



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات
و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)



<https://t.me/riazisara>

ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

حسابان ۱، آشنایی بیشتر با تابع

۸۱- در تابع f با دامنه $[-1, 4]$ و بُرد $[2, 6]$ ، هم‌دامنه کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $[2, 4]$
- (۲) $[-1, 4]$
- (۳) $[0, 7]$
- (۴) $[-2, 5]$

۸۲- چند تابع با دامنه $\{-2, 3, 7, 9\}$ و هم‌دامنه $\{1, 2, 0, 11\}$ می‌توان نوشت، به طوری که بُردشان فاقد اعداد زوج باشد؟

- (۱) ۸۱
- (۲) ۶۴
- (۳) ۹
- (۴) ۱۶

حسابان ۱، اعمال روی توابع

۸۳- دو تابع $f(x) = \sqrt{ax}\sqrt{x+2}$ و $g(x) = \sqrt{(a^2-2)x^2+bx}$ با هم برابرند. b کدام است؟

- (۱) ۲
- (۲) -۲
- (۳) ۴
- (۴) -۴

حسابان ۱، انواع توابع

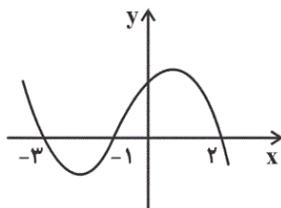
۸۴- اگر $f(x) = \frac{1-x}{x}$ و $g(x) = \sqrt{1-x} - 1$ ، دو تابع f و g یکدیگر را در چند نقطه قطع می‌کنند؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) صفر
- (۴) ۴

حسابان ۱، اعمال روی توابع -

۸۵- اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{-1}{(1-x)f(x)}}$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, -3) \cup (-1, 1)$
- (۲) $(-1, 2)$
- (۳) $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$
- (۴) $(-3, -1) \cup (1, 2)$



۸۶- در کدام یک از روابط زیر، y تابعی بر حسب متغیر مستقل x است؟

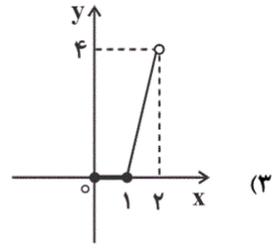
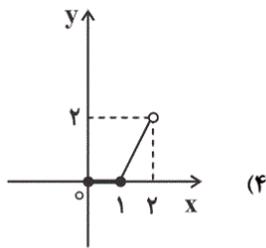
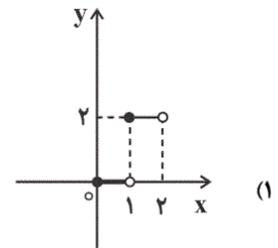
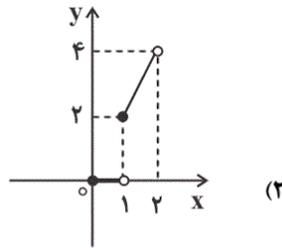
$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2 \quad (2)$$

$$|y-2| + 3 - x = 0 \quad (1)$$

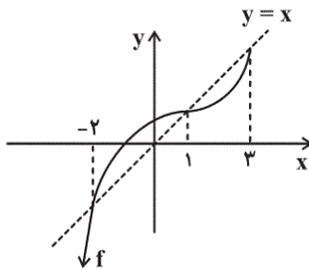
$$y^2 - 2y - 4x = 0 \quad (4)$$

$$y|x^2| = x \quad (3)$$

۸۷- نمودار تابع $f(x) = 2x[x]$ در بازه $[0, 2]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)



۸۸- نمودار تابع f به صورت زیر است. چند عدد صحیح در دامنه تابع $g(x) = \sqrt{f(x) - f^{-1}(x)}$ حضور دارد؟



۵ (1)

۴ (2)

۶ (3)

بی شمار (4)

۸۹- تابع $f(x) = -2x^2 - (2a - 12)x + 3$ در بازه $(-\infty, a]$ وارون پذیر است. مقدار a چند عدد طبیعی می تواند باشد؟

(۴) بی شمار

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

۹۰- اگر $-\frac{1}{2} < x \leq -1$ و $f(x) = 3x - [-2x]$ باشد، $f^{-1}(x)$ کدام است؟

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}, \quad x \in (-1, -\frac{1}{2}] \quad (1)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{3} + 1, \quad x \in (-1, -\frac{1}{2}] \quad (2)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}, \quad x \in (-4, -2/5] \quad (3)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{3} + 1, \quad x \in (-4, -2/5] \quad (4)$$

