



RIAZISARA

www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات
و...**

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)

<https://t.me/riazisara>



ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

حسابان ۲ - سطح ۱، حدهای نامتناهی - حد در بینهایت

۴۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2}{x^2 - 4}$ کدام است؟

- (۱) $-\infty$ (۲) ۱ (۳) ۸ (۴) $+\infty$

۴۲- نمودار تابع $f(x) = \frac{x-1}{x^2 + ax}$ فقط یک مجانب قائم دارد. مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) -۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲

حسابان ۲ - سطح ۱، تابع -

۴۳- وضعیت یکنوایی نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & ; x < 0 \\ 2 - x & ; x \geq 0 \end{cases}$ چگونه است؟

- (۱) غیر یکنوا (۲) اکیداً نزولی
(۳) ابتدا نزولی سپس صعودی (۴) نزولی است اما اکیداً نزولی نیست.

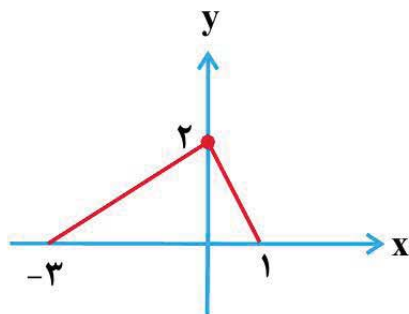
حسابان ۲ - سطح ۱، حدهای نامتناهی - حد در بینهایت

۴۴- اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{mx^3 + x^2 + 1}{6x^n - x} = -\frac{2}{3}$ باشد، حاصل $m + n$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) -۱ (۴) صفر

حسابان ۲ - سطح ۱، تابع -

۴۵- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. مجموع اعداد صحیح مشترک در دامنه و برد تابع $g(x) = f\left(\frac{x}{4}\right)$



کدام است؟

(۱) صفر

(۲) $\frac{5}{2}$

(۳) ۳

(۴) ۲

حسابان ۲ - سطح ۱، مثلثات

۴۶- جواب کلی معادله $\tan 5x = \tan(2x - \pi)$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(۴) $\frac{k\pi}{7}$

(۳) $(2k-1)\frac{\pi}{7}$

(۲) $\frac{k\pi}{3}$

(۱) $(2k-1)\frac{\pi}{3}$

۴۷- مجموع جواب‌های معادله $2\sin^2 x - \sin x = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

(۴) 5π

(۳) 3π

(۲) 4π

(۱) 2π

۴۸- اختلاف ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x) = a \sin \pi ax + 4$ برابر ۸ است. دوره تناوب تابع کدام است؟

(۴) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{1}{4}$

(۲) ۱

(۱) ۲

حسابان ۲ - سطح ۱، تابع -

۴۹- اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x+2$ و $x-3$ به ترتیب برابر ۱ و ۲ باشد، باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر

$x^2 - x - 6$ کدام است؟

(۴) $\frac{x+7}{5}$

(۳) $-\frac{x+7}{5}$

(۲) $\frac{7-x}{5}$

(۱) $\frac{x-7}{5}$

۵۰- با کدام ترتیب تبدیلات، نمودار تابع $f(x) = 4x^2 - 4x$ به نمودار تابع $g(x) = x^2$ تبدیل می‌شود؟

(۱) انتقال $\frac{1}{4}$ واحد به راست و ۱ واحد به پایین- انقباض عمودی با ضریب $\frac{1}{4}$

(۲) انتقال $\frac{1}{4}$ واحد به چپ و ۱ واحد به بالا- انقباض عمودی با ضریب $\frac{1}{4}$

(۳) انتقال $\frac{1}{4}$ واحد به چپ و ۱ واحد به بالا- انبساط عمودی با ضریب ۴

(۴) انتقال $\frac{1}{4}$ واحد به راست و ۱ واحد به پایین- انبساط عمودی با ضریب ۴

- ۳۰ سوال

۱۳۱- نمودار تابع $f(x) = (x+1)^3$ را در راستای محورهای مختصات دو واحد به راست و دو واحد به بالا منتقل کرده‌ایم تا

نمودار تابع g به دست آید. عرض نقطه تلاقی دو نمودار f و g کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) صفر

۱۳۲- نقطه $A(4,5)$ روی نمودار $y = f(1+x) + a$ و نقطه $A'(b,4)$ متناظر با آن روی نمودار $y = f(2x-1)$ قرار دارد.

$a + b$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) -۱ (۴) ۲

۱۳۳- اگر $f(x) = 2^{-x}$ و $g = \{(5, -5), (4, -1), (2, 1), (3, a)\}$ باشد، حداکثر مقدار a برای اینکه تابع $f \circ g$ صعودی باشد،

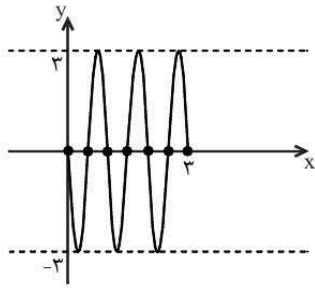
کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۵

۱۳۴- مجموع ضرایب خارج قسمت تقسیم $5x^7 - 3x^2 - 4x + 2$ بر $x+1$ برابر کدام است؟

(۱) -۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) ۱

۱۳۵- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. حاصل $a \cdot b$ کدام است؟



(۱) ۶-

(۲) ۳-

(۳) ۴/۵

(۴) ۶

۱۳۶- تابع $f(x) = \tan ax$ در بازه $(-b, b)$ اکیداً نزولی است. اگر بزرگترین مقدار b برابر ۲ باشد، $f(1)$ کدام است؟

(۴) $\sqrt{3}$

(۳) -۱

(۲) $-\sqrt{3}$

(۱) ۱

۱۳۷- معادله $\sin x \cos^3 x + \cos x \sin^3 x = \frac{1}{6}$ در بازه $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

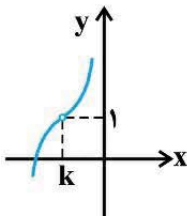
(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۱۳۸- اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow k^-} \frac{x}{1-f(x)}$ کدام است؟



(۲) $-\infty$

(۱) $+\infty$

(۴) $-k$

(۳) صفر

۱۳۹- اگر $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 + 3x}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(\frac{1}{x})$ کدام است؟

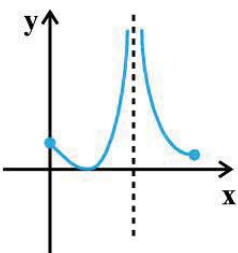
(۴) ۱

(۳) $\frac{1}{2}$

(۲) صفر

(۱) $\frac{1}{3}$

۱۴۰- شکل مقابل، نمودار تابع $y = \frac{1 - a \sin x}{1 + b \cos x}$ در بازه $[0, 2\pi]$ است. حاصل $a + b$ کدام است؟



(۲) -۱

(۱) صفر

(۴) ۲

(۳) $\frac{1}{2}$

۵۱- اگر $A = \begin{bmatrix} a-b & a-2b \\ 2b+3 & c+1 \end{bmatrix}$ ماتریسی اسکالر باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۳

۵۲- معادله $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ دارای چند ریشه متمایز است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۵۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس $(A^{10} - A^6)$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۵۴- اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ باشد، وارون ماتریس $A+B$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -3 \\ \frac{1}{4} & -2 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -2 \\ \frac{1}{4} & -3 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 2 \\ -\frac{1}{4} & 3 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 3 \\ -\frac{1}{4} & 2 \end{bmatrix}$

۵۵- به ازای کدام مقدار m ، دستگاه معادلات $\begin{cases} (m+1)x + 3y = m \\ x + (m-1)y = 2 \end{cases}$ فاقد جواب است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) -۳

۵۶- چند ماتریس وارون پذیر A وجود دارد که به صورت $A = \begin{bmatrix} 3|A| & 5 \\ |A| & |A| \end{bmatrix}$ تعریف شده باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۵۷- نقاط A، B و C در یک صفحه مفروض‌اند. حداکثر چند نقطه ممکن است در این صفحه وجود داشته باشد که

از A و B به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۵۸- بزرگ‌ترین عدد صحیح m که به ازای آن، معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y + m = 0$ متعلق به یک دایره باشد، کدام

است؟

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

۵۹- به ازای کدام مقدار m، نمی‌توان از نقطه $A(m, m-1)$ مماس بر دایره به معادله $x^2 + y^2 = 5$ رسم کرد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۰- وضعیت نسبی دو دایره $C_1: x^2 + y^2 + 4x = 0$ و $C_2: x^2 + y^2 - 2x + 8y + 8 = 0$ کدام است؟

- (۱) متخارج (۲) متقاطع (۳) مماس داخل (۴) مماس خارج

- ۳۰ سوال -

۱۴۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & y \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ و $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ باشد، آنگاه حاصل $x+y$ کدام می‌تواند باشد؟

$(x, y \in \mathbb{N})$

- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

۱۴۲- اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه حاصل $A^{10} + A^{20} + A^{30}$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} -6 & 9 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

۱۴۳- اگر A یک ماتریس مربعی و $A^3 = 10I$ باشد، وارون ماتریس $A - 2I$ کدام است؟

- (۱) $A^2 + 2A + 4I$ (۲) $\frac{1}{2}(A^2 + 2A + 4I)$ (۳) $A^2 - 2A + 4I$ (۴) $\frac{1}{2}(A^2 - 2A + 4I)$

۱۴۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ و $BAC = 2I$ باشد، آنگاه $|C|$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۴ (۴) -۴

۱۴۵- مقادیر x از رابطه $10 = \begin{vmatrix} 0 & x-2 & x-3 \\ x+3 & 0 & 3 \\ x+2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ کدام است؟

