رياضي ۱ - سطح ۱ ، مجموعه، الگو و دنباله

۴۱- در یک کلاس ۴۵ نفری، ۳۲ نفر به خط و ۱۸ نفر به نقاشی علاقه‌مند هستند. قدرمطلق تفاضل حداقل و حداکثر افرادی که هم به خط و هم به نقاشی علاقه‌مند هستند، کدام است؟

۱) ۱۳
۲) ۹
۳) ۲۷
۴) ۴۰

۴۲- در یک دنبالهٔ هندسی جملهٔ چهارم و هفتم به‌ترتیب ۴۰ و ۳۲۰ می‌باشند، جملهٔ دهم چقدر از جملهٔ ششم بیشتر است؟

۱) ۱۲۰۰
۲) ۲۴۰۰
۳) ۱۰۲۴
۴) ۲۵۰۰

رياضي ۱ - سطح ۱ ، توان هاي گويا و عبارت هاي جبري -

۴۳- کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) $۹۸^{۳} = ۹۴۱۱۹۲$

۲) $۶۴۷^{۲} - ۶۴۰^{۲} = ۹۰۰۸$

۳) $(۲۰+۲۱)(۲۰^{۲}+۲۱^{۲})(۲۰^{۴}+۲۱^{۴}) - ۲۱^{۸} = -۲۰^{۸}$

۴) $۱۹ \times ۲۱ \times ۴۰۱ = ۱۵۹۹۹۹$

رياضي ۱ - سطح ۱ ، مثلثات -

۴۴- اگر $\tan\alpha = ۲$ باشد، حاصل عبارت $\sin^۴\alpha - \cos^۴\alpha + \frac{۱}{۱+\tan^۲\alpha}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۴}$

۲) $\frac{۱}{۵}$

۳) ۵

۴) $\frac{۴}{۵}$

رياضي ۱ - سطح ۱ ، توان هاي گويا و عبارت هاي جبري

۴۵- در تجزیهٔ عبارت $x^۴ - xy^۳ + x^۳y - y^۴$ کدام عامل وجود دارد؟

۱) $x - ۱$

۲) $x - y$

۳) $y - ۱$

۴) $x^۲ - xy + y^۲$

رياضي ۱ - سطح ۱ ، معادله هاو نامعادله ها

۴۶- حاصل ضرب دو عدد صحیح فرد متوالی، ۲۳ واحد از مجموعشان بیشتر است. عدد کوچک‌تر کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۳

۲) -۷

۳) ۷

۴) -۵

رياضي ۱ - سطح ۱ ، توان هاي گويا و عبارت هاي جبري

۴۷- اگر $-۱ < a < ۰$ باشد، آنگاه حاصل $A = |a^۳ - a^۲| - |a^۲ - \sqrt[۳]{a}| + |\sqrt[۳]{a} - a|$ همواره کدام است؟

۱) $a^۳ + ۲a^۲ + a$

۲) $۲\sqrt[۳]{a} - a - a^۳$

۳) $a - a^۳$

۴) $۲\sqrt[۳]{a} - a^۳$

۴۸- حاصل کدام یک از عبارت‌های زیر نادرست است؟

۱) $\sqrt{(۲\sqrt{۵}-۵\sqrt{۲})^{۲}}-\sqrt[۳]{(۵\sqrt{۲}-۲\sqrt{۵})^{۳}}=۰$

۲) $۵\sqrt[۷]{۳^{۱۵}}+۲\sqrt[۷]{۳}-۵\sqrt[۷]{۳^{۸}}=۳۲\sqrt[۷]{۳}$

۳) $\sqrt[۱۱]{۲\sqrt{۲}-۳}\times\sqrt[۱۱]{۳+۲\sqrt{۲}}=۱$

۴) $\sqrt[۵]{(۱-\sqrt{۳})^{۵}}+\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}}=۰$

رياضي ۱ - سطح ۱ ، معادله هاو نامعادله ها

۴۹- اختلاف سنی دو خواهر با یک‌دیگر، ۶ سال است و سه سال دیگر حاصل ضرب سن آن‌ها ۳۹۱ می‌شود. ۵ سال بعد، سن خواهر بزرگتر چقدر می‌شود؟

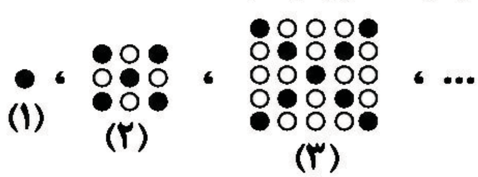
۱) ۲۰
۲) ۲۵
۳) ۱۴
۴) ۱۹

۵۰- به ازای کدام محدوده از m، معادلهٔ $mx^{۲}-(۲+m)x+۱=۰$ دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد؟

۱) $\varnothing$
۲) $\mathbb{R}-[-۲,۲]$
۳) $[-۲,۲]$
۴) $\mathbb{R}-\{۰\}$

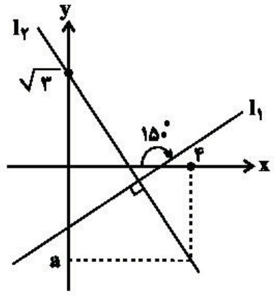
- ۲۰ سوال

۱۲۱- در کدام مرحله از الگوی زیر، تفاضل تعداد گوی‌های سیاه از تعداد گوی‌های سفید ۲۲۳ تا است؟



۱) ۷
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۱

۱۲۲- در شکل زیر، اگر معادلهٔ خط $l_۱$ به صورت $۳x + ay = ۴$ باشد، معادلهٔ خط $l_۲$ کدام است؟



۱) $y = -\frac{۲}{۳}x + \sqrt{۳}$

۲) $y + \sqrt{۳}x = \sqrt{۳}$

۳) $y = -\frac{۱}{۳}x + \sqrt{۳}$

۴) $۳y + \sqrt{۳}x = ۳\sqrt{۳}$

۱۲۳- اگر $\sin x = \frac{۱}{۲}$ و انتهای کمان زاویهٔ x در ناحیهٔ دوم دایرهٔ مثلثاتی باشد، حاصل $A = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} + \frac{۲\cos^۲ x - ۱}{\cos^۲ x(۱ - \tan^۲ x)}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $۲ - ۲\sqrt{۳}$ ۳) $-\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۳} - ۱$

۱۲۴- حاصل عبارت $A = \sqrt{۱ + ۲\sqrt{۳}} \times \sqrt[۴]{۱۳ - ۴\sqrt{۳}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۱}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۱۳}$

۱۲۵- اگر $A = \sqrt[۴]{۸۰}$ ، $B = \sqrt[۳]{۳۱}$ ، $C = \sqrt[۶]{۹۷۲}$ و $D = \sqrt[۵]{۳۵}$ باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $D < A < C < B$ ۲) $D < A < B < C$ ۳) $D < C < B < A$ ۴) $D < C < A < B$

۱۲۶- اگر $a = \sqrt{۶ - \sqrt{۲۰}}$ و $b = \sqrt{۶ + \sqrt{۲۰}}$ باشد، حاصل $\frac{۱}{۲a - b}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\sqrt{۵} + ۳}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $\sqrt{۶\sqrt{۵}}$ ۴) $-\left(\frac{۳ + \sqrt{۵}}{۴}\right)$

۱۲۷- اگر $x^۲ + y^۲ = ۲$ ، آنگاه حاصل $\frac{x^۲y^۲}{x^۶ + y^۶ - ۸}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۶}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) ۶

۱۲۸- معادلهٔ درجه دوم $\frac{m}{۴}x^۲ - (۴ - m)x + ۸ = ۰$ دارای یک ریشهٔ مضاعف است. مجموع مقادیر ممکن برای m کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۳}$ ۲) $۱۶\sqrt{۳}$ ۳) ۱۶ ۴) ۸

۱۲۹- اگر ریشه‌های معادلهٔ $-x^۲ + bx + c = ۰$ برابر با $x = -۱$ و $x = ۳$ باشد. آنگاه در مورد ریشه‌های معادلهٔ $(۲b + c)x^۲ - ۵cx + b = ۰$ چه می‌توان گفت؟

۱) یک ریشهٔ مضاعف دارد.

۲) یک ریشهٔ حقیقی مثبت و یک ریشهٔ حقیقی منفی دارد.

۳) دو ریشهٔ حقیقی مثبت دارد.

۴) ریشهٔ حقیقی ندارد.

۱۳۰- معادلهٔ $x^{2}-(4b+4)x+5b+\frac{13}{2}=0$ ، یک ریشهٔ مضاعف مثبت دارد. مقدار b کدام است؟

۱) $-\frac{5}{2}$ یا ۱ ۲) فقط $\frac{1}{2}$ ۳) فقط ۵- ۴) $-\frac{5}{4}$ یا $\frac{1}{2}$

هندسه ۱ - سطح ۱ ، ترسیم هندسي و استدلال

۵۱- نقاط A و B به فاصلهٔ ۷ سانتی‌متر از هم قرار دارند. به ازای کدام مقادیر x_1 و x_2، دو نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ x_1 و از نقطهٔ B به فاصلهٔ x_2 باشند؟

۱) $x_1=1$ و $x_2=3$ ۲) $x_1=2$ و $x_2=5$ ۳) $x_1=3$ و $x_2=6$ ۴) $x_1=2$ و $x_2=9$

۵۲- حداقل چند نقطهٔ واقع بر یک دایره را باید داشته باشیم تا بتوانیم آن دایره را به‌طور کامل رسم کنیم؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۵۳- کدام یک از قضیه‌های زیر را می‌توان به صورت یک قضیهٔ دو شرطی نوشت؟

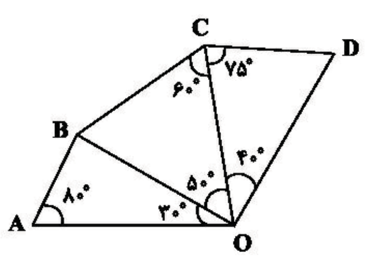
۱) اگر دو مثلث هم‌نهشت باشند، آن‌گاه زوایای آن‌ها نظیر به نظیر برابر یکدیگرند.