حسابان ۱، اعمال روی توابع

۹۱- اگر f و g دو تابع خطی و موازی هم باشند و $f(0) = 2$ ، $g(2) = 2$ و $(f + 2g)(3) = 11$ باشد، $(f \cdot g)(x)$ کدام است؟

(۴) $2x^2 - x$

(۳) $2x^2 + x$

(۲) $x^2 + 2x$

(۱) $x^2 - 2x$

۹۲- توابع $f(x) = 2x - 3$ و $g(x) = \sqrt{x - a}$ مفروض هستند، اگر دامنه تابع $(\frac{f}{g^2 - 1})(x)$ به صورت $\{b\} - (+\infty, 2]$ باشد، آن گاه

مقدار $a + b$ کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۵

۹۳- اگر $f(x) = (2x - 3)^2$ و $g(x) = x - 1$ باشند، دو تابع f و fg با کدام طول متقاطع اند؟

(۴) -۲

(۳) -۱

(۲) ۲

(۱) ۱

۹۴- اگر $f = \{(2, -1), (3, 4), (1, 5)\}$ و $g = \{(2, 3), (1, -2), (5, -3)\}$ ، تابع $\frac{f}{g+1}$ کدام است؟

(۲) $\{(2, -\frac{1}{4}), (1, -5), (3, 6)\}$

(۱) $\{(2, -\frac{1}{3}), (1, -\frac{5}{3})\}$

(۴) $\{(2, -\frac{1}{4}), (1, -5)\}$

(۳) $\{(2, -4), (1, -\frac{1}{5})\}$

۹۵- توابع $f = \{(2, 4), (n, 6), (m, 7), (1, 10)\}$ و $g = \{(10, 2), (9, 1), (5, 4), (6, 3)\}$ مفروضند، اگر $(5, 7) \in fog$

و $(5, 3) \in gof$ باشند، آن گاه زوج مرتب (m, n) کدام است؟

(۴) $(6, 5)$

(۳) $(4, 5)$

(۲) $(5, 4)$

(۱) $(4, 6)$

۹۶- اگر $f(x) = 1 - x^2$ و $g = \{(1, 2), (-1, -1), (2, 3)\}$ باشد، آن گاه $g \circ f$ شامل چند زوج مرتب است؟

۱ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۹۷- تابع $f(x) = \frac{x}{2} + 2$ با دامنه $[-4, 2]$ مفروض است. دامنه تابع $g(x) = \frac{(f \circ f^{-1})(x)}{(f^{-1} \circ f)(x)}$ کدام است؟

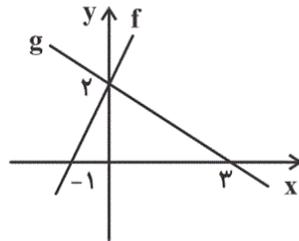
(۴) $(0, 3]$

(۳) $[0, 2]$

(۲) $[0, 2]$

(۱) $(0, 2]$

۹۸- نمودار توابع خطی f و g به شکل مقابل است. بیشترین مقدار تابع $f \cdot g$ کدام است؟



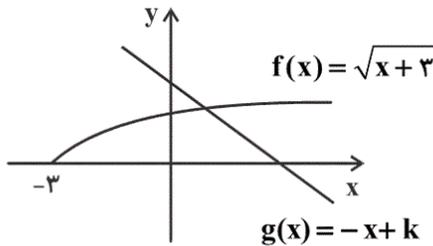
(۱) $\frac{16}{3}$

(۲) $\frac{14}{3}$

(۳) $\frac{16}{9}$

(۴) $\frac{14}{9}$

۹۹- نمودار توابع f و g به صورت مقابل است. اگر $(f \circ g)(-2) = 3$ باشد، مقدار تابع $g \circ (f + g)$ در $x = -k + 2$ کدام است؟



(۱) صفر

(۲) -۲

(۳) -۳

(۴) -۱

حسابان ۱، وارون تابع -

۱۰۰- دامنه تابع f با ضابطه $f(x) = |x-1| - |x-3|$ را به بازه $[a, b]$ محدود کرده ایم؛ به طوری که تابع f در این بازه وارون پذیر باشد.