- (۱) ± 4 (۲) ± 2 (۳) $\pm \sqrt{6}$ (۴) $\pm 2\sqrt{3}$

۱۴۶- اگر دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه $\begin{cases} ax+by=2 \\ cx+dy=3 \end{cases}$ برابر (-1) و وارون ماتریس ضرایب این دستگاه به صورت

$\begin{bmatrix} -2a & 3 \\ b & -2 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه حاصل $x+y$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۱۴۷- دایره‌ای از نقاط $A(1,1)$ و $B(-2,-2)$ گذشته و خط $y = x+3$ شامل قطری از آن است. شعاع این دایره کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\sqrt{6}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۳

۱۴۸- مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله آن‌ها از نقطه $A(-2,4)$ ، $\frac{\sqrt{2}}{2}$ برابر فاصله آن‌ها از نقطه $B(1,3)$ باشد، کدام است؟

- (۱) دایره‌ای به مرکز $(-5,5)$ و شعاع $2\sqrt{5}$ (۲) دایره‌ای به مرکز $(5,-5)$ و شعاع $2\sqrt{5}$
(۳) دایره‌ای به مرکز $(-5,5)$ و شعاع $4\sqrt{5}$ (۴) دایره‌ای به مرکز $(5,-5)$ و شعاع $4\sqrt{5}$

۱۴۹- دایره‌ای که مرکز آن در ناحیه اول قرار دارد، بر دو خط $y = 3x$ و $x = 3y$ مماس است. اگر شعاع این دایره برابر $2\sqrt{10}$ باشد، مجموع مختصات مرکز این دایره کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۲۰ (۴) ۴۰

۱۵۰- به ازای کدام مقدار a ، دو دایره $C_1: x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$ و $C_2: x^2 + y^2 - 4x - 6y + a = 0$ بر یکدیگر مماس

خارج‌اند؟

۱۱ (۴)

۹ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

ریاضیات گسسته - سطح ۱، استدلال ریاضی

۶۱- در اثبات نامساوی $a^2 + b^2 \geq -4(a + b + 2)$ به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) به کدام رابطه همیشه درست

می‌رسیم؟

$$(a + 2)^2 + (b + 2)^2 \geq 0 \quad (2)$$

$$(a - 2)^2 + (b - 2)^2 \geq 0 \quad (1)$$

$$(a + b - 2)^2 \geq 0 \quad (4)$$

$$(a + b + 2)^2 \geq 0 \quad (3)$$

ریاضیات گسسته - سطح ۱، بخش پذیری

۶۲- به ازای چند عدد صحیح متمایز a ، هر دو عدد $5m + 4$ و $6m + 5$ ممکن است بر عدد a بخش‌پذیر

باشند؟ ($m \in \mathbb{Z}$)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۶۳- باقی‌مانده تقسیم a بر ۸ و ۶ به ترتیب برابر ۵ و ۱ است. باقی‌مانده تقسیم a بر ۲۴ کدام است؟

۱۱ (۴)

۱۳ (۳)

۱۷ (۲)

۲۱ (۱)

۶۴- باقی‌مانده تقسیم $2^{32} + 7$ بر عدد ۱۱ کدام است؟

۳ (۲)

(۱) صفر

۹ (۴)

۴ (۳)

ریاضیات گسسته - سطح ۱، همنهشتی

۶۵- اگر ۱۵ خرداد در سالی روز پنجشنبه باشد، ۱۶ آذر آن سال چه روزی از هفته است؟

(۲) دوشنبه

(۱) یکشنبه

(۴) چهارشنبه

(۳) سه‌شنبه

۶۶- چند عدد طبیعی دو رقمی وجود دارد که ۷ برابر آن به علاوه ۵ بر ۹ بخش پذیر باشد؟

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

ریاضیات گسسته - سطح ۱، گراف و مدل سازی

۶۷- مجموعه رأس های گراف G به صورت $V = \{a, b, c, d\}$ است. اگر $N_G[a] \cap N_G[b] = \{a, b\}$ و

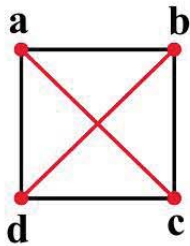
$N_G[a] \cap N_G[c] = \{a, c, d\}$ باشد، آنگاه $N_G[b] \cap N_G[d]$ کدام است؟

$\{a, b, d\}$ (۲)

$\emptyset$ (۱)

$\{a\}$ (۴)

$\{a, c\}$ (۳)



۶۸- گراف G در شکل مقابل، چند زیرگراف ۱- متنظم دارد؟

۴ (۱)

۶ (۲)

۸ (۳)

۹ (۴)

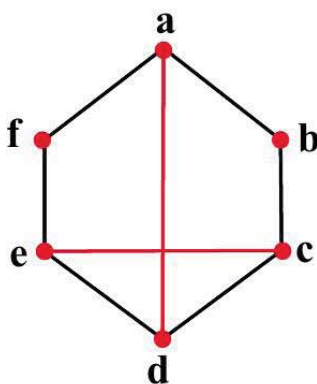
۶۹- مرتبه و اندازه گراف G به ترتیب برابر ۸ و ۱۶ است. اختلاف بین مرتبه و اندازه گراف $\bar{G}$ کدام است؟

۴ (۲)

صفر (۱)

۱۲ (۴)

۸ (۳)



۷۰- در شکل مقابل چند مسیر از رأس a به رأس c وجود دارد؟

۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

۳۰- سوال

۱۵۱- چند عدد طبیعی مانند a وجود دارد به طوری که عدد $a^2 + 2$ بر عدد $a + 4$ بخش پذیر باشد؟

۱۵۲- به ازای هر عدد طبیعی $n, n \leq 100$ ، دو عدد $12n+7$ و $5n-2$ نسبت به هم اول هستند. بیشترین مقدار n کدام است؟

- (۱) ۲۲ (۲) ۲۳ (۳) ۲۴ (۴) ۲۵

۱۵۳- باقی مانده تقسیم $2^{50} \times 3^{40}$ بر عدد ۱۳ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۱۲

۱۵۴- اگر $2a+9$ و $7a-4$ در یک دسته هم نهشتی به پیمانه ۱۱ قرار داشته باشند، آنگاه به ازای کدام مقدار b ،

$a^3 + a^2 + 2a + b$ به دسته هم نهشتی $[7]_{11}$ تعلق دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۵۵- چند عدد به صورت $\overline{51xy32}$ وجود دارد که بر ۹۹ بخش پذیر باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۵۶- می خواهیم ۱۲۳ کیلو شکر را در کیسه های ۴ کیلویی و ۵ کیلویی بسته بندی کنیم. این کار به چند روش

امکان پذیر است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۱۵۷- چند گراف ساده وجود دارد که حاصل ضرب مرتبه و اندازه آن ها برابر ۱۲ باشد؟

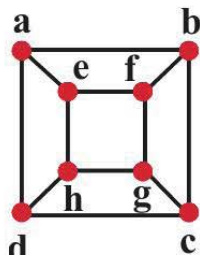
- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۵۸- با حذف ۲۴ یال از گراف کامل K_p ، گراف G حاصل شده است. اگر گراف $\bar{G}$ ، ۴-منتظم باشد، آنگاه

$\Delta(G)$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۱۵۹- در گراف شکل مقابل چند دور به طول ۶ وجود دارد؟



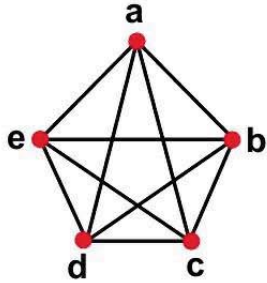
۶ (۲)

۴ (۱)

۱۲ (۴)

۸ (۳)

۱۶۰- گراف G در شکل مقابل، چند زیرگراف ۲-منتظم از مرتبه ۴ دارد؟



۱۰ (۲)

۵ (۱)

۲۰ (۴)

۱۵ (۳)

۴۱- گزینه «۴»

علت انتخاب:

از سؤال‌های پرتکرار امتحانات نهایی سال‌های ۹۰ و ۹۴ بوده است.

پاسخ تشریحی

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{x-2} = +\infty$$

دقت کنید در عبارت $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2}{(x+2)(x-2)}$ ، $x=2$ را در عبارت‌های غیرصفر جای‌گذاری می‌کنیم.

(مسئله ۲ - هرهای نامتناهی - هر در پی‌نهایت: صفحه‌های ۳۶ تا ۵۵)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

۴۲- گزینه «۳»

علت انتخاب:

در کنکور سال‌های اخیر (۹۸ و ۹۹)، از مباحث فصل سوم کتاب حسابان ۲، توجه بیشتر طراحان به بحث مجانب قائم بوده است. بنابراین دیدن، حل کردن و تمرین کردن در این مبحث، نتیجه بهتری را در آزمون‌های مدرسه و کنکور به همراه خواهد داشت.

پاسخ تشریحی

$$f(x) = \frac{x-1}{x(x+a)}$$

ریشه‌های مخرج $x=0$ و $x=-a$ هستند و ریشه صورت نیز $x=1$ است. بنابراین برای اینکه نمودار تابع f فقط یک مجانب قائم داشته باشد، لازم است یکی از ریشه‌های مخرج با ریشه صورت برابر باشد. پس داریم: $x=-a=1 \Rightarrow a=-1$. هم‌چنین به ازای $a=0$ ، عبارت مخرج به صورت x^2 می‌شود که ریشه مضاعف دارد و تنها مجانب آن $x=0$ است.