۲) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، آن‌گاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۳) اگر دو مثلث هم‌نهشت باشند، آن‌گاه محیط‌های برابر دارند.

۴) اگر دو ضلع مثلثی برابر یکدیگر باشند، ارتفاع‌های وارد بر آن‌ها نیز برابر یکدیگرند.

C



۵۴- در شکل مقابل کدام نامساوی درست است؟

۱) $OD>OC>OB>OA$

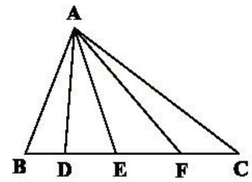
۲) $OA>OB>OC>OD$

۳) $OD>OB>OC>OA$

۴) $OA>OC>OB>OD$

هندسه ۱ - سطح ۱ ، قضیه ي تالس، تشابه و کاربردهاي آن

۵۵- در شکل زیر نقاط E و F به‌ترتیب وسط پاره‌خط های BC و EC قرار دارند. اگر مساحت مثلث ADE دو برابر مساحت مثلث ABD باشد، نسبت $\frac{FC}{BD}$ کدام است؟



۱) ۱

۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) ۲

۵۶- اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{۱}{۳}$ باشد، آن‌گاه حاصل عبارت $\frac{۲a+۲c-۶}{b+d-۹}$ کدام است؟ $(b+d\neq ۹)$

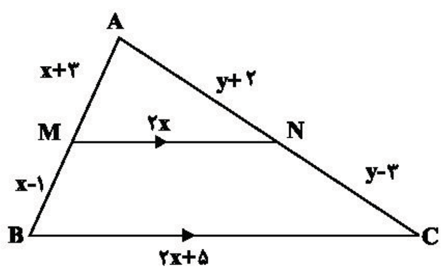
۱) $\frac{۱}{۶}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۲}{۹}$

۴) $\frac{۲}{۳}$

۵۷- در شکل مقابل $MN \parallel BC$ است. حاصل $y-x$ کدام است؟



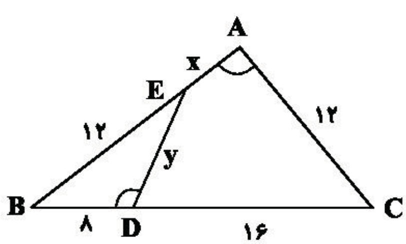
۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

۵۸- در شکل زیر $\hat{A}=B\hat{D}E$ است. نسبت $\frac{y}{x}$ کدام است؟



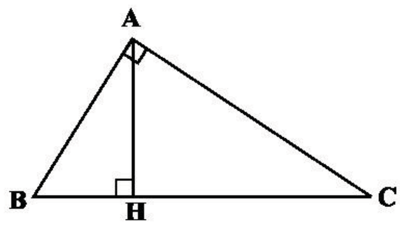
۱) ۱

۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $\frac{۴}{۳}$

۴) ۲

۵۹- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، اگر $AH = ۱۲$ و $\frac{CH}{BH} = ۹$ باشد، اندازهٔ وتر مثلث کدام است؟



۱) ۲۴

۲) ۳۰

۳) ۳۶

۴) ۴۰

۶۰- نسبت محیط‌های دو پنج‌ضلعی منتظم برابر $\frac{۲}{۵}$ است. اگر مساحت یکی از این دو پنج‌ضلعی منتظم برابر ۱۰۰ باشد، مساحت پنج‌ضلعی منتظم دیگر کدام است؟

۱) ۱۶ یا ۶۲۵ ۲) ۴۰ یا ۲۵۰

۳) ۱۶ یا ۴۰ ۴) ۲۵۰ یا ۶۲۵

- ۲۰ سوال

۱۳۱- در چهارضلعی محدب ABCD، AB بزرگ‌ترین ضلع و CD کوچک‌ترین ضلع است. کدام یک از رابطه‌های زیر قطعاً نادرست است؟

۱) $\hat{A}+\hat{B}=۱۵۰°$ ۲) $\hat{B}+\hat{C}=۱۵۰°$ ۳) $\hat{C}+\hat{D}=۱۵۰°$ ۴) $\hat{D}+\hat{A}=۱۵۰°$

۱۳۲- دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۵ واحد از یکدیگر قرار دارند. به ازای چند مقدار x، تنها یک نقطه مانند M در صفحه وجود دارد به گونه‌ای که $MA = ۳x - ۱$ و $MB = x + ۲$ باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

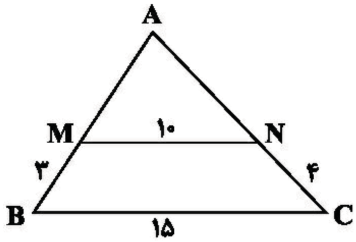
۱۳۳- ارتفاع‌های مثلث ABC در نقطهٔ O واقع در درون این مثلث همرس‌اند. اگر $A\hat{O}B = ۱۳۰°$ و $BO = CO$ باشد، اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویهٔ مثلث ABC کدام است؟

۱) $۶۵°$ ۲) $۷۰°$ ۳) $۷۵°$ ۴) $۸۰°$

۱۳۴- در یک مثلث قائم‌الزاویه، نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ حاده یکدیگر را در نقطه‌ای به فاصلهٔ ۳ واحد از وتر این مثلث قطع می‌کنند. اگر مساحت این مثلث برابر ۶۰ واحد مربع باشد، محیط آن کدام است؟

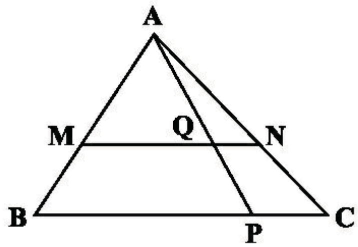
۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

۱۳۵- در شکل مقابل $BC \parallel MN$ است. طول ارتفاع وارد بر ضلع BC در مثلث ABC کدام است؟



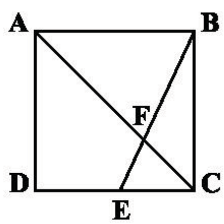
۱) ۶
۲) ۷/۲
۳) ۸
۴) ۹/۶

۱۳۶- در شکل زیر $BC \parallel MN$، $\frac{AM}{AB} = \frac{۳}{۵}$ و $\frac{PC}{PB} = \frac{۱}{۳}$ است. نسبت مساحت مثلث AMQ به مساحت ذوزنقهٔ QNCP کدام است؟



۱) $\frac{۲۷}{۱۶}$
۲) $\frac{۳۲}{۲۷}$
۳) $\frac{۹}{۸}$
۴) $\frac{۱۶}{۹}$

۱۳۷- در شکل زیر ABCD مربعی به ضلع $\sqrt{۱۰}$ و $DE = ۲CE$ است. اندازهٔ BF کدام است؟

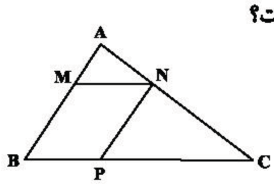


۱) ۲
۲) $\frac{۵}{۲}$
۳) ۳
۴) $\frac{۱۰}{۳}$

۱۳۸- مساحت مثلثی به اضلاع ۱۰، ۱۷ و ۲۱ کدام است؟

۱) ۵۶ ۲) ۶۳ ۳) ۶۸ ۴) ۸۴

۱۳۹- در شکل زیر $BC = ۲AB$ و MNPB لوزی است. نسبت مساحت مثلث AMN به مساحت مثلث ABC کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۴}{۲۵}$
۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۹}{۲۵}$

۱۴۰- در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD به طول قاعده‌های ۳ و ۶ از نقطهٔ تلاقی قطرها، خطی به موازات دو قاعده رسم شده است. اگر این خط، ساق‌های ذوزنقه را در نقاط M و N قطع کند، طول پاره‌خط MN کدام است؟

۱) ۳/۲ ۲) ۳/۶ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

۴۱- گزینهٔ «۱» *(صفحهٔ ۱۲ کتاب پرتکرار، مشابه سؤال ۳۴)*

علت انتخاب سؤال: فرمول اجتماع دو مجموعه جزو مطالب مهم کتاب درسی است که بارها در امتحانات مدارس و آزمون مورد توجه قرار گرفته است. در این سؤال رابطهٔ اشتراک دو مجموعه با هریک از مجموعه‌ها نیز مطرح شده است.

$B:$ نقاشی ، $A:$ خط ، $n(U)=۴۵$

$n(A)=۳۲ \quad , \quad n(B)=۱۸$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\le n(U)$

$\Rightarrow ۳۲+۱۸-n(A\cap B)\le ۴۵ \Rightarrow n(A\cap B)\ge ۵$

بنابراین حداقل تعداد افرادی که به هر دو رشته علاقه‌مند هستند، ۵ نفر است.