اگر این بازه بزرگترین بازه ممکن باشد، مقدار $f^{-1}\left(\frac{a+b}{3}\right)$ کدام است؟

(۴) $\frac{4}{3}$

(۳) $\frac{16}{3}$

(۲) $\frac{8}{3}$

(۱) $-\frac{4}{3}$

هندسه ۲، تبدیل های هندسی

۱۰۱- کدام یک از موارد زیر در مورد تبدیل طولیا (ایزومتري) درست است؟

(۱) اندازه زاویه ها و موقعیت شکل را تغییر می دهد.

(۲) اندازه زاویه ها را تغییر می دهد ولی موقعیت شکل را حفظ می کند.

(۳) اندازه زاویه ها را حفظ می کند ولی می تواند موقعیت شکل را تغییر دهد.

(۴) اندازه زاویه ها و موقعیت شکل را لزوماً حفظ می کند.

هندسه ۲، چند ضلعي محاطي و محيطي

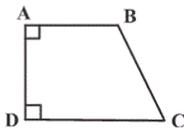
- ۱۰۲- چهارضلعی ABCD دوزنقه متساوی الساقین است. کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟
 (۱) این چهارضلعی محاطی است و می‌تواند محیطی نیز باشد.
 (۲) این چهارضلعی محاطی است ولی قطعاً محیطی نیست.
 (۳) این چهارضلعی محیطی است و می‌تواند محاطی نیز باشد.
 (۴) این چهارضلعی محیطی است ولی قطعاً محاطی نیست.

۱۰۳- دایره‌ای به شعاع R مفروض است. شش ضلعی منتظمی در این دایره محاط شده و شش ضلعی منتظم دیگری بر این دایره محیط است.

حاصل ضرب طول اضلاع این دو شش ضلعی منتظم، چند برابر R^2 است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰۴- در شکل زیر، دوزنقه قائم‌الزاویه ABCD، محیطی است. اگر $AB = 10$ و $AD = 12$ باشد. مساحت این چهارضلعی کدام است؟



- (۱) ۱۴۴
 (۲) ۱۵۰
 (۳) ۱۶۸
 (۴) ۱۸۰

۱۰۵- اگر مساحت دایره محاطی خارجی یک مثلث متساوی‌الاضلاع برابر 36π باشد، مساحت دایره محاطی داخلی این مثلث کدام است؟

- (۱) π (۲) 4π (۳) 9π (۴) 12π

هندسه ۲، تبدیل های هندسي -

۱۰۶- فرض کنید O نقطه ثابتی در صفحه باشد. تبدیل T، نقطه O را ثابت نگه می‌دارد و هر نقطه دیگر مانند A را به نقطه A' (وسط پاره خط OA) تصویر می‌کند. کدام گزینه در مورد این تبدیل درست است؟

- (۱) طولی است و شیب خطها را ثابت نگه می‌دارد.
 (۲) طولی است ولی شیب خطها را ثابت نگه نمی‌دارد.
 (۳) طولی نیست ولی شیب خطها را ثابت نگه می‌دارد.
 (۴) طولی نیست و شیب خطها را ثابت نگه نمی‌دارد.

هندسه ۲، چند ضلعي محاطي و محيطي

۱۰۷- در مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$)، شعاع دایره‌های محاطی خارجی نظیر اضلاع AB و BC به ترتیب ۴ و ۶ است. شعاع دایره محاطی داخلی این مثلث کدام است؟

- (۱) $2/5$ (۲) ۲ (۳) $1/5$ (۴) ۱

۱۰۸- در مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$)، $\hat{A} = 30^\circ$ و $BC = 6$ است. شعاع دایره محیطی این مثلث کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) $3\sqrt{3}$ (۴) ۶

۱۰۹- در مثلثی به اضلاع ۱۰، ۷ و ۵، یکی از دواير محاطی خارجی بر ضلع متوسط و امتداد دو ضلع دیگر مماس است. نقطه تماس، ضلع متوسط را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟

- (۱) $1/2$ (۲) $1/3$ (۳) $1/4$ (۴) $1/6$

۱۱۰- دایره‌ای به شعاع ۴ درون شش ضلعی منتظم ABCDEF محاط است. اضلاع AF، BC و ED را از طرفین امتداد می‌دهیم تا مثلث MNP پدید آید. از نقطه T درون ۶ ضلعی که در فاصله ۱ واحد از ضلع AB قرار دارد، عمودهای TH'، TH'' و TH''' را به ترتیب بر اضلاع BC، ED و AF از شش ضلعی منتظم رسم می‌کنیم. مجموع طول این سه عمود کدام است؟