(مسئله ۲ - هرهای نامتناهی - هر در پی‌نهایت: صفحه‌های ۵۵ تا ۵۸)

☐ ۴

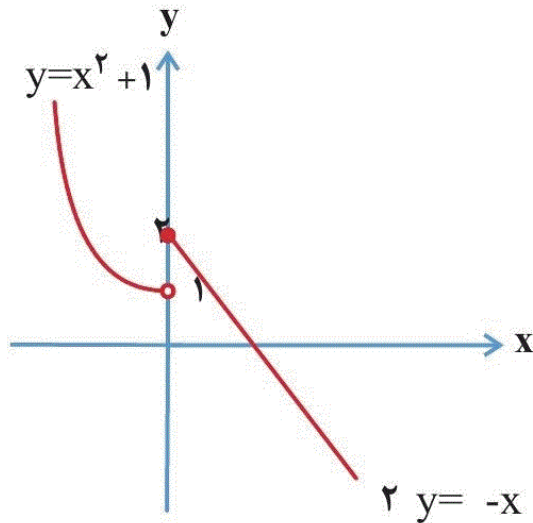
☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

علت انتخاب:

در فصل اول کتاب حسابان ۲، مفهوم یکنوایی در تابع تعریف و فهم نموداری آن بیان شده است و این سؤال نیز دقیقاً بر همین اساس و مشابه کار در کلاس ۲ صفحه ۱۸ کتاب درسی طرح شده است.



پاسخ تشریحی

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

واضح است که نمودار تابع f ، غیر یکنواست.

(حسابان ۲ - تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

علت انتخاب:

یکی از تیپ سؤال‌های مهم در بحث «حد در بی‌نهایت» است که جزو سؤالات امتحانات نهایی هم بوده است.

پاسخ تشریحی

حاصل حد در $+\infty$ برابر $-\frac{2}{3}$ شده است. طبق قضیه ۹ صفحه ۶۵ کتاب درسی، می‌دانیم این در صورتی امکان‌پذیر است که درجه‌های عبارت‌های صورت و مخرج برابر باشند. حال اگر $m = 0$ باشد، درجه صورت برابر ۲ خواهد بود. پس n نیز باید

برابر ۲ باشد و در این صورت داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{6x^2 - x} = \frac{1}{6} \neq -\frac{2}{3}$$

بنابراین این حالت امکان‌پذیر نیست. در نتیجه $m \neq 0$ و درجه عبارت صورت برابر ۳ است.

$$\Rightarrow n = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{mx^3}{6x^3} = \frac{m}{6} = -\frac{2}{3} \Rightarrow m = -4$$

$$\Rightarrow m + n = -1$$

(مسابقه ۲ - فرهای نامتناهی - هر در بی‌نهایت: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۵)

۴

۳✓

۲

۱

علت انتخاب:

الف) انقباض و انبساط افقی در دوازدهم مطرح شده است، بنابراین طراحی چنین سؤالاتی اهمیت این موضوع جدید را می‌رساند.

ب) سؤال ترکیبی است که هم برد محاسبه می‌شود و هم دامنه، بنابراین سؤال کاملی می‌تواند باشد.

برد تابع g همان برد تابع f است؛ زیرا هیچ‌گونه تبدیلی در راستای عمودی انجام نشده است. اما چون برای رسم نمودار g لازم است طول نقاط f را در ۲ ضرب کنیم، دامنه g بازه $[-6, 2]$ خواهد شد.

$$\begin{cases} D_g = [-6, 2] \\ R_g = [0, 2] \end{cases} \Rightarrow D_g \cap R_g = [0, 2]$$

اعداد صحیح صفر، ۱ و ۲ در این بازه قرار دارند که مجموع آن‌ها برابر ۳ است.

(مسابقه ۲ - تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۴

۳✓

۲

۱

علت انتخاب:

علت انتخاب: الف) از ساده‌ترین و مهم‌ترین معادلات مثلثاتی، معادلاتی هستند که طرفین تساوی معادله، نسبت مثلثاتی واحدی هستند. در این معادلات زاویه مجهول α در خود معادله حضور دارد.
 ب) اغلب دانش‌آموزان در حل معادلات شامل $\tan$ مشکل دارند و حل تست بیشتر از این مبحث، کمک بیشتری به تفهیم این مسئله می‌کند.

پاسخ تشریحی

$$\tan \Delta x = \tan(2x - \pi) \Rightarrow \Delta x = 2x - \pi + k'\pi$$

$$\Rightarrow 2x = (k' - 1)\pi \Rightarrow x = (k' - 1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\frac{\pi}{2}$$

(مسئله ۲ - مثلثات: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۱ ☐ ۲ ☒ ۳ ☐ ۴ ☐

علت انتخاب:

یکی از مهم‌ترین روش‌های حل معادلات مثلثاتی، تجزیه عبارت معادله به حاصل ضرب دو عبارت ساده‌تر و قابل حل است که جواب کلی معادله، اجتماع هر کدام از این جواب‌ها است. سؤال انتخاب شده با این روش هم حل می‌شود. هم‌چنین این سؤال یکی از سؤالات امتحان نهایی سال ۹۰ بوده است.

پاسخ تشریحی

$$2 \sin^2 x - \sin x = \sin x(2 \sin x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = 0 \text{ یا } x = 2\pi \\ \sin x = \frac{1}{2} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{6} \text{ یا } x = \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله در بازه $[0, 2\pi]$ برابر 3π است.

(مسئله ۲ - مثلثات: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۱ ☐ ۲ ☐ ۳ ☒ ۴ ☐

علت انتخاب:

در مبحث سؤالات مربوط به نمودار توابع مثلثاتی، سؤالی کامل است که هر سه رابطه مهم صفحه ۲۷ کتاب درسی را در خود بگنجانند که این سؤال، این ویژگی مهم را دارد.

پاسخ تشریحی

بیشترین مقدار تابع $y_{\max} = |a| + 4$ و کمترین مقدار آن $y_{\min} = -|a| + 4$ است. داریم:

$$y_{\max} - y_{\min} = 2|a| = 8 \Rightarrow |a| = 4$$

از طرفی دوره تناوب نیز از رابطه $T = \frac{2\pi}{|\pi a|} = \frac{2}{|a|}$ به دست می آید:

$$\Rightarrow T = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

(مسئله ۲ - مثلثات: صفحه ۲۷)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

علت انتخاب:

مشابه سؤال ۱۰۵ کنکور سراسری ۹۹ است.

پاسخ تشریحی

باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - x - 6$ را به صورت $ax + b$ در نظر می گیریم. طبق قضیه تقسیم داریم:

$$f(x) = (x - 3)(x + 2)q(x) + ax + b$$

باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x - a$ نیز برابر $f(a)$ است. حال با جای گذاری $x = -2$ و $x = 3$ در قضیه تقسیم بالا داریم:

$$\begin{cases} x = -2 : f(-2) = 0 - 2a + b = 1 \Rightarrow b - 2a = 1 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 : f(3) = 0 + 3a + b = 2 & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} a = \frac{1}{5}, b = \frac{7}{5}$$

پس باقی مانده مورد نظر $r(x) = \frac{x+7}{5}$ است.

(مسئله ۲ - تابع: صفحه های ۱۹ و ۲۰)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

علت انتخاب:

الف) سؤال کاملی است که تقریباً تمام تبدیلات افقی و عمودی را در خودش جای داده است.

ب) فرآیند تبدیل نمودار به صورت عکس انجام می شود و این می تواند چالش بسیاری از دانش آموزان را برطرف کند.

پاسخ تشریحی

ضابطه f را به صورت $f(x) = 4(x - \frac{1}{4})^2 - 1$ می نویسیم.

پس برای تبدیل نمودار f به نمودار g ، کافی است f را $\frac{1}{4}$ واحد به چپ و ۱ واحد به بالا انتقال دهیم و در انتها عرض نقاط آن را در $\frac{1}{4}$ ضرب کنیم.

(حسابان ۲ - تابع: صفحه های ۱ تا ۲۱)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

۱۳۱- گزینه «۱»

(مشابه سؤال کتاب سه سطحی حسابان ۲)

علت انتخاب:

الف) تابع درجه سوم برای اولین بار در دوازدهم مطرح می شود و ترکیب نمودار آن با مبحث تبدیل نمودارها که در ابتدای فصل عنوان شده است، سؤال مهمی را شکل می دهند.

ب) حل معادله مربوط به این سؤال نیاز به تسلط بر اتحادهای جبری (سال دهم) دارد که درجه اهمیت سؤال را بیشتر کرده است.

پاسخ تشریحی

$$f(x) = (x+1)^3 \xrightarrow[\text{واحد به بالا}]{\text{واحد به راست}} g(x) = (x-1)^3 + 2$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow (x+1)^3 - (x-1)^3 = 2 \Rightarrow [(x+1) - (x-1)][(x+1)^2 + (x+1)(x-1) + (x-1)^2] = 2$$

$$\Rightarrow 2(3x^2 + 1) = 2 \Rightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 1$$

(حسابان ۲، تابع: صفحه های ۱ تا ۱۴)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

علت انتخاب:

ابتدایی‌ترین مبحث در تبدیل نمودارها، بحث تناظر نقاط است؛ در واقع تبدیل نمودار همان تبدیل نقاط نمودار توابع است. پس تسلط بر این موضوع می‌تواند کمک شایانی به حل مسائل این فصل می‌کند.