از طرفی داریم:

$n(A\cap B)\le n(A), n(A\cap B)\le n(B) \Rightarrow n(A\cap B)\le ۱۸$

بنابراین حداکثر افرادی که به هر دو رشته علاقه‌مند هستند، ۱۸ نفر است.

قدر مطلق تفاضل این دو مقدار برابر $|۱۸-۵|=۱۳$ می‌شود.

(مجموعه، الگو و دنباله، صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳ کتاب درسی)

۱ ✓   ۲   ۳   ۴

۴۲- گزینهٔ «۲» *(صفحهٔ ۱۶ کتاب پرتکرار، مشابه سؤال ۶۷)*

علت انتخاب سؤال: دنبالهٔ هندسی جزو سؤالات پرتکرار امتحانات مدارس است به‌طوری که ۲۷ بار تکرار شده است.

دنبالهٔ هندسی را به‌صورت $t_n=t_1r^{n-1}$ در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\begin{cases} t_1r^3=۴۰ \\ t_1r^6=۳۲۰ \end{cases} \xRightarrow{\div} \frac{1}{r^3}=\frac{1}{8} \Rightarrow r=۲ \Rightarrow t_1=۵$$

$$t_{10}-t_6=t_1r^9-t_1r^5=t_1r^5(r^4-1)=۵\times ۳۲\times ۱۵=۲۴۰۰$$

(مجموعه، الگو و دنباله، صفحه‌های ۲۵ تا ۲۷ کتاب درسی)

۱   ۲ ✓   ۳   ۴

۴۳- گزینهٔ «۲» *(صفحهٔ ۳۴ کتاب پرتکرار، مشابه سؤال ۱۸۷)*

علت انتخاب سؤال: ساده‌سازی عمل ضرب با استفاده از اتحادها، این سؤال مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۶۷ کتاب درسی است.

$$۱)۹۸^۳ = (۱۰۰-۲)^۳ = ۱۰۰^۳ - ۲^۳ - ۳\times۱۰۰\times۲(۱۰۰-۲)$$

$$= ۱۰^۶ - ۸ - ۶۰۰(۱۰۰-۲) = ۱۰^۶ - ۸ - ۶\times۱۰^۴ + ۱۲۰۰$$

$$= ۱۰^۴(۱۰۰-۶) + ۱۱۹۲ = ۹۴۰۰۰۰ + ۱۱۹۲ = ۹۴۱۱۹۲$$

$$۲)۶۴۷^۲ - ۶۴۰^۲ = (۶۴۷-۶۴۰)(۶۴۷+۶۴۰) = ۷\times۱۲۸۷ = ۹۰۰۹$$

$$۳)(۲۰+۲۱)(۲۰^۲+۲۱^۲)(۲۰^۴+۲۱^۴) - ۲۱^۸$$

$$= \frac{(۲۰-۲۱)}{(۲۰-۲۱)}(۲۰+۲۱)(۲۰^۲+۲۱^۲)(۲۰^۴+۲۱^۴) - ۲۱^۸$$

$$= \frac{۲۰^۸ - ۲۱^۸}{۲۰-۲۱} - ۲۱^۸ = -۲۰^۸$$

$$۴)۱۹\times۲۱\times۴۰۱ = (۲۰-۱)(۲۰+۱)\times۴۰۱ = (۲۰^۲-۱)\times۴۰۱$$

$$= ۳۹۹\times۴۰۱ = (۴۰۰-۱)(۴۰۰+۱) = ۴۰۰^۲ - ۱$$

$$= ۱۶۰۰۰۰ - ۱ = ۱۵۹۹۹۹$$

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری، صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵ کتاب درسی)

۱	۲ ✓	۳	۴

۴۴- گزینهٔ «۴» *(صفحهٔ ۲۷ کتاب پرتکرار، مشابه سؤال‌های ۱۴۶ و ۱۴۷)*

علت انتخاب سؤال: دانستن اتحادهای مثلثاتی که از سؤالات پرتکرار آزمون‌ها و کنکور است و به صورت ترکیبی با سایر دروس پایه‌های بالاتر مطرح می‌شود، لازم است.

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5}$$

$$\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\frac{1}{1+\tan^2\alpha}$$

$$=(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\cos^2\alpha$$

$$=\sin^2(\alpha)-\cos^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)$$

$$=\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

(مثلثات، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶ کتاب درسی)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۴۵- گزینهٔ «۲» *(صفحهٔ ۳۵ کتاب پرتکرار، مشابه سؤال ۱۹۴ قسمت ب)*

علت انتخاب سؤال: تجزیهٔ عبارت‌ها با استفاده از اتحادها در امتحانات مدارس ۲۵ بار تکرار شده است.

$$x^4-xy^3+x^3y-y^4=x(x^3-y^3)+y(x^3-y^3)$$

$$=(x+y)(x^3-y^3)=(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری، صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵ کتاب درسی)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۴۶- گزینهٔ «۴» *(صفحهٔ ۴۱ کتاب پرتکرار، مشابه سؤال ۲۳۳)*

علت انتخاب سؤال: حل معادلهٔ درجهٔ دوم در مسائل کاربرد دارد. این سؤال مشابه سؤالات صفحهٔ ۷۷ کتاب درسی است.

عدد کوچک‌تر را x در نظر می‌گیریم، داریم:

$$x(x+2)=23+x+x+2 \Rightarrow x^2+2x=25+2x$$

$$\Rightarrow x^2=25 \Rightarrow x=\pm 5$$

با توجه به گزینه‌ها، گزینه «۴» درست است.

(معادله‌ها و نامعادله‌ها، صفحه‌های ۷۰ تا ۷۷ کتاب درسی)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۴۷- گزینهٔ «۳» *(صفحهٔ ۲۹ کتاب پرتکرار، مشابه سؤال ۱۵۸)*

علت انتخاب سؤال: این سؤال اهمیت تمرین ۵ صفحه‌های ۵۲ و ۵۳ و مطالب صفحه‌های ۵۴ تا ۵۸ کتاب درسی را مشخص می‌کند.

$$A=|a^3-a^2|-|a^2-\sqrt[3]{a}|+|\sqrt[3]{a}-a|$$

$$=-(a^3-a^2)-(a^2-\sqrt[3]{a})-(\sqrt[3]{a}-a)$$

$$=-a^3+a^2-a^2+\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a}+a=a-a^3$$

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری، صفحه‌های ۴۸ تا ۵۸ کتاب درسی)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۴۸- گزینهٔ «۳» *(صفحهٔ ۳۲ کتاب پرتکرار، مشابه سؤال ۱۷۰)*

علت انتخاب سؤال: اعمال جبری روی ریشهٔ nام و ساده‌سازی ریشه‌ها جزو سؤالات پرتکرار امتحانات مدارس و آزمون‌ها است.

حاصل گزینه‌های «۱» و «۲» و «۴» درست نوشته شده است. برای گزینهٔ «۳» داریم:

$$\sqrt[11]{2\sqrt{2}-3}\times\sqrt[11]{3+2\sqrt{2}}=\sqrt[11]{(2\sqrt{2}-3)(3+2\sqrt{2})}$$

$$=\sqrt[11]{(2\sqrt{2})^2-3^2}=\sqrt[11]{8-9}=-1$$

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری، صفحه‌های ۵۴ تا ۶۵ کتاب درسی)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۴۹- گزینهٔ «۲» *(صفحهٔ ۴۱ کتاب پرتکرار، مشابه سؤال ۲۳۶)*

علت انتخاب سؤال: در کنکور و امتحانات مدارس دانستن چگونگی حل معادلهٔ درجه دوم بسیار مهم است. مشابه تمرین ۸ صفحهٔ ۷۷ کتاب درسی است.

سن کنونی خواهر بزرگ‌تر را $\mathbf{x}$ و سن خواهر کوچک‌تر را $\mathbf{y}$ در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\begin{cases} x - y = ۶ \\ (x+۳)(y+۳) = ۳۹۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x+۳)(x-۶+۳) = ۳۹۱ \Rightarrow (x+۳)(x-۳) = ۳۹۱$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۹ = ۳۹۱ \Rightarrow x^۲ = ۴۰۰ \Rightarrow x = \pm ۲۰$$

سن کنونی خواهر بزرگ‌تر ۲۰ سال است و بعد از ۵ سال ۲۵ ساله خواهد شد.

(معادله‌ها و نامعادله‌ها، صفحه‌های ۷۰ تا ۷۷ کتاب درسی)

۱ | ۲ ✓ | ۳ | ۴

۵۰- گزینهٔ «۴» *(صفحهٔ ۴۱ کتاب پرتکرار، مشابه سؤال ۲۲۷)*

علت انتخاب سؤال: این سؤال رابطهٔ بین Δ و ریشه‌های معادله را بیان می‌کند. مشابه این سؤال در کنکور انسانی خارج از کشور سال ۹۱ مطرح شده است که در سؤال ۵۲۴ صفحهٔ ۱۰۳ کتاب آبی ریاضی دهم آمده است.

$$mx^۲ - (۲+m)x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\text{دو ریشهٔ حقیقی متمایز}} \Delta > ۰$$

$$\Rightarrow (-(۲+m))^۲ - ۴m > ۰ \Rightarrow ۴ + ۴m + m^۲ - ۴m > ۰$$

$$\Rightarrow m^۲ + ۴ > ۰ \Rightarrow m \in \mathbb{R} - \{۰\}$$

دقت شود که به ازای $\mathbf{m = ۰}$ ضریب $\mathbf{x^۲}$ صفر شده و دو ریشهٔ حقیقی متمایز نخواهیم داشت.

