

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات

و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)



<https://t.me/riazisara>

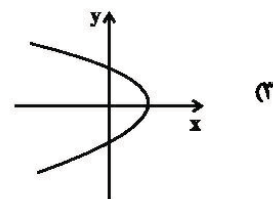
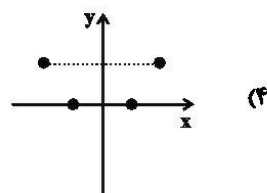
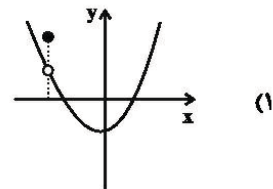
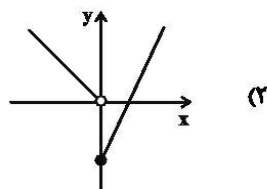
ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)



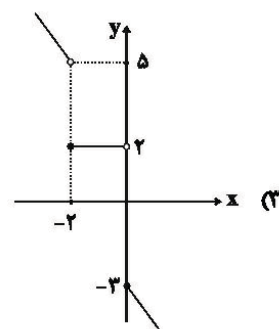
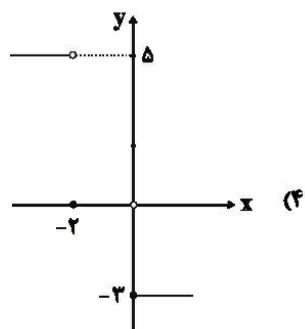
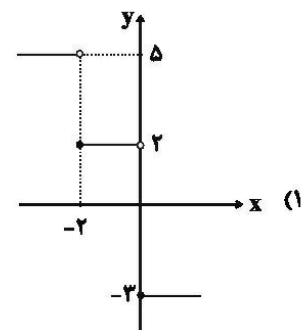
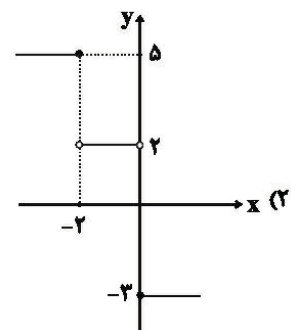
<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

ریاضی و آمار ۲، توابع ثابت، چند ضابطه ای و همانی

۷۱- کدام یک از نمودارهای زیر تابع نیست؟



۷۲- اگر تابع f به صورت $f(x) = \begin{cases} -3 & , x \geq 0 \\ 2 & , -2 < x < 0 \\ 5 & , x \leq -2 \end{cases}$ تعریف شده باشد، نمودار آن کدام است؟



۷۳- کدام گزینه یک تابع نیست؟

$G = \{(0, 1), (1, 1)\}$ (۲)

$F = \{(0, 0)\}$ (۱)

$I = \{(1, 1), (2, 2), (1, -1), (2, -2)\}$ (۴)

$H = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ (۳)

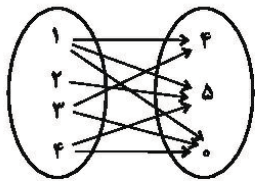
۷۴- اگر رابطه $f = \{(2, 4), (1, 3), (2, m-1), (m, 2m)\}$ تابع باشد، مجموع اعضای برد تابع f کدام است؟

۱۴ (۴)

۱۶ (۳)

۱۷ (۲)

۲۱ (۱)



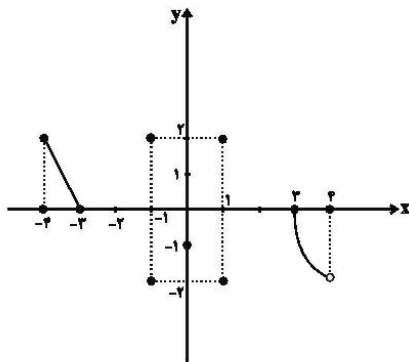
۷۵- حداقل چند پیکان از نمودار زیر حذف کنیم تا به یک تابع تبدیل گردد؟

۴ (۱)

۳ (۲)

۲ (۳)

۱ (۴)