(۱) $6\sqrt{3}$ (۲) ۱۲ (۳) $12\sqrt{3}$ (۴) ۱۸

آمار و احتمال، مبانی احتمال

۱۱۱- اگر A_1 و A_2 دو پیشامد از فضای نمونه S باشند، آن‌گاه چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

- الف) اگر A_1 زیرمجموعه A_2 باشد، رخ دادن A_1 رخ دادن A_2 را نتیجه می‌دهد.
 ب) رخ دادن پیشامد $A_1 \cap A_2$ ، یعنی هر دو پیشامد A_1 و A_2 رخ دهند.
 پ) رخ دادن پیشامد $A_1 \cup A_2$ ، یعنی دست‌کم یکی از دو پیشامد A_1 و A_2 رخ دهند.

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۱۲- سکه‌ای را دو بار پرتاب می‌کنیم. اگر هر دو بار «رو» یا هر دو بار «پشت» بیاید، یک تاس و در غیر این صورت سکه را دو بار دیگر پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه این آزمایش تصادفی چند عضو دارد؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۲۰ (۴) ۲۴

۱۱۳- در فضای نمونه $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ، ۵۱۲ پیشامد قابل تعریف است. چه تعداد از این پیشامدها ۳ عضوی است؟

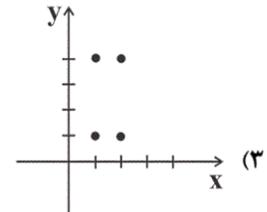
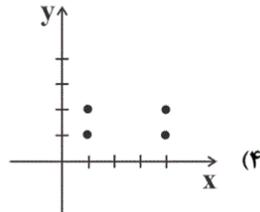
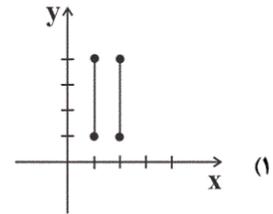
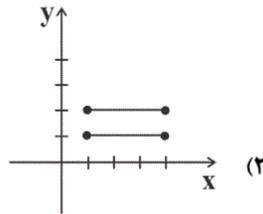
(۱) ۳۵ (۲) ۵۶ (۳) ۸۴ (۴) ۱۲۰

۱۱۴- یک راننده تاکسی خطی (با ظرفیت ۴ نفر مسافر) در ایستگاه منتظر می‌ایستد تا با حداقل دو نفر مسافر حرکت کند. در مسیر برگشت نیز همین روال وجود دارد. احتمال آن‌که این راننده در مسیر رفت خود با ظرفیت کامل حرکت کند و در مسیر برگشت حداقل سه مسافر داشته باشد، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{2}{9}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{3}$

آمار و احتمال، مجموعه - زیر مجموعه -

۱۱۵- اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 - 5x + 4 \leq 0\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2x - 1 < 5\}$ باشد، $A \times B$ کدام است؟



آمار و احتمال ، مبانی احتمال

- ۱۱۶- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. پیشامد آن که مجموع دو تاس عددی مربع کامل باشد، با کدام یک از پیشامدهای زیر ناسازگار است؟
 (۱) هر دو تاس فرد بیایند.
 (۲) عدد رو شده دو تاس مساوی یکدیگر باشد.
 (۳) اختلاف دو عدد رو شده برابر ۳ باشد.
 (۴) حاصل ضرب اعداد رو شده تاس بزرگ‌تر از ۲۰ باشد.

آمار و احتمال ، مجموعه - زیر مجموعه -

- ۱۱۷- اگر $A = [1, 4]$ و $B = [2, 5]$ باشد، مساحت ناحیه محصور به نمودار $(A \times B) \cup (B \times A)$ کدام است؟
 (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶

- ۱۱۸- مجموعه‌های $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، $B = \{2, 4, 6\}$ ، $C = \{1, 3, 5\}$ و $D = \{1, 2, 3\}$ مفروض‌اند، در این صورت مجموعه $(A \times B) \cap (C \times D)$ چند زوج مرتب دارد؟
 (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۹

- ۱۱۹- اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ باشد، در نمودار $A \times B$ ، چند نقطه زیر نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد؟
 (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