(معادله‌ها و نامعادله‌ها، صفحه‌های ۷۰ تا ۷۷ کتاب درسی)

۱ | ۲ | ۳ | ۴ ✓

۱۲۱- گزینهٔ «۳» *(صفحهٔ ۱۵ کتاب سه‌سطحی، مشابه سؤال ۶۱)*

علت انتخاب سؤال: پیدا کردن رابطه بین جملات یک الگو از مباحث مهم کتاب درسی است. در آزمون‌ها جزو مباحث پرتکرار است. همچنین در این سؤال تعداد گوی‌های سیاه تشکیل دنبالهٔ حسابی نیز می‌دهند.

شمارهٔ مرحله	۱	۲	۳	...	n
تعداد کل گوی‌ها	۱	$۳^۲$	$۵^۲$	...	$(۲n-۱)^۲$
تعداد گوی‌های سیاه	۱	۵	۹	...	$۱+(n-۱)\times ۴=۴n-۳$

بنابراین تعداد گوی‌های سفید در هر مرحله از رابطهٔ $(۲n-۱)^۲-(۴n-۳)=۴n^۲-۸n+۴$ به‌دست می‌آید.

تفاضل تعداد گوی‌های سیاه از تعداد گوی‌های سفید $=۴n^۲-۸n+۴-(۴n-۳)$

$$=۴n^۲-۱۲n+۷=۲۲۳\Rightarrow ۴n^۲-۱۲n-۲۱۶=۰$$

$$\Rightarrow n^۲-۳n-۵۴=۰\Rightarrow (n-۹)(n+۶)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n=-۶ \text{ غ ق ق} \\ n=۹ \end{cases}$$

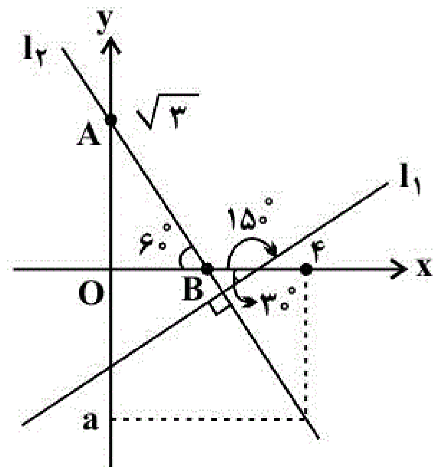
بنابراین در مرحلهٔ نهم، تفاضل تعداد گوی‌های سیاه از تعداد گوی‌های سفید ۲۲۳ تا است.

(ترکیبی، صفحه‌های ۱۴ تا ۲۴ و ۷۰ تا ۷۷ کتاب درسی)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۲۲- گزینهٔ «۲» *(صفحهٔ ۲۹ کتاب سه‌سطحی، مشابه سؤال ۱۵۳)*

علت انتخاب سؤال: استفاده از روابط مثلثاتی برای یافتن معادلهٔ خط در این سؤال مدنظر است.



با توجه به مثلث تشکیل شده بین دو خط و محور xها، در مثلث OAB داریم:

$$\tan ۶۰^\circ = \frac{OA}{OB} = \sqrt{۳} \Rightarrow OB = ۱$$

بنابراین نقاط $(۱,۰)$ و $(۰,\sqrt{۳})$ روی خط $l_۲$ قرار دارند:

$$m = \frac{۰-\sqrt{۳}}{۱-۰} = -\sqrt{۳} \Rightarrow l_۲ : y = -\sqrt{۳}x + \sqrt{۳}$$

توجه شود که در این سؤال نیازی به دست‌آوردن معادلهٔ خط $l_۱$ نیست و با اندکی دقت در شکل سؤال، مسئله به راحتی قابل حل است.

(مثلثات، صفحه‌های ۲۹ تا ۳۵، ۴۰ و ۴۱ کتاب درسی)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۲۳- گزینهٔ «۴» *(صفحهٔ ۳۶ کتاب سه‌سطحی، مشابه سؤال ۲۰۴)*

علت انتخاب سؤال: استفاده از روابط و اتحادهای مثلثاتی برای ساده‌تر حل شدن سؤال مدنظر است. دانش‌آموزان باید علامت هریک از نسبت‌های مثلثاتی را در دایرهٔ مثلثاتی بدانند.

ابتدا عبارت $\mathbf{A}$ را ساده می‌کنیم:

$$A=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}+\frac{۲\cos^۲ x-۱}{\cos^۲ x(۱-\tan^۲ x)}$$

$$=\frac{(\sin x+\cos x)^۲}{\sin^۲ x-\cos^۲ x}+\frac{۲\cos^۲ x-۱}{\cos^۲ x-\sin^۲ x}$$

$$=\frac{۱+۲\sin x\cos x-(۲\cos^۲ x-۱)}{\sin^۲ x-\cos^۲ x}=\frac{۲-۲\cos^۲ x+۲\sin x\cos x}{\sin^۲ x-\cos^۲ x}$$

$$=\frac{۲\sin^۲ x+۲\sin x\cos x}{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)}=\frac{۲\sin x}{\sin x-\cos x}$$

$$\sin x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \cos^۲ x=۱-\sin^۲ x=۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

$$\xrightarrow[\text{x در ناحیهٔ دوم}]{\text{انتهای کمان زاویهٔ}}\cos x=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

بنابراین:

$$A=\frac{۲\times\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}-(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})}=\frac{۱}{\frac{۱+\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۲}{۱+\sqrt{۳}}\times\frac{۱-\sqrt{۳}}{۱-\sqrt{۳}}=\sqrt{۳}-۱$$

(مثلثات، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶ کتاب درسی)

۱	۲	۳	۴ ✓

۱۲۴- گزینهٔ «۱» *(صفحهٔ ۴۶ کتاب سه‌سطحی، مشابه سؤال ۲۶۹)*

علت انتخاب سؤال: استفاده از اتحادها برای ساده‌سازی عبارات رادیکالی به صورت ترکیبی در سؤالات کنکور مطرح می‌شود.

$$A=\sqrt{۱+۲\sqrt{۳}}\times\sqrt[۴]{۱۳-۴\sqrt{۳}}=\sqrt{۱+۲\sqrt{۳}}\times\sqrt[۴]{(۲\sqrt{۳}-۱)^۲}$$

$$=\sqrt{۱+۲\sqrt{۳}}\times\sqrt{۲\sqrt{۳}-۱}=\sqrt{(۲\sqrt{۳})^۲-۱}=\sqrt{۱۲-۱}=\sqrt{۱۱}$$

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری، صفحه‌های ۵۹ تا ۶۵ کتاب درسی)

۱ ✓	۲	۳	۴

۱۲۵- گزینهٔ «۲» *(صفحهٔ ۴۵ کتاب سه‌سطحی، مشابه سؤال ۲۶۰)*

علت انتخاب سؤال: توانایی مقایسهٔ بین ریشه‌ها و توان‌های چند عدد از مباحث مهم کتاب است.

$$\left.\begin{array}{l} ۲^۴ < ۸۰ < ۳^۴ \Rightarrow ۲ < A < ۳ \\ ۳^۳ < ۳۱ < ۴^۳ \Rightarrow ۳ < B < ۴ \end{array}\right. \Rightarrow A < B$$

$$\left.\begin{array}{l} ۳^۶ < ۹۷۲ < ۴^۶ \Rightarrow ۳ < C < ۴ \\ ۲^۵ < ۳۵ < ۳^۵ \Rightarrow ۲ < D < ۳ \end{array}\right. \Rightarrow D < C$$

$$\begin{cases} C = \sqrt[۶]{۹۷۲} \Rightarrow C^۶ = ۹۷۲ \\ B = \sqrt[۳]{۳۱} \Rightarrow B^۶ = ۳۱^۲ = ۹۶۱ \end{cases} \Rightarrow C > B$$

$$\begin{cases} A = \sqrt[۴]{۸۰} = ۲\sqrt[۴]{۵} \Rightarrow A^{۱۰} = ۱۰۲۴\sqrt[۲]{۵^۵} = ۲۵ \times ۱۰۲۴\sqrt{۵} = ۲۵۶۰۰\sqrt{۵} \\ D = \sqrt[۵]{۳۵} \Rightarrow D^{۱۰} = ۱۲۲۵ \end{cases} \Rightarrow A > D$$

بنابراین:

$$D < A < B < C$$

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری، صفحه‌های ۴۸ تا ۵۸ کتاب درسی)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

۱۲۶- گزینهٔ «۴» *(صفحهٔ ۴۴ کتاب سه‌سطحی، مشابه سؤال ۲۵۶)*

علت انتخاب سؤال: گویاکردن مخرج کسرها و استفاده از اتحادها برای ساده‌سازی، در امتحانات مدارس و آزمون‌ها مورد توجه است.