پاسخ تشریحی

نقطه $(4, 5)$ روی نمودار $y = f(1+x) + a$ قرار دارد، پس:

$$5 = f(1+4) + a \Rightarrow f(5) = 5 - a \Rightarrow (5, 5-a) \in f$$

از طرفی نقطه $(b, 4)$ نیز روی نمودار $y = f(2x-1)$ قرار دارد، پس:

$$4 = f(2b-1) \Rightarrow (2b-1, 4) \in f$$

این دو نقطه متناظر با یک نقطه در تابع f هستند، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} 2b-1=5 \\ 4=5-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=3 \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow a+b=4$$

(حسابان ۲، تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱✓ ۲ ۳ ۴

علت انتخاب:

نکات مهمی در رابطه با یکنوایی ترکیب توابع (مثلاً fog) وجود دارد که این سؤال به یکی از آن‌ها اشاره می‌کند. هم‌چنین وجود تابع زوج مرتبی و نمایی، به مفهومی‌ترین شکل به توابع یکنوا می‌پردازد.

پاسخ تشریحی

تابع f اکیداً نزولی است. پس برای اینکه fog صعودی باشد، لازم است تابع g نزولی باشد:

$$g = \{(2, 1), (3, a), (4, -1), (5, -5)\} \Rightarrow -1 \leq a \leq 1$$

(حسابان ۲، تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴

علت انتخاب:

در کتاب درسی فقط باقی مانده تقسیم عنوان شده است، این سؤال مجموع ضرایب خارج قسمت (که همان مقدار خارج قسمت به ازای $x=1$ است) را مورد سؤال قرار داده است که یک مرحله درجه سختی سؤال را بیشتر کرده است.

پاسخ تشریحی

ابتدا رابطه تقسیم را می نویسیم:

$$5x^3 - 3x^2 - 4x + 2 = (x+1)Q(x) + R \quad (*)$$

برای محاسبه مجموع ضرایب خارج قسمت $Q(x)$ باید $Q(1)$ را بیابیم، اما قبل از محاسبه $Q(1)$ باید R را محاسبه کنیم:

$$x = -1 \xrightarrow{(*)} -5 - 3 + 4 + 2 = 0 + R \Rightarrow R = -2$$

با قراردادن $R = -2$ در رابطه $(*)$ داریم:

$$\xrightarrow{(*)} 5x^3 - 3x^2 - 4x + 2 = (x+1)Q(x) - 2$$

با قراردادن $x=1$ ، مقدار $Q(1)$ محاسبه می شود:

$$5 - 3 - 4 + 2 = 2Q(1) - 2 \Rightarrow Q(1) = 1$$

(مسابان ۲، تابع: صفحه های ۱۹ و ۲۰)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

علت انتخاب:

سؤال کنکور سراسری سال ۹۲ است که در کتاب آبی هم مطرح شده است که از لحاظ نموداری مفهوم دوره تناوب توابع مثلثاتی را مورد سنجش قرار می دهد.

با توجه به نمودار، تابع در بازه $[0, 3]$ سه بار تکرار شده است، پس دوره تناوب آن $T=1$ است، لذا:

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 1 \Rightarrow |b| = 2$$

از طرفی با دقت در نمودار تابع $y = \sin x$ ، دیده می شود که جای نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع عوض شده است، پس a و b مختلف علامت اند.

با فرض $a < 0$ و با توجه به اینکه ماکزیمم تابع برابر با $|a| = 3$ است، $a = -3$ و $b = 2$ به دست می آید.

$$\Rightarrow a.b = -3 \times 2 = -6$$

توجه کنید که مقادیر $a = 3$ و $b = -2$ نیز قابل قبول اند.

(مسابان ۲، مثلثات: صفحه های ۲۴ تا ۲۹)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

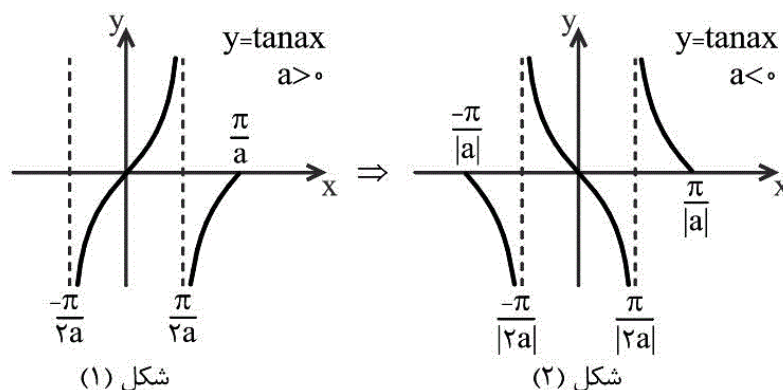
☐ ۱

علت انتخاب:

اکثر دانش آموزان در نمودار تانژانت مشکل دارند. حال ترکیب تابع تانژانت با تبدیل نمودارها و همچنین یکنوایی آن، سؤال بسیار مهمی را تولید کرده است. که حل کردن آن بسیار به تسلط بر این موضوعات کمک می کند.

پاسخ تشریحی

برای آنکه تابع $f(x) = \tan ax$ در بازه $(-b, b)$ اکیداً نزولی باشد، باید $a < 0$ باشد. برای درک این موضوع به دو نمودار زیر دقت کنید:



با توجه به شکل (۲)، بزرگترین مقدار b که به ازای آن تابع f اکیداً نزولی است برابر با $\frac{\pi}{2|a|}$ است، بنابراین:

$$-\frac{\pi}{2a} = 2 \Rightarrow a = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow f(x) = \tan\left(-\frac{\pi x}{4}\right)$$

$$\Rightarrow f(1) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

(مسابقه ۲، مثلثات: صفحه‌های ۲۹ تا ۳۴)

۴

۳✓

۲

۱

علت انتخاب:

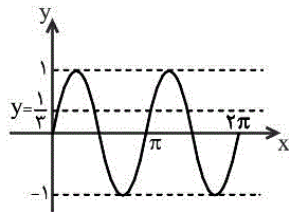
حل این سؤال نیاز به تسلط بر اتحادهای مثلثاتی یازدهم دارد که سؤالی ترکیبی و مهم حساب می‌شود.

پاسخ تشریحی

$$\sin x \cos^3 x + \cos x \sin^3 x = \sin x \cos x (\cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{6}$$

پس معادله به فرم $\sin 2x = \frac{1}{3}$ در می‌آید. نمودار $y = \sin 2x$ از انقباض افقی نمودار $y = \sin x$ با ضریب ۲ به دست می‌آید.

با توجه به شکل زیر، نمودارهای $y = \sin 2x$ و $y = \frac{1}{3}$ در بازه $[0, \pi]$ ۲ نقطه تلاقی دارند، پس معادله دارای ۲ ریشه است.



(مسابقان ۲، مثلثات: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۴

۳

۲✓

۱

علت انتخاب:

همواره سؤالات نموداری مربوط به حدود نامتناهی سؤالات مهمی است، چون بعضی از دانش‌آموزان در تعیین علامت‌ها دچار مشکل می‌شوند. بنابراین حل چنین سؤالات برای رفع این مشکل لازم و ضروری است.

پاسخ تشریحی

با توجه به نمودار، $k < 0$ است، از طرفی وقتی $x \rightarrow k^-$ ، $f(x) \rightarrow 1^-$ ، بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow k^-} \frac{x}{1 - f(x)} = \frac{k}{0^+} = \frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty$$

(مسابقان ۲، فرهای نامتناهی - هر در پی‌نهایت: صفحه‌های ۴۶ تا ۵۵)

۴

۳

۲✓

۱

سؤال خوبی است که حد تابع را در بی نهایت می خواهد، اما این «بی نهایت» را به شکل دیگری (تابع هموگرافیک $\frac{1}{x}$) مطرح کرده است.

پاسخ تشریحی

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

(حسابان ۲، فرهای نامتناهی - هر در بی نهایت: صفحه های ۵۹ تا ۶۵)

۴

۳✓

۲

۱

(مشابه سؤال ۳۲۷ کتاب سه سطحی حسابان ۲)

سؤال دشار از مبحث مجانب قائم که با توابع مثلثاتی ترکیب شده است. همواره سؤالات ترکیبی، بسیار پرمحتوا و مهم هستند.

پاسخ تشریحی

با توجه به شکل، تابع دارای یک مجانب قائم در بازه $(0, 2\pi)$ می باشد. چون در دو سمت مجانب، تابع به $+\infty$ میل می کند، پس مخرج ریشه مضاعف دارد. از طرفی معادله $\cos x = k$ هنگامی جواب مضاعف دارد که $k = \pm 1$ باشد، بنابراین باید داشته باشیم:

$$1 + b \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{-1}{b} = \pm 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

$$b = 1 \Rightarrow 1 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$$

$$b = -1 \Rightarrow 1 - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \xrightarrow{0 < x < 2\pi} \text{ جواب ندارد.}$$

در نتیجه با توجه به محاسبات فوق، $b = 1$ است، از طرفی با توجه به نمودار، معادله $y = 0$ باید جواب مضاعفی در بازه $(0, \pi)$ داشته باشد. معادله $\sin x = k$ هنگامی جواب مضاعف دارد که $k = \pm 1$ باشد.

$$1 - a \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{a} = \pm 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$a = 1 \Rightarrow 1 - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$a = -1 \Rightarrow 1 + \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \xrightarrow{0 < x < \pi} \text{ جواب ندارد}$$

بنابراین $a = b = 1$ می باشد.

(حسابان ۲، فرهای نامتناهی - هر در بی نهایت: صفحه های ۵۵ تا ۵۸)

۴✓

۳

۲

۱

علت انتخاب:

تسلط بر تعاریف مربوط به ماتریس‌ها و شناخت تفاوت بین ماتریس قطری و اسکالر.