۷۶- حداقل چند نقطه از نمودار زیر حذف گردد تا نمودار مربوط به یک تابع باشد؟

۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)

۷۷- اگر ضابطه $f(x) = (2a+1)x + a^2$ مربوط به یک تابع ثابت باشد، در این صورت $f(-1) + f(1)$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

۱ (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

-۱ (۱)

۷۸- دامنه تابع $f = \{(2, 5), (a-2, a+1), (2, a+1), (a+2, -1)\}$ چند عضو دارد؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

۷۹- اگر $A = \{2, -1, 3, -2\}$ باشد، چند تابع همانی از A به A می‌توان نوشت؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۴ (۱)

۸۰- اگر f تابعی ثابت با دامنه مجموعه اعداد حقیقی و $f(-1) = -3$ باشد، آن گاه حاصل عبارت

$$(f(4) + f(-4))^2 - 2f(0) \times f(3) + f\left(\frac{1}{4}\right)$$

- (۱) -۱۵ (۲) ۱۸ (۳) ۱۵ (۴) اطلاعات کافی نیست.

۸۱- اگر تابع $f = \{(3, 2a - b), (\Delta a + c, 2), (2b - c, 4)\}$ یک تابع همانی باشد، دامنه این تابع کدام است؟

- (۱) $\{3, 2, 4\}$ (۲) $\{5, 1, 2\}$ (۳) $\{2, 3, 1\}$ (۴) $\{5, 3, 2\}$

۸۲- اگر $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ و $f(x) = 3$ برد تابع f را با R_f و $g(x) = \begin{cases} -3, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 3, & x > 0 \end{cases}$ برد تابع g را با R_g نمایش دهیم، کدام گزینه نادرست است؟

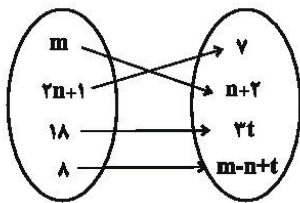
(D_f دامنه f و D_g دامنه g است.)

- (۱) $R_f \subseteq R_g$ (۲) $R_f \cap D_g = \{3\}$ (۳) f یک تابع همانی است. (۴) g یک تابع پلکانی است.

۸۳- اگر $f = \{(\Delta + a, \sqrt{2}), (b + \sqrt{3}, -5), (c - \sqrt{2}, 2\sqrt{3} - \sqrt{2})\}$ یک تابع همانی باشد، حاصل $\frac{a+b}{c^2}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{-5 - 2\sqrt{2}}{6}$ (۳) $\frac{-5 - \sqrt{3}}{6}$ (۴) $-\frac{5}{6}$

۸۴- اگر f یک تابع همانی و نمودار پیکانی آن به صورت شکل زیر باشد، حاصل $m + \frac{t}{n}$ کدام است؟



- (۱) ۱۱ (۲) $\frac{9}{7}$ (۳) ۷ (۴) $\frac{5}{7}$

۸۵- اگر f تابع ثابت و g تابع همانی باشد به طوری که $f(3) = g(-2) + 7$ ، حاصل عبارت $\frac{3f(-2) + g(4)}{f(0) \times g(3)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{19}{15}$ (۲) صفر (۳) $\frac{9}{5}$ (۴) تعریف نشده

۸۶- اگر $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x & , x \leq 2 \\ ax - 6 & , x \geq 2 \end{cases}$ یک تابع باشد، حاصل $f(\frac{15}{7})$ کدام است؟

- ۹ (۱) ۷ (۲) $\frac{9}{7}$ (۳) $\frac{3}{7}$ (۴)

۸۷- اگر تابع $f(x) = (a-2)x^3 + (3b)x + c + 3$ همانی باشد، حاصل $a + 6b + c$ کدام است؟

- ۱ (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)

۸۸- اگر $f = \{(0, \sqrt{25}), (\sqrt{3}, a^2 + 4a)\}$ یک تابع ثابت و $g = \{(2, c-b), (2c-3b, -1)\}$ یک تابع همانی باشد، $a + b + c$ کدام می‌تواند باشد؟

- ۷ (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۹ (۴)