$$a = \sqrt{۶ - \sqrt{۲۰}} = \sqrt{۶ - ۲\sqrt{۵}} = \sqrt{(\sqrt{۵} - ۱)^۲} = |\sqrt{۵} - ۱| = \sqrt{۵} - ۱$$

$$b = \sqrt{۶ + \sqrt{۲۰}} = \sqrt{۶ + ۲\sqrt{۵}} = \sqrt{(\sqrt{۵} + ۱)^۲} = |\sqrt{۵} + ۱| = \sqrt{۵} + ۱$$

$$\frac{۱}{۲a - b} = \frac{۱}{۲\sqrt{۵} - ۲ - \sqrt{۵} - ۱} = \frac{۱}{\sqrt{۵} - ۳}$$

$$= \frac{۱}{\sqrt{۵} - ۳} \times \frac{\sqrt{۵} + ۳}{\sqrt{۵} + ۳} = \frac{\sqrt{۵} + ۳}{-۴}$$

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری، صفحه‌های ۶۵ تا ۶۸ کتاب درسی)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

۱۲۷- گزینهٔ «۱» *(صفحهٔ ۴۴ کتاب سه‌سطحی، مشابه سؤال ۲۵۱)*

علت انتخاب سؤال: از سؤالات بسیار مهم در استفاده از اتحادها می‌باشد که در آزمون‌ها و کنکور بسیار سؤال خیز است. این سؤال کاربرد اتحادها در حل سؤال را مشخص می‌کند.

$$x^2+y^2=2 \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان ۳}} (x^2+y^2)^3$$

$$=x^6+y^6+3x^2y^2(x^2+y^2)=8$$

$$\Rightarrow x^6+y^6+6x^2y^2=8 \Rightarrow x^6+y^6-8=-6x^2y^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2y^2}{x^6+y^6-8}=\frac{x^2y^2}{-6x^2y^2}=-\frac{1}{6}$$

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری، صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵ کتاب درسی)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۲۸- گزینهٔ «۳» *(صفحهٔ ۵۹ کتاب سه‌سطحی، مشابه سؤال ۳۶۲)*

علت انتخاب سؤال: استفاده از Δ در حل معادلات درجهٔ دوم و رابطهٔ آن با ریشه‌ها

$$\frac{m}{4}x^2-(4-m)x+8=0 \Rightarrow \Delta=0$$

$$\Rightarrow (-(4-m))^2-4\times\frac{m}{4}\times 8=0$$

$$\Rightarrow 16+m^2-8m-8m=0 \Rightarrow m^2-16m+16=0$$

$$\Rightarrow \Delta'=(16)^2-4\times 16=12\times 16$$

$$\Rightarrow m_{1,2}=\frac{16\pm 8\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m_1+m_2=16$$

(معادله‌ها و نامعادله‌ها، صفحه‌های ۷۴ تا ۷۷ کتاب درسی)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۲۹- گزینهٔ «۳» *(صفحهٔ ۶۰ کتاب سه‌سطحی، مشابه سؤال ۳۶۸)*

علت انتخاب سؤال: به دست آوردن ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم با توجه به شرایط مسئله.

$$-x^{2}+bx+c=0 \Rightarrow \begin{cases} -1-b+c=0 \\ -9+3b+c=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b-c=-1 \\ 3b+c=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ c=3 \end{cases}$$

$$(2b+c)x^{2}-5cx+b=0 \Rightarrow 7x^{2}-15x+2=0$$

$$\Rightarrow \Delta=(-15)^{2}-56=169$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{15\pm 13}{14} \Rightarrow \begin{cases} x_{1}=2 \\ x_{2}=\frac{1}{7} \end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ دوم، دو ریشهٔ حقیقی مثبت دارد.

(معادله‌ها و نامعادله‌ها، صفحه‌های ۷۰ تا ۷۷ کتاب درسی)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۳۰- گزینهٔ «۲» *(صفحهٔ ۶۳ کتاب سه‌سطحی، مشابه سؤال ۳۹۱)*

علت انتخاب سؤال: رابطهٔ بین ریشهٔ مضاعف با Δ و استفاده از فرمول کلی برای به‌دست آوردن ریشه‌ها از سؤالاتی است که در کنکور چند سال اخیر مطرح شده است.

$$\Delta = 0 \Rightarrow [-(4b+4)]^2 - 4(5b+\frac{13}{2}) = 0$$

$$\Rightarrow 4^2(b+1)^2 - 4(5b+\frac{13}{2}) = 0$$

$$\Rightarrow 4(b^2+1+2b) - 5b - \frac{13}{2} = 0$$

$$\Rightarrow 4b^2 + 3b - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow \Delta = 3^2 - 4\times 4\times(-\frac{5}{2}) = 49$$

$$\begin{cases} b_1 = \dfrac{-3+7}{8} = \dfrac{1}{2} \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0 \\ b_2 = \dfrac{-3-7}{8} = -\dfrac{5}{4} \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} x^2 + x + \dfrac{1}{4} = 0 \Rightarrow (x+\dfrac{1}{2})^2 = 0 \end{cases}$$

به ازای $b = \frac{1}{2}$ معادله، دارای یک ریشهٔ مضاعف مثبت است.

(معادله‌ها و نامعادله‌ها، صفحه‌های ۷۰ تا ۷۷ کتاب درسی)

$\boxed{۱}$ $\boxed{۲}$✓ $\boxed{۳}$ $\boxed{۴}$

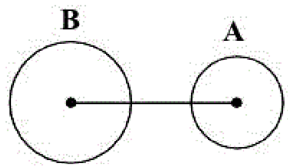
۵۱- گزینهٔ «۳» *(صفحهٔ ۹ کتاب پرتکرار، مشابه سؤال ۵)*

علت انتخاب: ۱) ارتباط با کار در کلاس ۳ صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی

۲) درک رابطهٔ بین دو مجموعهٔ نقاط در صفحه (مکان هندسی) و حالت‌های مختلف دو دایره نسبت به هم

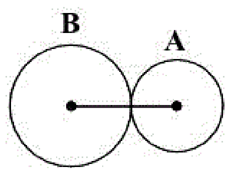
پاسخ: مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از یک نقطه واقع در آن صفحه به فاصلهٔ ثابت $\mathbf{r}$ باشند، دایره‌ای به مرکز آن نقطه و شعاع $\mathbf{r}$ است. از طرفی دو دایره به شعاع‌های $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ که فاصلهٔ مراکز آن‌ها از یکدیگر برابر $\mathbf{d}$ است، در صورتی در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند که $|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|<\mathbf{d}<\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2$ باشد.

گزینهٔ «۱»: $\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2=1+3=4<7$



در این حالت دو دایره یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

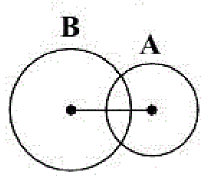
گزینهٔ «۲»: $\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2=2+5=7$



در این حالت دو دایره از بیرون بر یکدیگر مماس‌اند.

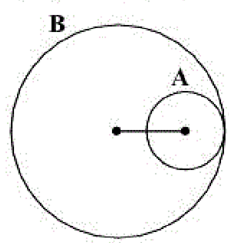
گزینهٔ «۳»: $\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2=3+6=9>7$

$|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|=|3-6|=3<7$



در این حالت دو دایره یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند.

گزینهٔ «۴»: $|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|=|2-9|=7$



در این حالت دو دایره از درون بر یکدیگر مماس‌اند.

(ترسیم‌های هندسی و استدلال، صفحه‌های ۱۰ و ۱۱ کتاب درسی)

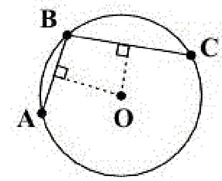
۱ ۲ ۳✓ ۴

۵۲- گزینهٔ «۲» *(صفحهٔ ۱۱ کتاب پرتکرار، مشابه سؤال ۲۵)*

علت انتخاب: ۱) ارتباط با تمرین ۵ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی

۲) درک یکسان بودن فاصلهٔ مرکز دایره از تمام نقاط واقع بر دایره و مفهوم عمودمنصف یک پاره‌خط و ویژگی‌های آن

پاسخ: فرض کنید سه نقطهٔ A، B و C از یک دایره را در اختیار داریم. می‌دانیم مرکز دایره از تمام نقاط واقع بر دایره به یک فاصله است. از طرفی نقاطی از صفحه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشند، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارند. بنابراین مرکز دایرهٔ مورد نظر بر روی عمودمنصف‌های دو پاره‌خط AB و BC (محل تلاقی این عمودمنصف‌ها) واقع است.



بعد از یافتن نقطهٔ O (مرکز دایره)، می‌توانیم دایره را به شعاع OA یا OB یا OC رسم کنیم.

تذکر: چون هر سه نقطهٔ دلخواه واقع بر یک دایره بر یک خط راست قرار ندارند، پس عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های ایجاد شده توسط این نقاط، حتماً یکدیگر را قطع می‌کنند.

(ترسیم‌های هندسی و استدلال، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶ کتاب درسی)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۵۳- گزینهٔ «۴» *(صفحهٔ ۱۷ کتاب پرتکرار، مشابه سؤال ۶۲)*

علت انتخاب: ۱) ارتباط با تمرین ۵ صفحهٔ ۲۷

۲) توانایی نوشتن عکس هر قضیه و درک این مفهوم که عکس هر قضیه لزوماً درست نیست.

پاسخ: قضیه‌ای را می‌توان به صورت دو شرطی نوشت که عکس آن نیز خود یک قضیه باشد (عکس قضیه نیز درست باشد). از طرفی عکس هر قضیه با جابه‌جایی فرض و حکم آن قضیه نوشته می‌شود.