پاسخ تشریحی

در ماتریس اسکالر، درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی همگی برابر صفر هستند و درایه‌های واقع بر قطر اصلی با هم برابرند. بنابراین برای ماتریس اسکالر A داریم:

$$\begin{cases} 2b + 3 = 0 \Rightarrow b = -\frac{3}{2} \\ a - 2b = 0 \Rightarrow a = 2b = -3 \\ c + 1 = a - b = -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$2\left(-\frac{3}{2}\right) = -3$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس A برابر است با:

(هندسه ۳ - ماتریس و کاربردها: صفحه ۱۲)

۱✓ ۲ ۳ ۴

علت انتخاب:

۱) تسلط بر ضرب ماتریس‌ها و درک خاصیت شرکت‌پذیری در ضرب ماتریس‌ها

۲) مشابهت با سؤال ۱۳۰ کنکور سراسری ریاضی ۹۸

$$\begin{bmatrix} x & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x+5 & x+4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x(x+5) + x+4 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x + 8 = 0 \Rightarrow (x+2)(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -4 \end{cases}$$

(هندسه ۳ - ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

علت انتخاب:

- (۱) شناخت روش محاسبه توان در ماتریس ها و درک تأثیر ماتریس همانی در ضرب ماتریس ها
(۲) مشابهت با سؤال ۱۰۲ کنکور سراسری ریاضی ۸۳

پاسخ تشریحی

ابتدا ماتریس A^2 را به دست می آوریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^n = \begin{cases} I: \text{زوج } n \\ A: \text{فرد } n \end{cases}$$

بنابراین برای توان های طبیعی ماتریس A داریم:

$$A^{10} - A^9 = I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه های این ماتریس، برابر ۱ است.

(هنر سه ۳ - ماتریس و کاربردها: صفحه های ۱۷ تا ۲۱)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

علت انتخاب:

- شناخت نحوه به دست آوردن وارون یک ماتریس مربعی مرتبه ۲ و درک عدم برابری وارون مجموع دو ماتریس با مجموع وارون های آن دو ماتریس

پاسخ تشریحی

اگر A و B دو ماتریس مربعی باشند، آن گاه در حالت کلی $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$. از طرفی وارون هر ماتریس برابر خود آن ماتریس است، پس ابتدا با وارون کردن ماتریس های A^{-1} و B^{-1} ، ماتریس های A و B را پیدا می کنیم.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 8 & -12 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow (A+B)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 12 \\ -1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 3 \\ -\frac{1}{4} & 2 \end{bmatrix}$$

(هنر سه ۳ - ماتریس و کاربردها: صفحه های ۲۲ و ۲۳)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

علت انتخاب:

شناخت حالت‌های متفاوت برای تعداد جواب‌های دستگاه دو معادله و دو مجهول

پاسخ تشریحی

دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ در صورتی فاقد جواب است که $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ باشد.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{m+1}{1} = \frac{3}{m-1} \Rightarrow (m+1)(m-1) = 3$$

$$\Rightarrow m^2 - 1 = 3 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$$

حال به ازای هر یک از مقادیر به دست آمده، برقراری رابطه $\frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ را بررسی می‌کنیم.

$$m = 2 \Rightarrow \frac{3}{2-1} \neq \frac{2}{2}$$

دستگاه جواب ندارد.

$$m = -2 \Rightarrow \frac{3}{-2-1} = \frac{-2}{2}$$

دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

(هنر سه ۳ - ماتریس و کاربردها: صفحه ۲۶)

۱ ✓
۲
۳
۴

علت انتخاب:

(۱) درک مفهوم وارون‌پذیری یک ماتریس

(۲) مشابهت با تمرین ۳ صفحه ۳۰ کتاب درسی

پاسخ تشریحی

ماتریس مربعی A وارون‌پذیر است هرگاه $|A| \neq 0$ باشد، بنابراین داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 3|A| & 5 \\ |A| & |A| \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 3|A|^2 - 5|A| \Rightarrow 3|A|^2 - 6|A| = 0$$

$$\Rightarrow 3|A|(|A| - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \text{ غلط} \\ |A| = 2 \end{cases}$$

بنابراین تنها ماتریس وارون‌پذیر A به ازای $|A| = 2$ حاصل می‌شود که برابر $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ است.

(هنر سه ۳ - ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۱
۲ ✓
۳
۴

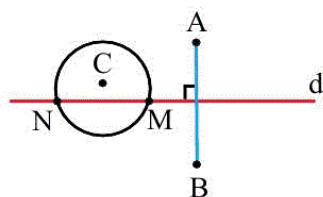
علت انتخاب:

(۱) درک مکان هندسی نقاط متساوی الفاصله از دو نقطه و نقاط به فاصله ثابت از یک نقطه

(۲) مشابهت با تمرین ۳ صفحه ۳۹ کتاب درسی

پاسخ تشریحی

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقاط A و B به یک فاصله باشند، عمودمنصف پاره خط AB است. از طرفی مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه C به فاصله ۳ سانتی متر باشند، دایره‌ای به مرکز C و به شعاع ۳ سانتی متر است. اگر عمودمنصف پاره خط AB، دایره مفروض را در دو نقطه قطع کند، مسئله دارای حداکثر جواب یعنی دو نقطه است. (نقاط M و N روی شکل).



(هنر سه ۳ - آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

۴

۳✓

۲

۱

علت انتخاب:

شناخت معادله ضمنی دایره و تفکیک حالت‌هایی که معادله متعلق به یک دایره، یک نقطه و یا تهی است.

پاسخ تشریحی

معادله $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ متعلق به یک دایره است، هرگاه $a^2 + b^2 - 4c > 0$. بنابراین داریم:

$$(-2)^2 + 4^2 - 4m > 0 \Rightarrow 4 + 16 - 4m > 0 \Rightarrow 4m < 20 \Rightarrow m < 5$$

پس بزرگ‌ترین عدد صحیح m که به ازای آن، معادله داده شده متعلق به یک دایره باشد، برابر $m = 4$ است.

(هنر سه ۳ - آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۲)

۴

۳

۲✓

۱

علت انتخاب:

تشخیص وضعیت نقطه نسبت به دایره و تأثیر آن در تعداد مماس‌های رسم شده بر دایره.

پاسخ تشریحی

می‌دانیم از نقاط واقع در درون یک دایره، نمی‌توان مماسی بر آن دایره رسم کرد.

از طرفی نقطه A درون دایره C(O, R) قرار دارد، هرگاه $OA < R$ باشد.

$$x^2 + y^2 = 5 \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز: } O(0,0) \\ \text{شعاع: } R = \sqrt{5} \end{cases}$$

$$OA = \sqrt{m^2 + (m-1)^2}$$

$$OA < R \Rightarrow \sqrt{m^2 + (m-1)^2} < \sqrt{5} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} m^2 + m^2 - 2m + 1 < 5$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 2m - 4 < 0 \Rightarrow m^2 - m - 2 < 0 \Rightarrow (m-2)(m+1) < 0$$

$$\Rightarrow -1 < m < 2$$

بنابراین در بین مقادیر داده شده، به ازای $m = 1$ ، نقطه A داخل دایره قرار گرفته و نمی‌توان از آن مماسی بر دایره رسم کرد.

(هنر سه ۳ - آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۴

۳

۲

۱✓

۶۰- گزینه «۴»

(مشابه سؤال ۱۹۱ کتاب ۵۰۰ سؤال تشریحی هنر سه ۳)

علت انتخاب:

تعیین مرکز و شعاع دایره از روی معادله ضمنی و تشخیص وضعیت نسبی دو دایره

پاسخ تشریحی

ابتدا مختصات مرکز و شعاع دایره‌ها و سپس طول خط‌المركزین دو دایره را به دست آورده و سپس وضعیت دو دایره را نسبت به یکدیگر تعیین می‌کنیم.

$$C_1: x^2 + y^2 + 4x = 0$$

$$O_1(-2, 0), R_1 = \frac{1}{2}\sqrt{4^2} = 2$$

$$C_2: x^2 + y^2 - 2x + 8y + 8 = 0$$

$$O_2(1, -4), R_2 = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 8^2 - 4(8)} = 3$$

$$O_1O_2 = \sqrt{(1+2)^2 + (-4-0)^2} = 5$$

$$O_1O_2 = R_1 + R_2 \Rightarrow \text{دو دایره مماس خارج‌اند.}$$

(هنر سه ۳ - آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۴✓

۳

۲

۱

درک مفهوم تعویض پذیری دو ماتریس و ارتباط آن با اتحادهای جبری

پاسخ تشریحی

اتحادهای جبری زمانی برای دو ماتریس مربعی هم مرتبه برقرار هستند که دو ماتریس نسبت به عمل ضرب تعویض پذیر باشند. برای دو ماتریس A و B داریم:

$$AB = BA \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & y \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1+4x & y+x \\ 6 & 2y+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2y & x+y \\ 6 & 4x+1 \end{bmatrix}$$

برای برقراری تساوی فوق کافی است $4x = 2y$ باشد، یعنی داریم:

$$y = 2x \Rightarrow x + y = x + 2x = 3x (x \in \mathbb{N})$$

بنابراین حاصل $x + y$ همواره عددی مضرب ۳ است.

۴

۳✓

۲

۱

شناخت روش محاسبه توان‌های بزرگ یک ماتریس براساس یافتن توانی از ماتریس که مضربی از ماتریس همانی باشد.