آمار و احتمال ، مبانی احتمال

- ۱۲۰- عددی به تصادف از بین اعداد ۱ تا ۵۰ انتخاب می‌شود. احتمال این که عدد انتخابی فقط بر یکی از اعداد ۳ یا ۷ بخش پذیر باشد، چقدر است؟

- (۱) $\frac{38}{50}$ (۲) $\frac{40}{50}$ (۳) $\frac{42}{50}$ (۴) $\frac{44}{50}$

۱۲۱- اگر A و B ، دو مجموعه غیر تهی و $(A \times B) \subseteq (B \times A)$ ، آن گاه $(A \cup B) - (A \cap B)$ برابر کدام است؟

- (۱) \emptyset (۲) A (۳) $A \cap B$ (۴) $A \cup B$

۱۲۲- اگر $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ و $A \cap B = \{2, 3\}$ و مجموعه $(A - B) \times (B - A)$ دارای ۶ عضو باشد، تعداد عضوهای مجموعه B کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۲۳- اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{1, 3, 5\}$ ، آن گاه چند زوج مرتب در مجموعه $A \times B$ می توان یافت که متعلق به مجموعه $B \times A$ نباشند؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷

۱۲۴- اگر $A = \{a, 2\}$ ، $B = \{4, \frac{a}{2} + 1, b\}$ و $A \times B = B \times A$ باشد، حداکثر مقدار $a + b$ برابر کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۱۲۵- «بررسی یک نمونه نامعلوم از یک جامعه معلوم» مربوط به کدام علم است؟

- (۱) فقط علم آمار (۲) فقط علم احتمال
(۳) هم علم آمار و هم علم احتمال (۴) نه علم آمار و نه علم احتمال

۱۲۶- پیشامد « A رخ ندهد یا B رخ ندهد» به کدام صورت زیر نوشته می شود؟

- (۱) $(A \cup B)'$ (۲) $(A - B) \cup (B - A)$
(۳) $(A' \cap B)'$ (۴) $A' \cup B'$

۱۲۷- در پرتاب دو تاس، پیشامد A عبارت است از ظاهر شدن دو عدد با مجموع زوج. رخ دادن کدام پیشامد رخ دادن A را نتیجه می دهد؟

- (۱) لااقل یکی از دو تاس ۳ باشد. (۲) دو تاس عددهای اول آمده باشند.
(۳) عددهای دو تاس برابر باشند. (۴) هر سه مورد درست هستند.

۱۲۸- در جعبه A ، ۴ مهره مختلف و در جعبه B ، ۵ مهره مختلف داریم. تاسی را پرتاب می کنیم. اگر عدد زوج بیاید ۲ مهره را با هم از A و

اگر فرد بیاید، ۳ مهره را با هم از B خارج می کنیم. فضای نمونه این آزمایش چند عضوی است؟

- (۱) ۷۵ (۲) ۱۳۵۰ (۳) ۴۸ (۴) ۱۸۰۰

۱۲۹- A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S هستند. حاصل $1 - P(A \cap B) - P(A \cap B')$ همواره برابر کدام است؟

- (۱) $P(A)$ (۲) $P(B)$ (۳) $P(A')$ (۴) $P(B')$

۱۳۰- از مجموعه $\{1, 2, 3, 4, \dots, 500\}$ عددی به طور تصادفی انتخاب می‌شود. با کدام احتمال این عدد انتخابی، مضرب ۴ می‌باشد و بر ۶

بخش پذیر نیست؟

۰/۱۷۸ (۴)

۰/۱۷۲ (۳)

۰/۱۶۸ (۲)

۰/۱۶۲ (۱)

۸۱- گزینه «۳»

(علی شهرابی)

بُرد یک تابع، همواره زیرمجموعه هم‌دامنه آن است، پس در این جا باید:

$$\text{هم‌دامنه} \subseteq [2, 6]$$

تنها گزینه‌ای که این شرط را دارد، گزینه «۳» است.

(مسئله ۱- صفحه‌های ۳۸ تا ۴۰)

۴

۳

۲

۱

۸۲- گزینه «۱»

(حامد فرضعلی بیگ)

اگر نمودار پیکانی این توابع را در نظر بگیریم، لازم است از هر عضو مجموعه $A = \{-2, 3, 7, 9\}$ یک پیکان به سمت مجموعه $B = \{1, 2, 0, 11\}$ خارج شود. به این منظور، در حالت عادی برای هر عضو A ، پنج انتخاب وجود دارد اما شرایط این سؤال به گونه‌ای است که به عدد ۲ و صفر نباید پیکانی وارد شود. بنابراین برای هر عضو A ، سه انتخاب (۹ یا ۱ یا ۱۱) باقی می‌ماند، در نتیجه $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ تابع می‌توان تحت این شرایط تعریف کرد.