گزینهٔ «۱»: عکس قضیه: «اگر در دو مثلث، زوایا نظیر به نظیر برابر یکدیگر باشند، آن‌گاه آن دو مثلث هم‌نهشت هستند.»

عکس قضیه درست نیست مثلاً هر دو مثلث متساوی‌الاضلاع دلخواه هم‌نهشت نیستند.

گزینهٔ «۲»: عکس قضیه: «اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه آن چهارضلعی لوزی است.»

عکس قضیه درست نیست. اگر در یک متوازی‌الاضلاع، اضلاع مجاور برابر هم نباشند. آن متوازی‌الاضلاع، لوزی نیست.

گزینهٔ «۳»: عکس قضیه: «اگر دو مثلث محیط برابر داشته باشند، آن‌گاه هم‌نهشت هستند.»

عکس قضیه درست نیست. مثلاً دو مثلث یکی به اضلاع ۳، ۴ و ۵ و دیگری به اضلاع ۴ و ۴ و ۴ محیط برابر دارند ولی هم‌نهشت نیستند.

گزینهٔ «۴»: عکس قضیه: «اگر ارتفاع‌های وارد بر دو ضلع مثلثی برابر باشند، آن دو ضلع نیز برابرند.»

عکس قضیه درست است، پس می‌توان قضیه را به‌صورت دو شرطی نوشت.

(ترسیم‌های هندسی و استدلال، صفحهٔ ۲۵ کتاب درسی)

۱ ۲ ۳ ۴✓

$$\overset{\Delta}{OAB}: O\hat{B}A = ۱۸۰^\circ - (۸۰^\circ + ۳۰^\circ) = ۷۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{OAB}: \hat{A} > O\hat{B}A \Rightarrow OB > OA \qquad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{OBC}: O\hat{B}C = ۱۸۰^\circ - (۵۰^\circ + ۶۰^\circ) = ۷۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{OBC}: O\hat{B}C > O\hat{C}B \Rightarrow OC > OB \quad (۲)$$

$$\overset{\Delta}{OCD}: \hat{D} = ۱۸۰^\circ - (۷۵^\circ + ۴۰^\circ) = ۶۵^\circ$$

$$\overset{\Delta}{OCD}: O\hat{C}D > \hat{D} \Rightarrow OD > OC \qquad (۳)$$

$$(۱),(۲),(۳) \Rightarrow OD > OC > OB > OA$$

(ترسیم‌های هندسی و استدلال، صفحهٔ ۲۲ کتاب درسی)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۵۵- گزینهٔ «۳» (صفحهٔ ۲۴ کتاب پرتکرار، مشابه سؤال ۱۱۴)

علت انتخاب: ۱) ارتباط با تمرین ۳ صفحهٔ ۳۳ و کار در کلاس صفحهٔ ۳۱ کتاب درسی

۲) درک رابطهٔ بین مساحت دو مثلث که ارتفاع وارد بر یکی از اضلاع آن‌ها مشترک است.

پاسخ: می‌دانیم اگر دو مثلث در یک رأس مشترک بوده و قاعدهٔ مقابل به این رأس آن‌ها روی یک خط راست باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت اندازهٔ قاعده‌های آن‌هاست. بنابراین داریم:

$$\frac{S_{AEC}}{S_{ABE}}=\frac{EC}{BE}=۱\Rightarrow S_{AEC}=S_{ABE}\quad (۱)$$

$$\frac{S_{AFC}}{S_{AEC}}=\frac{FC}{EC}=\frac{۱}{۲}\quad (۲)$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADE}}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}}\frac{S_{ABD}}{S_{ABE}}=\frac{۱}{۳}\quad (۳)$$

$$(۲),(۳)\Rightarrow \frac{\frac{S_{AFC}}{S_{AEC}}}{\frac{S_{ABD}}{S_{ABE}}}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۳}}\xrightarrow{(۱)}\frac{S_{AFC}}{S_{ABD}}=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{FC}{BD}=\frac{۳}{۲}$$

(قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۳۰ تا ۳۳ کتاب درسی)

۱ ۲ ۳✓ ۴

$$\frac{۲a}{b}=\frac{۲c}{d}=\frac{۲}{۳}$$

از طرفی $\frac{-۶}{-۹}=\frac{۲}{۳}$، بنابراین داریم:

$$\frac{۲a}{b}=\frac{۲c}{d}=\frac{-۶}{-۹}=\frac{۲}{۳}$$

حال طبق تعمیم ویژگی ۶ تناسب می‌توان نوشت:

$$\frac{۲a+۲c-۶}{b+d-۹}=\frac{۲}{۳}$$

(قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۳۲ و ۳۳ کتاب درسی)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۵۷- گزینهٔ «۴» (صفحهٔ ۲۹ کتاب پرتکرار، مشابه سؤال ۱۳۷)

علت انتخاب: ۱) ارتباط با تمرین ۳ صفحهٔ ۳۶ کتاب درسی

۲) کاربرد قضیه تالس و تعمیم آن در حل مسئله

پاسخ:

$$\overset{\Delta}{ABC}: MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{x+۳}{۲x+۲} = \frac{۲x}{۲x+۵} \Rightarrow (x+۳)(۲x+۵) = ۲x(۲x+۲)$$

$$\Rightarrow ۲x^۲ + ۵x + ۶x + ۱۵ = ۴x^۲ + ۴x \Rightarrow ۲x^۲ - ۷x - ۱۵ = ۰$$

$$\Delta = (-۷)^۲ - ۴(۲)(-۱۵) = ۱۶۹$$

$$x = \frac{۷ \pm ۱۳}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x = ۵ \\ x = -\frac{۳}{۲} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: MN \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

$$\Rightarrow \frac{۸}{۴} = \frac{y+۲}{y-۳}$$

$$\Rightarrow ۸(y-۳) = ۴(y+۲) \Rightarrow ۸y - ۲۴ = ۴y + ۸$$

$$\Rightarrow ۴y = ۳۲ \Rightarrow y = ۸$$

بنابراین حاصل $y - x$ برابر است با:

$$۸ - ۵ = ۳$$

(قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۳۴ تا ۳۶ کتاب درسی)

۱ ۲ ۳ ۴✓

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{B}=\widehat{B}\\ B\widehat{D}E=\widehat{A}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{تساوی دو زاویه}} \overset{\Delta}{BDE}\sim\overset{\Delta}{BAC}$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{AC}=\frac{BD}{BA}=\frac{BE}{BC}\Rightarrow \frac{y}{۱۲}=\frac{۸}{۱۲+x}=\frac{۱۲}{۲۴}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{y}{۱۲}=\frac{۱۲}{۲۴}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow y=۱۲\times\frac{۱}{۲}=۶\\ \frac{۸}{۱۲+x}=\frac{۱۲}{۲۴}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۱۲+x=۱۶\Rightarrow x=۴\end{cases}$$

بنابراین $\frac{y}{x}=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}$ است.

(قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۳۸ تا ۴۱ کتاب درسی)

۱   ۲✓   ۳   ۴

۵۹- گزینهٔ «۴» *(صفحهٔ ۳۸ کتاب پرتکرار، مشابه سؤال ۱۸۶)*

علت انتخاب: ۱) ارتباط با تمرین ۲ صفحهٔ ۴۳ کتاب درسی

۲) کاربرد روابط طولی مثلث قائم‌الزاویه در حل مسئله

پاسخ: طبق فرض $\frac{CH}{BH}=۹$ است. بنابراین اگر $BH=x$ باشد، $CH=۹x$ است و طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

$$AH^۲=BH\times CH\Rightarrow ۱۲^۲=x(۹x)\Rightarrow ۹x^۲=۱۴۴$$

$$\Rightarrow x^۲=۱۶\xrightarrow{x>۰}x=۴$$

$$BC=BH+CH=۴+۳۶=۴۰$$

(قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۴۱ و ۴۲ کتاب درسی)

۱   ۲   ۳   ۴✓

۶۰- گزینهٔ «۱» *(صفحهٔ ۴۲ کتاب پرتکرار، مشابه سؤال ۲۲۰)*

علت انتخاب: ۱) ارتباط با کار در کلاس ۱ و ۲ صفحهٔ ۴۸ کتاب درسی

۲) درک رابطهٔ نسبت تشابه با نسبت محیط‌ها و مساحت‌های دو چندضلعی متشابه

پاسخ: هر دو nضلعی منتظم همواره با هم متشابه‌اند، پس دو پنج‌ضلعی منتظم نیز با هم متشابه‌اند و نسبت محیط‌های آن‌ها برابر نسبت تشابه و نسبت مساحت‌های آن‌ها مجذور نسبت تشابه است. بسته به اینکه مساحت پنج‌ضلعی منتظم بزرگ‌تر یا کوچکتر برابر ۱۰۰ باشد، مسئله دارای دو حالت است:

حالت اول: $\frac{S}{S'} = k^۲ \Rightarrow \frac{۱۰۰}{S'} = \left(\frac{۲}{۵}\right)^۲ = \frac{۴}{۲۵} \Rightarrow S' = ۶۲۵$

حالت دوم: $\frac{S}{S'} = k^۲ \Rightarrow \frac{S}{۱۰۰} = \left(\frac{۲}{۵}\right)^۲ = \frac{۴}{۲۵} \Rightarrow S = ۱۶$

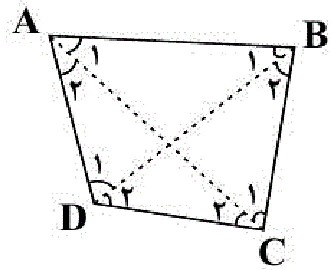
(قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۴۷ و ۴۸ کتاب درسی)