پاسخ تشریحی

ماتریس‌های $A^2, A^3, \dots$ را تا جایی پیدا می‌کنیم که نظم مشخصی حاصل شود و یا مضربی از ماتریس همانی (واحد) به دست آید.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

بنابراین داریم:

$$A^{10} + A^{20} + A^{30} = (A^3)^3 \times A + (A^3)^6 \times A^2 + (A^3)^{10}$$

$$I^3 \times A + I^6 \times A^2 + I^{10} = A + A^2 + I = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۴✓

۳

۲

۱

علت انتخاب:

شناخت مفهوم وارون یک ماتریس و استفاده از اتحادهای جبری برای یافتن ماتریس وارون

پاسخ تشریحی

$$A^2 = 10I = 8I + 2I \Rightarrow A^2 - 8I = 2I \Rightarrow (A - 2I)(A^2 + 2AI + 4I^2) = 2I$$

$$\Rightarrow (A - 2I)(A^2 + 2AI + 4I) = 2I \Rightarrow (A - 2I) \times \frac{1}{2}(A^2 + 2AI + 4I) = I$$

$$\Rightarrow (A - 2I)^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 + 2AI + 4I)$$

تذکر: دو ماتریس A و I همواره تعویض پذیر هستند، پس اتحادهای جبری برای آنها برقرار است.

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۹ تا ۲۳)

۴

۳

۲✓

۱

(مشابه سؤال ۱۳۸ کتاب آبی هنر سه ۳)

علت انتخاب:

شناخت رابطه دترمینان حاصل ضرب چند ماتریس و محاسبه دترمینان ماتریس مجهول بدون یافتن خود ماتریس

پاسخ تشریحی

$$|ABC| = |A| |B| |C|$$

می‌دانیم اگر A، B و C سه ماتریس مربعی هم مرتبه باشند، آنگاه داریم:

از طرفی اگر k عددی حقیقی و A یک ماتریس مربعی مرتبه n باشد، آنگاه $|kA| = k^n |A|$ است.

دترمینان ماتریس‌های A و B را بر حسب ستون دوم آنها محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$|A| = (-1) \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$|B| = 1 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -1$$

$$ABC = 2I \Rightarrow |ABC| = |2I| \Rightarrow |A| \times |B| \times |C| = 2^3 \times |I| \Rightarrow 2 \times (-1) \times |C| = 8 \times 1 \Rightarrow |C| = -4$$

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۴✓

۳

۲

۱

شناخت روش محاسبه دترمینان ماتریس های 3×3 و تکرار زیاد این مدل سؤال در کنکور سراسری و آزمون های مدارس.

پاسخ تشریحی

اگر دترمینان ماتریس را با استفاده از دستور ساروس محاسبه کنیم، داریم:

$$3(x-2)(x+2) - 2(x+3)(x-3) = 10 \Rightarrow 3(x^2 - 4) - 2(x^2 - 9) = 10$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 12 - 2x^2 + 18 = 10 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه های ۲۷ تا ۳۱)

۱ ۲ ۳ ۴

شناخت دقیق روش حل دستگاه دو معادله و دو مجهول به کمک ماتریس وارون

پاسخ تشریحی

ماتریس ضرایب این دستگاه به صورت $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ است، بنابراین داریم:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \xrightarrow{|A|=-1} A^{-1} = \begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2a & 3 \\ b & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ -a = -2 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

اگر B ماتریس مقادیر معلوم و X ماتریس مجهولات این دستگاه باشد، آنگاه داریم:

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x + y = 1$$

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه های ۲۲ تا ۲۵)

۱ ۲ ۳ ۴

علت انتخاب:

به کارگیری تعریف دایره و ترکیب آن با حل یک معادله درجه ۲ و تکرار زیاد این مدل سؤال در امتحانات نهایی و کنکور سراسری.

پاسخ تشریحی

با توجه به اینکه یکی از قطرهای دایره بر روی خط $y = x + 3$ قرار دارد، پس می‌توان مرکز دایره را به صورت $O(\alpha, \alpha + 3)$ نوشت. در این صورت داریم:

$$OA = OB \Rightarrow \sqrt{(-2 - \alpha)^2 + (1 - \alpha - 3)^2} = \sqrt{(-2 - \alpha)^2 + (-2 - \alpha - 3)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (1 - \alpha)^2 + (-2 - \alpha)^2 = (-2 - \alpha)^2 + (-5 - \alpha)^2$$

$$\Rightarrow (1 - \alpha)^2 = (-5 - \alpha)^2 \Rightarrow 1 - 2\alpha + \alpha^2 = 25 + 10\alpha + \alpha^2$$

$$\Rightarrow 12\alpha = -24 \Rightarrow \alpha = -2$$

$$\text{شعاع دایره : } R = OA = \sqrt{(1 - \alpha)^2 + (-2 - \alpha)^2} = \sqrt{(1 + 2)^2 + (-2 + 2)^2} = 3$$

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۴ ✓

۳

۲

۱

علت انتخاب:

درک مفهوم مکان هندسی مرتبط با دایره و تشخیص مرکز و شعاع دایره از روی معادله ضمنی دایره

پاسخ تشریحی

فرض کنید نقطه $M(x, y)$ روی این مکان هندسی واقع باشد. در این صورت داریم:

$$MA = \frac{\sqrt{2}}{2} MB \Rightarrow \sqrt{(-2 - x)^2 + (4 - y)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(1 - x)^2 + (3 - y)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (-2 - x)^2 + (4 - y)^2 = \frac{1}{2} [(1 - x)^2 + (3 - y)^2]$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2(4 + 4x + x^2) + 2(16 - 8y + y^2) = (1 - 2x + x^2) + (9 - 6y + y^2)$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 10x - 10y + 30 = 0$$

معادله حاصل متعلق به یک دایره است که مرکز و شعاع آن از روابط زیر محاسبه می‌شوند.

$$\text{مرکز : } O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (-5, 5)$$

$$\text{شعاع : } R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{10^2 + (-10)^2 - 4(30)} = 2\sqrt{5}$$

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

علت انتخاب:

شناخت مکان هندسی نقاط متساوی الفاصله از دو خط و محاسبه شعاع دایره مماس بر یک خط

پاسخ تشریحی

دایره موردنظر بر دو خط $y = 3x$ و $x = 3y$ مماس است، پس مرکز این دایره بر روی نیمساز زاویه بین این دو خط قرار دارد که در ناحیه اول بر نیمساز ربع اول دستگاه مختصات منطبق است. پس مختصات مرکز این دایره را می توان به صورت $O(\alpha, \alpha)$ نوشت. حال کافی است فاصله مرکز دایره را از یکی از دو خط مماس بر دایره یافته و برابر شعاع دایره قرار دهیم. با انتخاب خط $3x - y = 0$ داریم:

$$R = \frac{|3\alpha - \alpha|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} \xrightarrow{\alpha > 0} 2\sqrt{10} = \frac{2\alpha}{\sqrt{10}} \Rightarrow 2\alpha = 20$$

بنابراین مجموع مختصات مرکز دایره برابر ۲۰ است.

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه های ۴۰ تا ۴۳)

۴

۳✓

۲

۱

علت انتخاب:

شناخت حالت های مختلف وضعیت دو دایره نسبت به یکدیگر و تکرار زیاد این مدل سؤال در امتحانات نهایی و کنکور سراسری

پاسخ تشریحی

ابتدا مختصات مرکز و شعاع دو دایره را به دست می آوریم.

$$C_1 = x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$$

$$\text{مرکز: } O_1(-2, 0)$$

$$\text{شعاع: } R_1 = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 - 4(-5)} = 3$$

$$C_2 = x^2 + y^2 - 4x - 6y + a = 0$$

$$\text{مرکز: } O_2(2, 3)$$

$$\text{شعاع: } R_2 = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + (-6)^2 - 4a} = \sqrt{13 - a}$$

$$O_1O_2 = \sqrt{(2+2)^2 + (3-0)^2} = 5$$

دو دایره C_1 و C_2 مماس خارج اند، بنابراین داریم:

$$O_1O_2 = R_1 + R_2 \Rightarrow 5 = 3 + \sqrt{13 - a} \Rightarrow \sqrt{13 - a} = 2 \Rightarrow 13 - a = 4 \Rightarrow a = 9$$

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه های ۴۰ تا ۴۶)

۴

دائود از سایت ریاضی سرا

۱

۶۱- گزینه «۲»

علت انتخاب:

درک مفهوم اثبات به روش بازگشتی (استفاده از گزاره‌های هم‌ارز) و طرح سؤالات مشابه در امتحانات مدارس

پاسخ تشریحی

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 \geq -4(a+b+2) &\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq -4a - 4b - 8 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 4a + 4b + 8 \geq 0 &\Leftrightarrow (a^2 + 4a + 4) + (b^2 + 4b + 4) \geq 0 \\ \Leftrightarrow (a+2)^2 + (b+2)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

رابطهٔ اخیر همیشه درست است و روابط همگی برگشت پذیر هستند، پس اثبات به روش بازگشتی کامل می‌شود.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۶ تا ۸)

۱ ☐ ۲ ☒ ۳ ☐ ۴ ☐

۶۲- گزینه «۲»

علت انتخاب:

کاربرد ویژگی‌های مختلف رابطهٔ عاد کردن و مشابهت با مثال صفحهٔ ۱۲ و تمرین ۳ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی

پاسخ تشریحی

طبق ویژگی‌های رابطهٔ عاد کردن، اگر $a | b$ ، آنگاه a هر مضربی از b را نیز عاد می‌کند و نیز اگر $a | c$ و $a | b$ ، آنگاه $a | b \pm c$ بنابراین داریم:

$$\left. \begin{aligned} a | 6m + 5 &\xrightarrow{\times 5} a | 30m + 25 \\ a | 5m + 4 &\xrightarrow{\times 6} a | 30m + 24 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} a | 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۱ ☐ ۲ ☒ ۳ ☐ ۴ ☐