۸۹- اگر $f(x) = \begin{cases} a^2 + 4x & , x \geq 1 \\ 4ax & , x \leq 1 \end{cases}$ یک تابع باشد، حاصل $f(3) + f(-2)$ کدام است؟

- ۶ (۱) صفر (۲) -۵ (۳) -۱ (۴)

۹۰- برد تابع $f = \begin{cases} x^2 - 2 & , x \geq 0 \\ -4x + 1 & , x < 0 \end{cases}$ کدام است؟

- {y | -2 ≤ y < 1} (۱) {y | y ≥ -2} (۲) {y | y ≤ 1} (۳) {y | y < -2 یا y > 1} (۴)

مبحث: توابع ثابت، چند ضابطه‌ای و همانی

-۷۱

(علی ارجمند، صفحه ۲۲ تا ۲۴)

برای آن که نمودار مربوط به یک تابع باشد، باید هر خط موازی محور y ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند. در گزینه «۳» خط قائمی می‌توان رسم کرد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند، پس این نمودار تابع نیست.

۱ ۲ ۳ ۴

-۷۲

(مهدی نصرالهی مدنی، صفحه ۲۷ تا ۲۹)

می‌دانیم $y = a$ خطی به موازات محور x ها است. با توجه به ضابطه f ، برای $x \geq 0$ خطی افقی به عرض -3 ، برای $0 < x < 2$ خطی افقی به عرض 2 و برابر $x \leq -2$ خطی افقی به عرض 5 رسم می‌کنیم که نمودار گزینه «۲» نتیجه می‌شود.

۱ ۲ ۳ ۴

-۷۳

(علی ارجمند، صفحه ۲۲ تا ۲۴)

برای آن که مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها تابع باشد، باید زوج مرتب‌های متمایز با مؤلفه اول یکسان نداشته باشد. در رابطه I زوج مرتب‌های $(2, 2)$ و $(2, -2)$ و $(1, 1)$ و $(1, -1)$ قرار دارند، بنابراین تابع نیست.

۱ ۲ ۳ ۴

-۷۴

(مسین همزه‌ای، صفحه ۲۲ تا ۲۴)

برای این که f تابع باشد، باید $m - 1 = 4$ باشد:

$$m - 1 = 4 \Rightarrow m = 5$$

$$f = \{(2, 4), (1, 3), (2, 4), (5, 10)\}$$

$$f \text{ برد} = \{4, 3, 10\}$$

$$f \text{ مجموع اعضای برد} = 4 + 3 + 10 = 17$$

۱ ۲ ۳ ۴

-۷۵

(مهروی نصرالهی مدنی، صفحه ۲۲ تا ۲۴)

می‌دانیم برای تابع بودن در نمودارهای پیکانی از هر عضو مجموعه اول دقیقاً یک پیکان باید خارج شود. همان‌طور که در نمودار مشخص است از ۴ عضو مجموعه اول مجموعاً ۸ پیکان خارج شده در حالی که باید ۴ تا خارج می‌شد، پس حداقل ۴ پیکان باید حذف گردد.

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

-۷۶

(مهروی نصرالهی مدنی، صفحه ۲۲ تا ۲۴)

همان‌طور که می‌دانیم اگر نمودار مربوط به یک تابع باشد، باید هر خطی که به موازات محور y ها رسم کنیم، حداکثر در یک نقطه نمودار را قطع کند. اگر از نقاط به طول‌های ۱، ۱- و ۴- خطی به موازات محور y ها رسم کنیم نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند، پس حداقل ۳ نقطه باید حذف گردد تا نمودار مربوط به یک تابع شود.