✓ ۱ ۲ ۳ ۴

۱۳۱- گزینهٔ «۳» *(صفحهٔ ۱۸ کتاب سه‌سطحی، مشابه سؤال ۸۹)*

علت انتخاب: درک دقیق نامساوی‌های هندسی مربوط به اضلاع و زوایا در مثلث

پاسخ: می‌دانیم اگر در یک مثلث، دو ضلع نابرابر باشند، زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر از زاویهٔ روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر، بزرگ‌تر است. بنابراین داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABC}: AB > BC \Rightarrow \hat{C}_۱ > \hat{A}_۱ \\ \overset{\Delta}{ADC}: AD > DC \Rightarrow \hat{C}_۲ > \hat{A}_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C} > \hat{A} \qquad (۱)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABD}: AB > AD \Rightarrow \hat{D}_۱ > \hat{B}_۱ \\ \overset{\Delta}{BDC}: BC > DC \Rightarrow \hat{D}_۲ > \hat{B}_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{D} > \hat{B} \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \hat{C} + \hat{D} > \hat{A} + \hat{B}$$

$$\Rightarrow ۲\hat{C} + ۲\hat{D} > \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{C} + \hat{D} > ۱۸۰^\circ$$

بنابراین رابطهٔ گزینهٔ «۳» قطعاً نادرست است.

(ترسیم‌های هندسی و استدلال، صفحه‌های ۲۱ و ۲۲ کتاب درسی)

۱ ۲ ۳✓ ۴

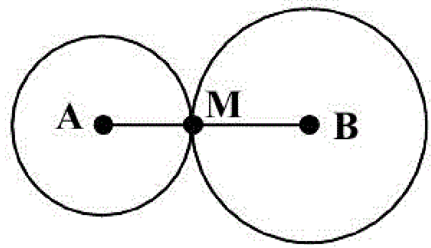
۱۳۲- گزینهٔ «۳» *(صفحهٔ ۱۹ کتاب سه‌سطحی، مشابه سؤال ۹۸)*

علت انتخاب: درک حالت‌های مختلف وضعیت دو دایره نسبت به هم

پاسخ: نقاطی از صفحه که از نقطه‌ای مانند $\mathbf{A}$ در آن صفحه به فاصلهٔ ثابت $\mathbf{r}$ باشند، روی دایره‌ای به مرکز $\mathbf{A}$ و به شعاع $\mathbf{r}$ قرار دارند. بنابراین نقطهٔ $\mathbf{M}$ روی دایره‌ای به مرکز $\mathbf{A}$ و شعاع $\mathbf{3x-1}$ و نیز روی دایره‌ای به مرکز $\mathbf{B}$ و شعاع $\mathbf{x+2}$ واقع است.

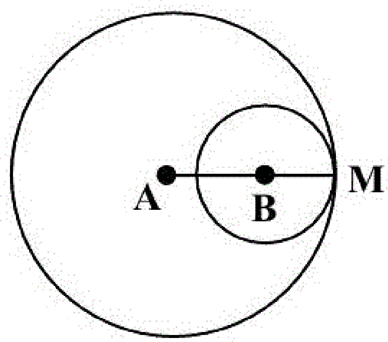
در دو حالت زیر این دو دایره بر هم مماس‌اند و فقط یک نقطه مانند $\mathbf{M}$ در صفحه پیدا می‌شود:

حالت اول:



$$\mathbf{MA+MB=AB \Rightarrow 3x-1+x+2=5}$$
$$\mathbf{\Rightarrow 4x=4 \Rightarrow x=1}$$

حالت دوم:



$$\mathbf{MA-MB=AB \Rightarrow 3x-1-x-2=5}$$
$$\mathbf{\Rightarrow 2x=8 \Rightarrow x=4}$$

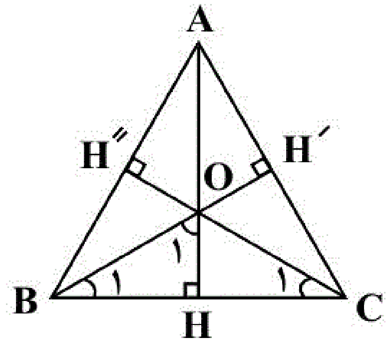
تذکر: حالت $\mathbf{MB-MA=AB}$ امکان‌پذیر نیست، چون در این صورت $\mathbf{x=-1}$ بوده و طول $\mathbf{MA}$ منفی می‌شود.

(ترسیم‌های هندسی و استدلال، صفحه‌های ۱۰ و ۱۱ کتاب درسی)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۳۳- گزینهٔ «۴» *(صفحهٔ ۲۱ کتاب سه‌سطحی، مشابه سؤال ۱۱۰)*

علت انتخاب: ترکیب همرسی ارتفاع‌های مثلث با ویژگی‌های مثلث متساوی‌الساقین



مطابق شکل در صورتی که $\mathbf{BO = CO}$ باشد، مثلث $\mathbf{BOC}$ متساوی‌الساقین است و در نتیجه ارتفاع $\mathbf{OH}$ در این مثلث، میانهٔ نظیر ضلع $\mathbf{BC}$ است، یعنی $\mathbf{BH = CH}$. چون در مثلث $\mathbf{ABC}$، ارتفاع و میانهٔ نظیر ضلع $\mathbf{BC}$ برهم منطبق‌اند، پس این مثلث نیز متساوی‌الساقین است و $\widehat{B}=\widehat{C}$ می‌باشد. داریم:

$$A\widehat{O}B = ۱۳۰^\circ \Rightarrow \widehat{O}_۱ = ۱۸۰^\circ - ۱۳۰^\circ = ۵۰^\circ \xrightarrow{\overset{\Delta}{BOH}} \widehat{B}_۱ = ۴۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{BH'C}: \widehat{B}_۱ + \widehat{H'} + \widehat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۴۰^\circ + ۹۰^\circ + \widehat{C} = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{C} = ۵۰^\circ \Rightarrow \widehat{B} = ۵۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{A} + ۱۰۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{A} = ۸۰^\circ$$

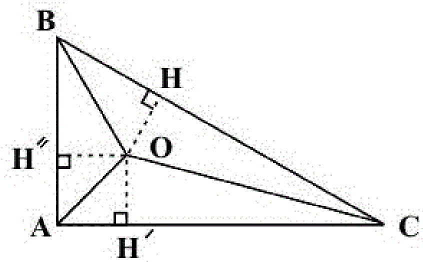
(ترسیم‌های هندسی و استدلال، صفحهٔ ۱۹ کتاب درسی)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۳۴- گزینهٔ «۴» *(صفحهٔ ۲۳ کتاب سه‌سطحی، مشابه سؤال ۱۲۹)*

علت انتخاب: درک مفهوم همرسی نیمسازهای داخلی مثلث و ویژگی نیمساز یک زاویه

پاسخ: نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث در نقطه‌ای واقع در درون آن مثلث همرس‌اند و نقطهٔ همرسی نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث از سه ضلع آن مثلث به یک فاصله است، بنابراین مطابق شکل $\mathbf{OH = OH' = OH'' = ۳}$ است و در نتیجه داریم:



$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OAC} + S_{OBC}$$

$$\Rightarrow ۶۰ = \frac{۱}{۲}OH'' \times AB + \frac{۱}{۲}OH' \times AC + \frac{۱}{۲}OH \times BC$$

$$\Rightarrow ۶۰ = \frac{۱}{۲} \times ۳(AB + AC + BC) \Rightarrow AB + AC + BC = ۴۰$$

بنابراین محیط مثلث $\mathbf{ABC}$، برابر ۴۰ واحد است.

(ترسیم‌های هندسی و استدلال، صفحه‌های ۱۹ و ۲۰ کتاب درسی)

$\boxed{۱}$ $\boxed{۲}$ $\boxed{۳}$ $\boxed{۴}$✓

۱۳۵- گزینهٔ «۲» (صفحهٔ ۴۳ کتاب سه‌سطحی، مشابه سؤال ۲۴۹)

علت انتخاب: ترکیب قضیهٔ تالس با قضیهٔ فیثاغورس و روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه

پاسخ: فرض کنید $AM = x$ و $AN = y$ باشد. در این صورت طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC داریم:

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{x}{x+3} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3x = 2x + 6 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow AB = 9$$

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{y}{y+4} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3y = 2y + 8 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow AC = 12$$

$$15^2 = 12^2 + 9^2 \Rightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2$$

$$\xrightarrow{\text{عکس قضیهٔ فیثاغورس}} \hat{A} = 90^\circ$$

بنابراین مثلث ABC قائم‌الزاویه است. اگر AH ارتفاع وارد بر ضلع BC باشد، آن‌گاه طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH \times 15 = 9 \times 12 \Rightarrow AH = 7/2$$

(قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷ و ۴۱ تا ۴۴ کتاب درسی)

۱   ۲✓   ۳   ۴

۱۳۶- گزینهٔ «۱» (صفحهٔ ۴۵ کتاب سه‌سطحی، مشابه سؤال ۲۶۷)