۶۳- گزینه «۳»

علت انتخاب:

کاربرد قضیهٔ تقسیم و پرتکرار بودن این مدل سؤال در امتحانات نهایی و کنکور سراسری

پاسخ تشریحی

طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$\left. \begin{aligned} a = 6q + 1 &\xrightarrow{\times 4} 4a = 24q + 4 \\ a = 8q' + 5 &\xrightarrow{\times 3} 3a = 24q' + 15 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} a = 24(q - q') - 11 \\ \Rightarrow a = 24(q - q') - 24 + 24 - 11 = 24(q - q' - 1) + 13 \Rightarrow a = 24q' + 13$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۲۴، برابر ۱۳ است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۳ و ۱۵)

۱ ☐ ۲ ☐ ۳ ☒ ۴ ☐

علت انتخاب:

کاربرد ویژگی‌های مختلف رابطه هم‌نهشتی و پرتکرار بودن این مدل سؤال در امتحانات نهایی و کنکور سراسری

پاسخ تشریحی

$$2^5 = 32 = 3 \times 11 - 1 \Rightarrow 2^5 \equiv -1 \\ \xrightarrow{\text{به توان ۶}} 2^{30} \equiv (-1)^6 \equiv 1 \xrightarrow{\times 2^2} 2^{32} \equiv 4 \xrightarrow{+7} 2^{32} + 7 \equiv 11 \equiv 0$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۴

۳

۲

۱✓

(مشابه سؤال ۱۴۸ کتاب ۵۰۰ سؤال تشریحی ریاضیات گسسته)

علت انتخاب:

کاربرد هم‌نهشتی در تقویم‌نگاری و ارائه تمرینات متعدد در کتاب درسی در این زمینه

پاسخ تشریحی

ابتدا تعداد روزهای بین ۱۵ خرداد تا ۱۶ آذر را در یک سال محاسبه می‌کنیم. برای این کار، روز مبدأ (۱۵ خرداد) را در نظر نمی‌گیریم.

$$16 + 3 \times 31 + 2 \times 30 + 16 = 185 \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ \text{آذر} \quad \text{مهر و آبان} \quad \text{تیر و شهریور} \quad \text{خرداد} \\ \downarrow \\ 185 = 26 \times 7 + 3 \equiv 3$$

بنابراین روز ۱۶ آذر سه روز بعد از پنجشنبه در روزهای هفته است.

مطابق جدول اگر پنجشنبه (روز مبدأ) را به عنوان صفر در نظر بگیریم، داریم:

چهارشنبه	سه‌شنبه	دوشنبه	یکشنبه	شنبه	جمعه	پنجشنبه
۶	۵	۴	۳	۲	۱	صفر

یعنی ۱۶ آذر آن سال، روز یکشنبه است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه ۲۴)

۴

۳

۲

۱✓

اهمیت حل معادلات هم‌نهشتی هم به صورت مستقل و هم به عنوان روشی برای حل معادلات سیاله و مشابهت با تمرین ۱۷ صفحه ۳۰ کتاب درسی

پاسخ تشریحی

فرض کنید عددی طبیعی که دارای ویژگی صورت سؤال باشد را با x نمایش دهیم. در این صورت داریم:

$$7x + 5 \equiv 0 \Rightarrow 7x \equiv -5 \equiv -14$$

$$\xrightarrow[\substack{\div 7 \\ (7,9)=1}]{9} x \equiv -2 \Rightarrow x = 9k - 2 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$10 \leq x \leq 99 \Rightarrow 10 \leq 9k - 2 \leq 99 \Rightarrow 12 \leq 9k \leq 101$$

$$\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} 2 \leq k \leq 11$$

بنابراین به ازای ۱۰ مقدار k ، x عددی طبیعی و دو رقمی است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۴

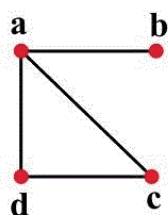
۳✓

۲

۱

وجود تمرینات متعدد در مورد همسایگی باز و بسته یک رأس در کتاب درسی

پاسخ تشریحی



با توجه به مفهوم همسایگی بسته دو رأس، رأس‌های a و b در این گراف مجاور یکدیگرند. همچنین رأس‌های a و c مجاور یکدیگر بوده و هر دو با رأس d نیز مجاورند. از طرفی رأس b نمی‌تواند با رأس c و d مجاور باشد، چون در صورت مجاور بودن b با c یا d ، هر یک از این دو رأس به اشتراک همسایگی‌های بسته رأس‌های a و b تعلق خواهند داشت که خلاف فرض سؤال است.

$$N_G[b] \cap N_G[d] = \{a\}$$

بنابراین گراف G به صورت مقابل است و داریم:

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه ۳۵)

۴✓

۳

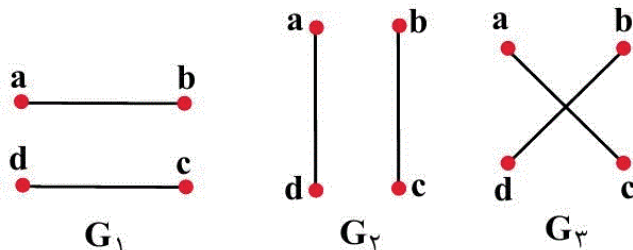
۲

۱

ترکیب دو موضوع زیرگراف و گراف k -منتظم

پاسخ تشریحی

می‌دانیم گراف فرد-منتظم از مرتبه فرد وجود ندارد، پس زیرگراف‌های موردنظر یا از مرتبه ۴ هستند و یا از مرتبه ۲. دسته اول: زیرگراف‌های ۱-منتظم از مرتبه ۴ شامل دو یال غیرمجاور گراف (دو یالی که رأس مشترک ندارند) که عبارت‌اند از:



دسته دوم: زیرگراف‌های ۱-منتظم از مرتبه ۲، در واقع هر کدام یکی از یال‌های گراف G هستند و چون گراف G دارای ۶ یال است، پس ۶ زیرگراف ۱-منتظم از مرتبه ۲ دارد. بنابراین در مجموع گراف G دارای ۹ زیرگراف ۱-منتظم است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

شناخت رابطه میان مرتبه و اندازه یک گراف و مکمل آن.

پاسخ تشریحی

مرتبه دو گراف G و $\bar{G}$ برابر یکدیگر است، پس $p(\bar{G}) = ۸$ است. از طرفی داریم:

$$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow ۱۶ + q(\bar{G}) = \frac{۸ \times ۷}{2} \Rightarrow q(\bar{G}) = ۱۲$$

$$q(\bar{G}) - p(\bar{G}) = ۱۲ - ۸ = ۴$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۳۷ و ۳۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴

علت انتخاب:

درک مفهوم مسیر در گراف و شمارش تعداد مسیرها و تکرار این مدل سؤال در امتحانات نهایی و آزمون‌های مدارس.

پاسخ تشریحی

مسیرهای موجود از رأس a به رأس c عبارت‌اند از:

$abc, adc, addec, afec, afedc$

تذکر: اگر u و v دو رأس از گراف G باشند، یک مسیر از u به v دنباله‌ای از رئوس دو به دو متمایز در گراف G است که از u شروع و به v ختم می‌شود به طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاور هم باشند.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه ۳۸)

۴

۳✓

۲

۱

علت انتخاب:

کاربرد ویژگی‌های رابطه عاد کردن در چند مرحله به طور متوالی

پاسخ تشریحی

طبق ویژگی‌های رابطه عاد کردن (بخش پذیری) داریم:

$$\left. \begin{array}{l} a+4 \mid a+4 \xrightarrow{\times a} a+4 \mid a^2+4a \\ a+4 \mid a^2+2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} a+4 \mid 4a-2$$

$$\left. \begin{array}{l} a+4 \mid a+4 \xrightarrow{\times 4} a+4 \mid 4a+16 \\ a+4 \mid 4a-2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} a+4 \mid 18$$

بنابراین $a+4$ باید یکی از مقسوم‌علیه‌های ۱۸ باشد. با توجه به اینکه a عددی طبیعی است، پس $a+4 \geq 5$ و در نتیجه داریم:

$$a+4=6 \Rightarrow a=2$$

$$a+4=9 \Rightarrow a=5$$

$$a+4=18 \Rightarrow a=14$$

یعنی به ازای ۳ عدد طبیعی a ، a^2+2 بر عدد $a+4$ بخش پذیر است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۴

۳

۲

۱✓

ترکیب مبحث بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک با معادلات هم نهشتی و تکرار این مدل سؤال در کنکور سراسری

فرض کنید $d = (۱۲n + ۷, ۵n - ۲)$ باشد. در این صورت داریم:

$$\left. \begin{array}{l} d \mid ۱۲n + ۷ \xrightarrow{\times ۵} d \mid ۶۰n + ۳۵ \\ d \mid ۵n - ۲ \xrightarrow{\times ۱۲} d \mid ۶۰n - ۲۴ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid ۵۹ \Rightarrow \begin{cases} d = ۱ \\ d = ۵۹ \end{cases}$$

بنابراین کافی است کوچکترین مقدار n را محاسبه کنیم که به ازای آن، $d = ۵۹$ شود.

$$۵n - ۲ \equiv ۰ \Rightarrow ۵n \equiv ۲ \equiv ۲ + ۲ \times ۵۹ \equiv ۱۲۰ \xrightarrow[\div ۵]{(۵, ۵۹)=۱} n \equiv ۲۴ \Rightarrow n = ۵۹k + ۲۴ (k \in \mathbb{Z})$$