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

-۷۷

(امیر زرانروز، صفحه ۲۶ و ۲۷)

چون ضابطه تابع مربوط به یک تابع ثابت است، لذا می‌بایست ضریب x صفر باشد تا مقدار تابع به ازای هر مقدار x همواره ثابت باشد، لذا داریم:

$$f(x) = (2a+1)x + a^2 \xrightarrow{\text{ضریب } x \text{ مساوی صفر}} 2a+1=0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = (2 \times (-\frac{1}{2}) + 1)x + (-\frac{1}{2})^2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}$$

$$f(-1) + f(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

طبق تعریف تابع، مؤلفه‌های اول در زوج مرتب‌های متمایز نباید تکراری باشند. پس برای زوج مرتب‌هایی که مؤلفه اول یکسان دارند، مؤلفه‌های دوم نیز باید یکسان باشند:

$$(۲, ۵) = (۲, a+1) \Rightarrow a+1 = ۵ \Rightarrow a = ۴$$

حال اگر $a = ۴$ را در تابع قرار دهیم:

$$f = \{(۲, ۵), (۲, ۵), (۷, -۱)\} = \{(۲, ۵), (۷, -۱)\}$$

$$D_f = \{۲, ۷\}$$

در نتیجه دامنه f برابر است با:

پس ۲ عضو دارد.

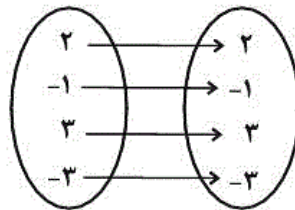
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

در تابع همانی باید هر عضو دامنه به خودش نظیر شود. پس فقط یک تابع همانی می‌توان نوشت.


 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

در تابع ثابت به ازای هر مقدار از دامنه تابع فقط یک مقدار به دست می‌آید که در این سؤال $f(x) = -۳$ می‌باشد. پس:

$$f(۴) = f(-۴) = f(۰) = f(۳) = f\left(\frac{1}{۴}\right) = -۳$$

در نتیجه:

$$(-۳ - ۳)^2 - ۲(-۳)(-۳) + (-۳) = ۳۶ - ۱۸ - ۳ = ۱۵$$

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

در تابع همانی $f(x) = x$ است. برای این که تابع f همانی باشد، در تمام زوج مرتبها مؤلفه‌های اول و دوم با هم برابر است. لذا نیازی نیست a ، b و c را محاسبه کنیم و تابع f به صورت $\{(3, 3), (2, 2), (4, 4)\}$ است. بنابراین دامنه تابع برابر است با: $\{3, 2, 4\}$

برد تابع f برابر $\{3\}$ و برد تابع g برابر $\{3, 0, -3\}$ می‌باشد. لذا واضح است که رابطه $R_f \subseteq R_g$ درست است. ضمناً f تابعی ثابت و g تابعی پلکانی است. همچنین توجه کنید که:

$$R_f \cap D_g = \{3\} \cap \mathbb{R} = \{3\}$$

می‌دانیم در تابع همانی مؤلفه اول و دوم هر زوج مرتب یکسان می‌باشند. پس:

$$5 + a = \sqrt{3} \Rightarrow a = \sqrt{3} - 5$$

$$b + \sqrt{3} = -5 \Rightarrow b = -5 - \sqrt{3}$$

$$c - \sqrt{2} = 2\sqrt{3} - \sqrt{2} \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$$

در نتیجه:

$$\frac{a+b}{c^2} = \frac{\sqrt{3}-5-5-\sqrt{3}}{(2\sqrt{3})^2} = \frac{-10}{4 \times 3} = \frac{-10}{12} = -\frac{5}{6}$$

چون نمودار مربوط به یک تابع همانی است. پس:

$$2n + 1 = 7 \Rightarrow n = 3$$

$$m = n + 2 \xrightarrow{n=3} m = 3 + 2 = 5$$

$$3t = 18 \Rightarrow t = 6$$

$$m - n + t = 8 \Rightarrow m - 3 + 6 = 8 \Rightarrow m = 5$$

تذکر:

پس:

$$m + \frac{t}{n} = 5 + \frac{6}{3} = 5 + 2 = 7$$

۴

۳ ✓

۲

۱

همان طور که در سؤال اشاره شده g تابع همانی است، پس $g(-2) = -2$. در

نتیجه:

$$f(3) = g(-2) + 7 = -2 + 7 = 5 \Rightarrow f(3) = 5$$

f تابعی ثابت است، پس:

$$f(-2) = f(0) = 5$$

$$\frac{3f(-2) + g(4)}{f(0) \times g(3)} = \frac{3 \times (5) + 4}{5 \times 3} = \frac{19}{15}$$