علت انتخاب: ترکیب قضیهٔ تالس و تشابه با رابطهٔ نسبت مساحت‌ها با اندازهٔ قاعده‌های دو مثلث

$$\overset{\Delta}{ABP}: MQ \parallel BP \xrightarrow{\text{قضیهٔ اساسی تشابه}} \overset{\Delta}{AMQ} \sim \overset{\Delta}{ABP}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{AMQ}}{S_{ABP}} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^{۲} = \frac{۹}{۲۵} \qquad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{APC}: QN \parallel PC \xrightarrow{\text{قضیهٔ اساسی تشابه}} \overset{\Delta}{AQN} \sim \overset{\Delta}{APC}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{AQN}}{S_{APC}} = \left(\frac{AN}{AC}\right)^{۲} = \frac{۹}{۲۵}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در صورت}} \frac{S_{APC} - S_{AQN}}{S_{APC}} = \frac{۲۵-۹}{۲۵}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{QNCP}}{S_{APC}} = \frac{۱۶}{۲۵} \quad (۲)$$

دو مثلث ABP و APC در ارتفاع رسم شده از رأس A مشترک‌اند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌ها است، یعنی داریم:

$$\frac{S_{APC}}{S_{ABP}} = \frac{PC}{PB} = \frac{۱}{۳} \qquad (۳)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{\frac{S_{AMQ}}{S_{ABP}}}{\frac{S_{QNCP}}{S_{APC}}} = \frac{\frac{۹}{۲۵}}{\frac{۱۶}{۲۵}} \Rightarrow \frac{S_{AMQ}}{S_{QNCP}} \times \frac{S_{APC}}{S_{ABP}} = \frac{۹}{۱۶}$$

$$\xrightarrow{(۳)} \frac{S_{AMQ}}{S_{QNCP}} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۹}{۱۶} \Rightarrow \frac{S_{AMQ}}{S_{QNCP}} = \frac{۲۷}{۱۶}$$

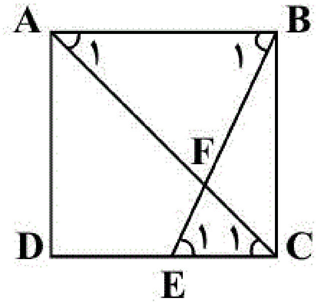
(قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۳۸ و ۴۵ کتاب درسی)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۳۷- گزینهٔ «۲» (صفحهٔ ۴۵ کتاب سه‌سطحی، مشابه سؤال ۲۶۹)

علت انتخاب: کاربرد تشابه مثلث‌ها، قضیهٔ فیثاغورس و ویژگی‌های تناسب

پاسخ: طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث **BCE** داریم:



$$BE^۲ = BC^۲ + CE^۲ = (\sqrt{۱۰})^۲ + \left(\frac{\sqrt{۱۰}}{۳}\right)^۲$$

$$= ۱۰ + \frac{۱۰}{۹} = \frac{۱۰۰}{۹} \Rightarrow BE = \frac{۱۰}{۳} \quad (۱)$$

$AB \parallel EC$ و مورب $AC \Rightarrow \widehat{A}_۱ = \widehat{C}_۱$

$AB \parallel EC$ و مورب $BE \Rightarrow \widehat{B}_۱ = \widehat{E}_۱$

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A}_۱ = \widehat{C}_۱ \\ \widehat{B}_۱ = \widehat{E}_۱\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تساوی دو زاویه}} \overset{\Delta}{ABF} \sim \overset{\Delta}{CEF} \Rightarrow \frac{BF}{EF} = \frac{AB}{CE} = \frac{۳}{۱}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{BF}{BE} = \frac{۳}{۴}$$

$$\xrightarrow{(۱)} \frac{BF}{\frac{۱۰}{۳}} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow BF = \frac{۳}{۴} \times \frac{۱۰}{۳} = \frac{۱۰}{۴} = \frac{۵}{۲}$$

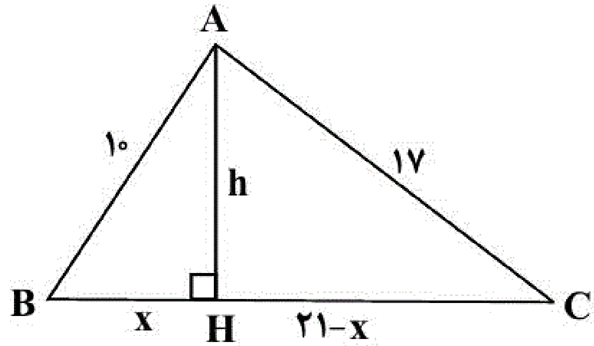
(قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۳۸ تا ۴۱ کتاب درسی)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۳۸- گزینهٔ «۴» *(صفحهٔ ۴۶ کتاب سه‌سطحی، مشابه سؤال ۲۷۳)*

علت انتخاب: مشابهت با تمرین ۴ صفحهٔ ۴۳ کتاب درسی و استفاده از قضیهٔ فیثاغورس

پاسخ: مطابق شکل ارتفاع وارد بر ضلع بزرگ‌تر را رسم می‌کنیم. طبق قضیهٔ فیثاغورس در دو مثلث **AHB** و **AHC** داریم:



$$\overset{\Delta}{AHB}: AH^۲ + BH^۲ = AB^۲ \Rightarrow h^۲ + x^۲ = ۱۰۰ \quad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{AHC}: AH^۲ + CH^۲ = AC^۲ \Rightarrow h^۲ + (۲۱ - x)^۲ = ۱۷^۲$$

$$\Rightarrow h^۲ + ۴۴۱ - ۴۲x + x^۲ = ۲۸۹ \xrightarrow{(۱)} ۱۰۰ + ۴۴۱ - ۴۲x = ۲۸۹$$

$$\Rightarrow ۴۲x = ۲۵۲ \Rightarrow x = ۶ \xrightarrow{(۱)} h = ۸$$

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AH \times BC = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۲۱ = ۸۴$$

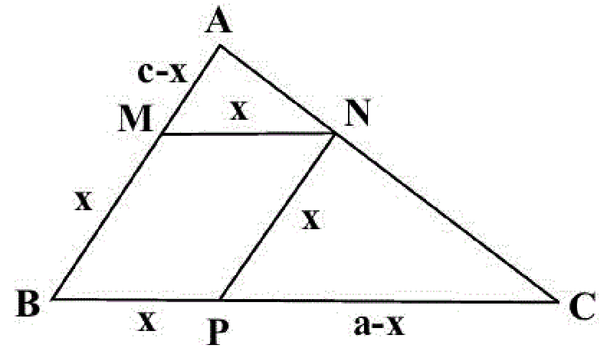
(قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۴۱ تا ۴۴ کتاب درسی)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

۱۳۹- گزینهٔ «۱» (صفحهٔ ۴۶ کتاب سه‌سطحی، مشابه سؤال ۲۷۴)

علت انتخاب: استفاده از تعمیم قضیهٔ تالس و نسبت مساحت‌ها در دو مثلث متشابه

پاسخ: چهارضلعی **MNPB** لوزی است، بنابراین **MN || BC** و **NP || AB** است. اگر طول ضلع این لوزی را برابر **x** در نظر بگیریم، آن‌گاه مطابق شکل داریم:



$$\overset{\Delta}{ABC}: MN \parallel BC$$

$$\xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{c-x}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{c-x} = \frac{a}{c} = ۲ \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{x}{c} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{MN}{BC}\right)^۲ = \left(\frac{x}{a}\right)^۲ = \left(\frac{۱}{۳}\right)^۲ = \frac{۱}{۹}$$

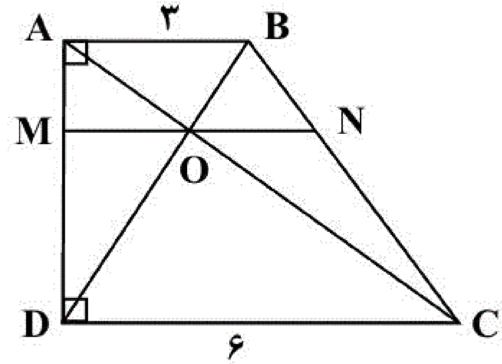
(قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷ و ۴۵ تا ۴۷ کتاب درسی)

✓ ۱ ۲ ۳ ۴

۱۴۰- گزینهٔ «۳» *(صفحهٔ ۴۷ کتاب سه‌سطحی، مشابه سؤال ۲۸۰)*

علت انتخاب: کاربرد قضیهٔ تالس در مثلث و ذوزنقه، مشابهت با تمرین ۷ صفحهٔ ۳۷ کتاب درسی

طبق قضیهٔ تالس در ذوزنقه، $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$ است.



بنابراین با استفاده از تعمیم قضیهٔ تالس در دو مثلث **ADC** و **BDC** می‌توان نشان داد **OM = ON** است. حال داریم:

$$\overset{\Delta}{ADC}: MO \parallel DC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{OM}{CD}=\frac{AM}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{OM}{۶}=\frac{AM}{AD} \quad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{DAB}: MO \parallel AB \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{OM}{AB}=\frac{MD}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{OM}{۳}=\frac{MD}{AD} \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{OM}{۳}+\frac{OM}{۶}=\frac{AM}{AD}+\frac{MD}{AD}=\frac{AM+MD}{AD}=۱$$

$$\Rightarrow \frac{۲OM+OM}{۶}=۱ \Rightarrow ۳OM=۶ \Rightarrow OM=۲ \Rightarrow MN=۴$$

(قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن، صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷ کتاب درسی)

۱ ۲ ۳✓ ۴