(مسئله ۱- صفحه‌های ۳۸ تا ۴۰)

۴

۳

۲

۱

با فرض تساوی دامنه‌ها داریم:

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{ax^2 + 2ax} \\ g(x) = \sqrt{(a^2 - 2)x^2 + bx} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - 2 = a \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = -1, a = 2 \\ 2a = b \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \Rightarrow b = -2 \\ a = 2 \Rightarrow b = 4 \end{cases} \end{cases}$$

با توجه به این که دو مقدار برای a حاصل شد باید بررسی کنیم کدام یک قابل قبول است. (تساوی دامنه‌ها را بررسی می‌کنیم):

$$a = 2: \begin{cases} f(x) = \sqrt{2x}\sqrt{x+2} \Rightarrow D_f : x \geq 0 \\ g(x) = \sqrt{2x^2 + 4x} \Rightarrow D_g : x \leq -2 \text{ یا } x \geq 0 \end{cases}$$

دامنه دو تابع برابر نیست. پس دو تابع مساوی نیستند. بنابراین $a = -1$ و $b = -2$ قابل قبول است. (بررسی کنید).

(مسئله ۱- صفحه‌های ۴۱، ۴۲، ۴۶ تا ۴۸ و ۶۳ تا ۶۶)

۴

۳

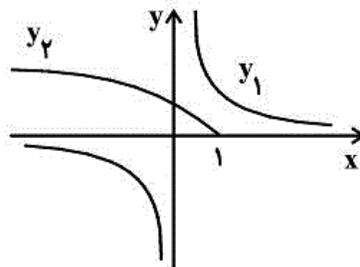
۲

۱

ضابطه‌های دو تابع را مساوی قرار می‌دهیم:

$$\frac{1-x}{x} = \sqrt{1-x} - 1 \Rightarrow \frac{1}{x} - 1 = \sqrt{1-x} - 1 \Rightarrow \frac{1}{x} = \sqrt{1-x}$$

با رسم توابع $y_1 = \frac{1}{x}$ و $y_2 = \sqrt{1-x}$ مشاهده می‌شود که هیچ نقطه برخوردی ندارند.



(مسئله ۱- صفحه‌های ۴۴ تا ۴۸)

۴

۳

۲

۱

(امیر مردیان)

$$\geq 0 \Rightarrow \frac{-1}{(1-x)f(x)} \geq 0$$

(چون صورت کسر منفی است باید مخرج هم منفی باشد)

$$\Rightarrow (1-x)f(x) < 0$$

	$-\infty$	-3	-1	1	2					
$1-x$		+	+	+	0	-	-			
$f(x)$		+	0	-	0	+	0	-		
		+	0	-	0	+	0	-	0	+

$$D_y = (-3, -1) \cup (1, 2)$$

(مسابان ۱- صفحه‌های ۴۴ تا ۴۸ و ۶۳ تا ۶۶)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} = -2 \xrightarrow{xy \neq 0} x^2 + y^2 = -2xy$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 0 \Rightarrow (x + y)^2 = 0 \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow y = -x$$

به ازای هر x عضو دامنه، فقط و فقط یک مقدار برای y داریم و این

یعنی y تابعی بر حسب متغیر x است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

$$|y - 2| = x - 3 \quad \text{گزینه «۱»}$$

به ازای $x = 4$ داریم:

$$|y - 2| = 4 - 3 \Rightarrow |y - 2| = 1 \Rightarrow y - 2 = \pm 1$$

$$\Rightarrow y = 3, y = 1$$

چون دو مقدار برای y به دست می‌آید، پس این رابطه تابع نیست.

گزینه «۳»:

به ازای $x = 0$ ، بی‌شمار مقدار برای y وجود دارد. بنابراین این رابطه

تابع نیست.

$$y^2 - 2y = 4x \quad \text{گزینه «۴»}$$

به ازای یک x دلخواه، مثلاً $x = 0$ داریم:

$$y^2 - 2y = 0 \Rightarrow y(y - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

چون به ازای یک x دلخواه برای y دو مقدار به دست می‌آید، پس این

رابطه هم تابع نیست.