بنابراین به ازای $n = ۲۴$ ، $d = ۵۹$ است، یعنی به ازای هر عدد طبیعی $n \leq ۲۳$ ، دو عدد $۱۲n + ۷$ و $۵n - ۲$ نسبت به هم اول هستند.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه های ۱۳ و ۲۵)

۴

۳

۲✓

۱

کاربرد ویژگی های هم نهشتی و تکرار زیاد این مدل سؤال در امتحانات نهایی و کنکور سراسری

$$۲^۶ = ۶۴ = ۵ \times ۱۳ - ۱ \Rightarrow ۲^۶ \equiv -۱$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۸}} ۲^{۴۸} \equiv (-۱)^۸ \equiv ۱ \xrightarrow{\times ۲^۲} ۲^{۵۰} \equiv ۴ \quad (۱)$$

$$۳^۳ = ۲۷ = ۲ \times ۱۳ + ۱ \Rightarrow ۳^۳ \equiv ۱ \xrightarrow{\text{به توان ۱۳}} ۳^{۳۹} \equiv ۱$$

$$\xrightarrow{\times ۳} ۳^{۴۰} \equiv ۳ \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow ۲^{۵۰} \times ۳^{۴۰} \equiv ۴ \times ۳ \equiv ۱۲$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه های ۱۸ تا ۲۱)

۴✓

۳

۲

۱

علت انتخاب:

شناخت دسته هم‌نهشتی و کاربرد معادله و ویژگی‌های هم‌نهشتی در حل مسئله

پاسخ تشریحی

دو عدد $2a+9$ و $7a-4$ در یک دسته هم‌نهشتی به پیمانه ۱۱ قرار دارد، پس این دو عدد به پیمانه ۱۱ هم‌نهشت هستند.

$$7a-4 \equiv 2a+9 \pmod{11} \Rightarrow 5a \equiv 13 \pmod{11} \Rightarrow 5a \equiv 2 \pmod{11} \Rightarrow a \equiv 7 \pmod{11} \quad (\text{به توان } 2) \Rightarrow a^2 \equiv 49 \equiv 5 \pmod{11}$$

$$a \equiv 7 \pmod{11} \xrightarrow{\text{به توان } 2} a^2 \equiv 49 \equiv 5 \pmod{11}$$

$$a \equiv 7 \pmod{11} \xrightarrow{\times 3} 3a \equiv 21 \equiv 10 \pmod{11}$$

$$a^3 + a^2 + 3a + b \equiv 7 \pmod{11} \Rightarrow 2 + 5 + 10 + b \equiv 7 \pmod{11} \Rightarrow b \equiv -10 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow b = 11k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

پس به ازای $b=1$ ، عدد $a^3 + a^2 + 3a + b$ به $1 \pmod{11}$ تعلق دارد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۵)

۴

۳

۲

۱ ✓

علت انتخاب:

شناخت قوانین بخش پذیری بر اعداد خاص مانند ۹ و ۱۱ و استفاده از هم‌نهشتی برای پیدا کردن ارقام مجهول

عددی بر ۹۹ بخش پذیر است که بر ۹ و ۱۱ بخش پذیر باشد. داریم:

$$\overline{51xy32} \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow 5+1+x+y+3+2 \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow x+y \equiv -11 \equiv -11+2 \times 9 \equiv 7 \pmod{9} \Rightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ x+y=16 \end{cases}$$

$$\overline{51xy32} \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow 2-3+y-x+1-5 \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow y-x \equiv 5 \pmod{11} \Rightarrow \begin{cases} y-x=5 \\ y-x=-6 \end{cases}$$

حالت $x+y=16$ نمی‌تواند در این سؤال برقرار باشد، چون در این صورت x و y هر دو برابر ۸ و یا یکی برابر ۷ و دیگری برابر ۹ است که با توجه به مقادیر $y-x$ امکان پذیر نیست.

دو حالت باقی مانده را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} x+y=7 \\ -x+y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=7 \\ -x+y=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{13}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$$

با توجه به اینکه x, y رقم هستند، پس مقادیر کسری برای آن‌ها قابل قبول نیست و تنها یک عدد (عدد ۵۱۱۶۳۲) با شرایط موردنظر وجود دارد.

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

علت انتخاب:

تأکید زیاد کتاب درسی روی مسائل کاربردی معادلات سیاله و پرتکرار بودن این مدل سؤال در امتحانات نهایی و کنکور سراسری

پاسخ تشریحی

فرض کنید x کیسه ۴ کیلویی و y کیسه ۵ کیلویی برای بسته‌بندی استفاده شود. در این صورت داریم:

$$4x + 5y = 123 \Rightarrow 5y \equiv 123 \Rightarrow y \equiv 3 \Rightarrow y = 4k + 3 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$4x + 5(4k + 3) = 123 \Rightarrow 4x = -20k + 108 \Rightarrow x = -5k + 27$$

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \Rightarrow -5k + 27 \geq 0 \Rightarrow k \leq \frac{27}{5} \\ y \geq 0 \Rightarrow 4k + 3 \geq 0 \Rightarrow k \geq -\frac{3}{4} \end{array} \right\} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

بنابراین به ۶ طریق (به تعداد مقادیر k) می‌توان ۱۲۳ کیلو شکر را در کیسه‌های ۴ و ۵ کیلویی بسته‌بندی کرد.

۴

۳✓

۲

۱

علت انتخاب:

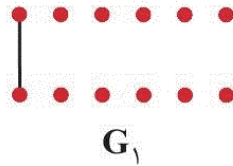
درک مفهوم یکریختی در گراف‌ها و توانایی رسم گراف‌های متفاوت از یک مرتبه و اندازه

پاسخ تشریحی

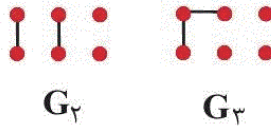
$$۱۲ = ۱۲ \times ۱ = ۶ \times ۲ = ۴ \times ۳$$

حالت اول: $q = ۱, p = ۱۲$

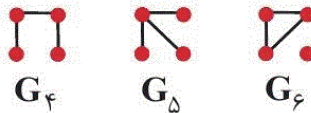
در این حالت تنها یک گراف قابل رسم است.

حالت دوم: $q = ۲, p = ۶$

در این حالت دو گراف قابل رسم است.

حالت سوم: $q = ۳, p = ۴$

در این حالت سه گراف قابل رسم است.



بنابراین در مجموع ۶ گراف متمایز با شرایط موردنظر قابل رسم است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۵)

۴ ✓

۳

۲

۱

علت انتخاب:

ترکیب مباحث گراف‌های کامل و منتظم با مکمل گراف

پاسخ تشریحی

با توجه به اینکه مکمل گراف K_p ، گراف تهی است، پس گراف $\bar{G}$ دارای ۲۴ یال است و در نتیجه برای این گراف داریم: r درجه هر رأس این گراف است. $۲q = pr \Rightarrow ۴۸ = p \times ۴ \Rightarrow p = ۱۲$ از طرفی اگر a رأس دلخواهی از گراف G باشد، آن‌گاه: $d_G(a) + ۴ = ۱۲ - ۱ \Rightarrow d_G(a) = ۷$ یعنی درجه هر رأس گراف G برابر ۷ است (گراف G ، ۷- منتظم است) و در نتیجه ماکزیمم درجه در این گراف نیز برابر ۷ است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۴

۳

۲ ✓

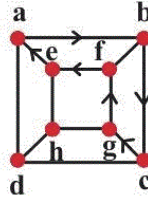
۱

علت انتخاب:

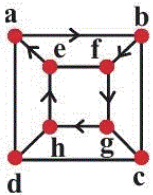
شناخت مفهوم دور در گراف و تکرار زیاد سؤالات مربوط به شمارش تعداد دورها در کنکور سراسری

پاسخ تشریحی

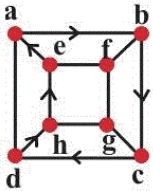
دسته اول: دورهایی به فرم $abcgfea$ یعنی دورهایی که از سه رأس بیرونی و سه رأس درونی گراف تشکیل شده است که تعداد آنها برابر ۴ است.



دسته دوم: دورهایی به فرم $abfghea$ یعنی دورهایی که از دو رأس بیرونی و چهار رأس درونی گراف تشکیل شده است که تعداد آنها برابر ۴ است.



دسته سوم: دورهایی به فرم $abcdhea$ یعنی دورهایی که از چهار رأس بیرونی و دو رأس درونی گراف تشکیل شده است که تعداد آنها برابر ۴ است.



بنابراین در مجموع ۱۲ دور به طول ۶ در این گراف وجود دارد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریه اعداد: صفحه ۳۸)

۴ ✓

۳

۲

۱

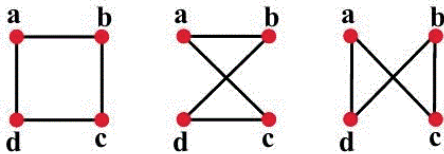
(مشابه سؤال ۶۰۳ کتاب آبی ریاضیات گسسته)

علت انتخاب:

شناخت مفهوم زیرگراف و تفکیک زیرگرافها براساس مرتبه آنها

پاسخ تشریحی

با انتخاب هر رأس دلخواه از این گراف، سه زیرگراف ۲- منتظم متمایز وجود دارد. به عنوان مثال با انتخاب رئوس a, b, c, d داریم:



$$\binom{5}{4} \times 3 = 5 \times 3 = 15$$

بنابراین تعداد کل زیرگرافهای ۲- منتظم از مرتبه ۴ برابر است با:

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

۴

۳ ✓

۲

۱