۴

۳

۲

۱ ✓

با توجه به تعریف، در صورتی f یک تابع است که در $x = 2$ هر دو ضابطه برابر باشند. اگر $x = 2$ را در دو ضابطه جایگزین کنیم:

$$3(2)^2 - 2(2) = a(2) - 6$$

$$\Rightarrow 12 - 4 = 2a - 6 \Rightarrow 2a = 14 \Rightarrow a = 7$$

$$f(x) = ax - 6 = 7x - 6$$

$$f\left(\frac{15}{7}\right) \xrightarrow{\frac{15}{7} > 2} f\left(\frac{15}{7}\right) = 7 \times \left(\frac{15}{7}\right) - 6 = 15 - 6 = 9$$

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱ ✓

می‌دانیم ضابطه تابع همانی به صورت $y = x$ است. پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \\ 3bx = x \Rightarrow b = \frac{1}{3} \\ c + 3 = 0 \Rightarrow c = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + 6b + c = 2 + 6\left(\frac{1}{3}\right) + (-3) = 1$$

 ۴

 ۳ ✓

 ۲

 ۱

تابع f ثابت است. پس مؤلفه دوم تمام زوج مرتب‌های آن یکسان است.

$$a^2 + 4a = \sqrt{25} \Rightarrow a^2 + 4a - 5 = 0$$

$$\Rightarrow (a-1)(a+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -5 \end{cases}$$

g تابع همانی است. پس مؤلفه‌های اول و دوم هر زوج مرتب یکسان است.

$$\begin{cases} c-b = 2 \xrightarrow{x-2} \\ 2c-3b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2c+2b = -4 \\ 2c-3b = -1 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} -b = -5 \\ -b = -5 \end{cases} \Rightarrow b = 5$$

$$\xrightarrow{*} c-b = 2 \Rightarrow c-5 = 2 \Rightarrow c = 7$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow a+b+c = 1+5+7 = 13 \\ a = -5 \Rightarrow a+b+c = -5+5+7 = 7 \end{cases}$$

۴

۳

۲

۱ ✓

$x = 1$ هم در محدوده ضابطه اول است هم در محدوده ضابطه دوم. بنابراین باید

مقادیر $f(1)$ در دو ضابطه را با هم برابر قرار دهیم:

$$f(1) = a^2 + 4 = 4a \Rightarrow a^2 - 4a + 4 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}} (a-2)^2 = 0 \Rightarrow a-2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$f(x) = \begin{cases} 4 + 4x & , x \geq 1 \\ 8x & , x \leq 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{از ضابطه بالایی: } f(3) = 4 + 4(3) = 16 \\ \text{از ضابطه پایینی: } f(-2) = 8(-2) = -16 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow f(3) + f(-2) = 16 - 16 = 0$$

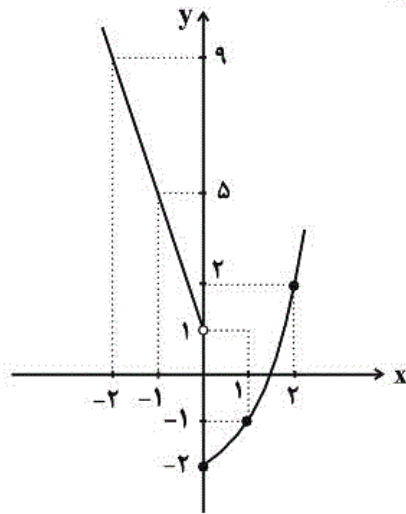
۴

۳

۲ ✓

۱

ابتدا نمودار را با استفاده از نقطه یابی رسم می‌کنیم.



$$y = x^2 - 2 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & -2 & -1 & 2 \end{array}$$

$$y = -4x + 1 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & -1 & -2 \\ \hline y & 1 & 5 & 9 \end{array}$$

با توجه به نمودار برد تابع $\{y \mid y \geq -2\}$ است.

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