(مسئله ۱- صفحه‌های ۴۸ و ۴۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

۸۷- گزینه «۲»

(سعید عزیززی)

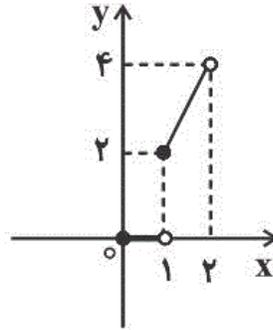
به دلیل وجود $[x]$ در ضابطه تابع $f(x)$ ، باید بازه داده شده را به دو

بازه $0 \leq x < 1$ و $1 \leq x < 2$ تقسیم کنیم، داریم:

$$\text{اگر } 0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$\text{اگر } 1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = 2x$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر می‌باشد.



(مسئله ۱- صفحه‌های ۴۹ تا ۵۳)

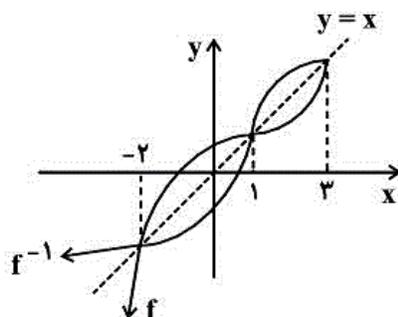
۴

۳

۲

۱

نمودار تابع f را نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم تا نمودار $f^{-1}(x)$ به دست آید.



برای تعیین دامنه تابع $g(x) = \sqrt{f(x) - f^{-1}(x)}$ ، باید نامعادله زیر را حل کنیم.

$$f(x) - f^{-1}(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f^{-1}(x)$$

$$\Rightarrow x \in [-2, 1] \cup \{3\}$$

بنابراین اعداد صحیح ۳، ۱، ۰، -۱ و -۲ در دامنه تابع حضور دارند.

(مسئله ۱- صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸ و ۵۴ تا ۵۶)

۴

۳

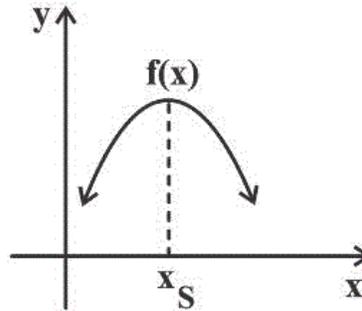
۲

۱ ✓

۸۹- گزینه «۳»

(سین سعیدی)

تابع f سهمی است و مطابق شکل در بازه $(-\infty, x_S]$ یک به یک و وارون پذیر است. حال برای این که در بازه $(-\infty, a]$ وارون پذیر باشد، باید مقدار a از طول رأس سهمی بیشتر نباشد.



$$x_S = \frac{2a - 12}{-4} \geq a \Rightarrow 2a - 12 \leq -4a \Rightarrow 6a \leq 12 \Rightarrow a \leq 2$$

فقط دو مقدار طبیعی ۱ و ۲ برای a قابل قبول است.

(مسایان ۱- صفحه های ۵۵ تا ۶۲)

۴

۳

۲

۱

۹۰- گزینه «۳»

(عباس طاهر فانی)

$$-1 < x \leq -\frac{1}{2} \times (-2) \rightarrow 1 \leq -2x < 2 \Rightarrow [-2x] = 1$$

$$y = 3x - 1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$$

$$-1 < x \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow -4 < 3x - 1 \leq -2/5$$

$$\Rightarrow D_{f^{-1}} = (-4, -2/5]$$

(مسایان ۱- صفحه های ۴۹ تا ۶۲)

۴

۳

۲

۱

شیب دو خط موازی با هم برابر است، پس:

$$\begin{cases} f(x) = ax + b \\ g(x) = ax + b' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 2 \Rightarrow 0 + b = 2 \Rightarrow b = 2 \\ g(2) = 2 \Rightarrow 2a + b' = 2 \end{cases} \quad (\text{I})$$

$$(f + 2g)(3) = 11 \Rightarrow f(3) + 2g(3) = 11$$

$$\Rightarrow (3a + 2) + 2(3a + b') = 11 \Rightarrow 9a + 2b' = 9 \quad (\text{II})$$

$$(\text{I}), (\text{II}) \Rightarrow \begin{cases} 2a + b' = 2 \\ 9a + 2b' = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = x + 2 \\ g(x) = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f \cdot g)(x) = x^2 + 2x$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

