دایره محاطی خارجی داریم:

$$r_a = \frac{S}{P - a} = \frac{P(P - a)}{P - a} = P \Rightarrow \begin{cases} r = P - a = ۱ \\ r_a = P = ۶ \end{cases} \Rightarrow a = ۵$$

در هر مثلث قائم الزاویه، اندازه شعاع دایره محیطی برابر با نصف وتر است. پس:

$$R = \frac{a}{۲} = ۲ / ۵$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه های ۲۵ و ۲۶)

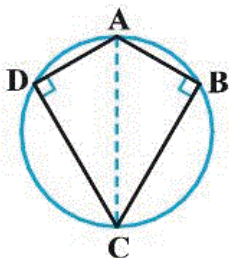
۴

۳

۲✓

۱

چهارضلعی ABCD محاطی است. دایره محیطی آن را رسم می کنیم. مطابق شکل AC قطر دایره است (چرا؟) داریم:



$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC = 2$$

$$\Rightarrow 1 = \text{شعاع دایره محیطی}$$

چهارضلعی ABCD محیطی است و شعاع دایره محیطی آن از رابطه $r = \frac{S}{P}$ به دست می آید.

$$r = \frac{S}{P} = \frac{2S_{ABC}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{2 \times \frac{1}{2} (1 \times \sqrt{3})}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه های ۲۷ و ۲۸)

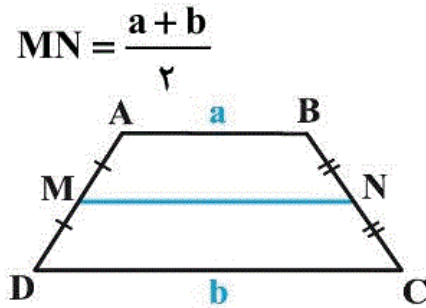
۴

۳✓

۲

۱

طول پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق یک دوزنقه را به هم وصل می‌کند، میانگین طول دو قاعده دوزنقه است. یعنی در شکل زیر:



طبق فرض:

$$MN = 12 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = 12 \Rightarrow a+b = 24 \quad (*)$$

طبق فرض سؤال دوزنقه $ABCD$ محیطی است، می‌دانیم که در هر چهارضلعی محیطی مجموع ضلع‌های روبه‌رو با هم برابر است، یعنی در دوزنقه محیطی $ABCD$ داریم: $AB + CD = AD + BC$. پس:

$$ABCD \text{ محیط} = AB + CD + AD + BC$$

$$= AB + CD + AB + CD$$

$$= a + b + a + b = 2(a + b)$$

$$\xrightarrow{(*)} ABCD \text{ محیط} = 2 \times 24 = 48$$

(هندسه ۲- دایره - صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

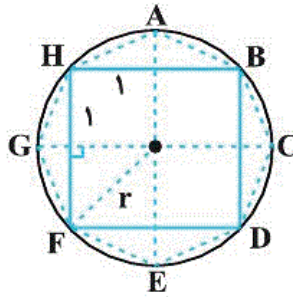
۴ ✓

۳

۲

۱

طول ضلع این مربع برابر ۲ واحد است. طبق شکل داریم:



$$r^2 = 1^2 + 1^2 \rightarrow r = \sqrt{2}$$

هشت ضلعی منتظم محاطی است و اندازه ضلع آن برابر $2r \sin \frac{180^\circ}{n}$ است. داریم:

$$\text{طول ضلع هشت ضلعی} = 2 \times \sqrt{2} \times \sin \frac{180^\circ}{8} = 2\sqrt{2} \sin 22.5^\circ$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

مثلث ABC یک مثلث قائم‌الزاویه است $(5^2 = 3^2 + 4^2)$ ، پس

مساحت آن برابر $6 = \frac{3 \times 4}{2}$ بوده و محیط آن برابر ۱۲ می‌باشد.

تبدیل طولها، اندازه مساحت و محیط اشکال را ثابت نگه می‌دارد، پس

مساحت و محیط مثلث A'B'C' نیز به ترتیب برابر ۶ و ۱۲ است.

حال طبق رابطه شعاع دایره محاطی داخلی داریم:

$$r = \frac{S}{P} = \frac{6}{12} = \frac{6}{6} = 1$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه ۲۵- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۳۶ و ۳۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

۱۱۸- گزینه «۱»

(کتاب آبی)

چون تبدیل T طولپا است، پس $B'C' = BC, A'C' = AC$ می‌باشد، یعنی نقطه C' محل تلاقی دو دایره یکی به مرکز A' و به شعاع AC و دیگری به مرکز B' و به شعاع BC است. اما از آنجا که $A'B' = AB = AC + BC$ می‌باشد، پس دو دایره مماس خارج هستند یعنی فقط یک نقطه در صفحه برای C' امکان‌پذیر است.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۳۶ و ۳۷)

۴

۳

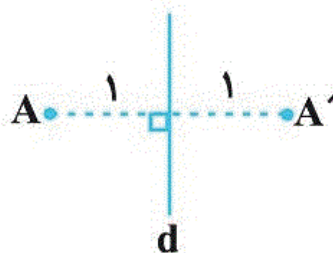
۲

۱✓

۱۱۹- گزینه «۳»

(کتاب آبی)

اگر فاصله نقطه A از خط d برابر یک باشد، فاصله بازتاب یافته آن از خط d نیز برابر یک است، داریم:



$$S(S(\underbrace{S(A)}_{A'})) = S(S(\underbrace{S(A')}_A)) = S(A) = A'$$

پس خواسته مسئله به دست آوردن فاصله A تا A' است که برابر ۲ می‌باشد.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

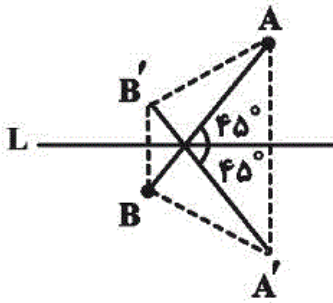
۴

۳✓

۲

۱

شکل مسئله را رسم می کنیم:



در فصل سه هندسه دهم خواندیم که در هر چهارضلعی که دو قطر آن بر هم عمود باشند، مساحت برابر با نصف حاصل ضرب طول دو قطر است. از طرفی بازتاب یک تبدیل طولپا است، پس $AB = A'B'$. بنابراین داریم:

$$S_{AA'BB'} = \frac{1}{2} AB \times A'B' = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 = 50$$

(هندسه ۲- تبدیل های هندسی و کاربردها- صفحه های ۳۷ تا ۴۰)

۴

۳

۲

۱ ✓