۴

۳

۲

۱

۹۲- گزینه «۱»

(پدram نیکوکار)

دامنه تابع $(\frac{f}{g^2-1})(x)$ برابر اشتراک دامنه‌های توابع f و g است

به طوری که مخرج کسر یعنی $g^2 - 1$ صفر نشود. بنابراین:

$$D_f = \mathbb{R}, \quad D_g = [a, +\infty) \Rightarrow D_f \cap D_g = [a, +\infty)$$

با توجه به دامنه داده شده مقدار a باید برابر ۲ باشد.

$$\Rightarrow g(x) = \sqrt{x-2}$$

$$g^2(x) - 1 = 0 \Rightarrow x - 2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$\Rightarrow D_{\frac{f}{g^2-1}} = [2, +\infty) - \{3\}$$

در نتیجه $b = 3$ است.

$$\Rightarrow a + b = 2 + 3 = 5$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۴۴ تا ۴۸ و ۶۳ تا ۶۶)

۴

۳

۲

۱

۹۳- گزینه «۲»

(لادن باقری)

$$f(x) = (f \circ g)(x) \Rightarrow (2x - 3)^2 = (2(x-1) - 3)^2$$

$$\Rightarrow (2x - 3)^2 = (2x - 5)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 3 = -2x + 5 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2 \\ 2x - 3 = 2x - 5 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

(مسابان ۱- صفحه‌های ۶۶ تا ۷۰)

۴

۳

۲

۱

۹۴- گزینه «۴»

(اکبر کلاه‌ملکی)

$$\begin{cases} f = \{(2, -1), (3, 4), (1, 5)\} \\ g+1 = \{(2, 4), (1, -1), (5, -2)\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{f}{g+1} = \left\{ \left(2, -\frac{1}{4}\right), \left(1, \frac{5}{-1}\right) \right\} = \left\{ \left(2, -\frac{1}{4}\right), (1, -5) \right\}$$

(مسابان ۱- صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

۴

۳

۲

۱

۹۵- گزینه «۳»

(سعید عزیزی)

برای آن که $f \circ g \in (5, 7)$ باید $f(g(5)) = 7$ باشد، با توجه به این که $g(5) = 4$ می‌باشد، پس باید $f(4) = 7$ باشد و این یعنی باید $m = 4$ باشد. همچنین برای آن که $g \circ f \in (5, 3)$ باید $g(f(5)) = 3$ باشد، با توجه به این که در تابع g ، فقط مقدار $g(6)$ برابر با ۳ است، پس $f(5)$ باید مساوی ۶ باشد و چون $f(n) = 6$ است، باید $n = 5$ باشد، پس زوج مرتب (m, n) برابر $(4, 5)$ می‌باشد.

(مسابان ۱- صفحه‌های ۶۶ تا ۷۰)

۴

۳

۲

۱

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad f(x) = 1 - x^2$$

$$\begin{cases} f(x) = 1 \Rightarrow 1 - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ f(x) = -1 \Rightarrow 1 - x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ f(x) = 2 \Rightarrow 1 - x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = -1 \quad \times \end{cases}$$

$$\text{gof} = \{(0, 2), (\sqrt{2}, -1), (-\sqrt{2}, -1)\}$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۶۶ تا ۷۰)

۴

۳

۲

۱

می‌دانیم:

$$\begin{cases} (f \circ f^{-1})(x) = x & ; \quad D_{f \circ f^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f \\ (f^{-1} \circ f)(x) = x & ; \quad D_{f^{-1} \circ f} = D_f \end{cases}$$

دامنه تابع خطی f بازه $[-4, 2]$ است پس با جایگذاری ابتدا و انتهای بازه، برد آن را می‌یابیم.

$$\left. \begin{matrix} f(-4) = 0 \\ f(2) = 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow R_f = [0, 3]$$

حال دامنه‌های $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ را می‌نویسیم.

$$D_{f \circ f^{-1}} = R_f = [0, 3]$$

$$D_{f^{-1} \circ f} = D_f = [-4, 2]$$

دامنه تابع $g(x)$ ، اشتراک دامنه‌های $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ است به جز نقاطی که مخرج صفر شود.

$$(f^{-1} \circ f)(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$

$$D_g = (0, 2]$$

در نتیجه:

(مسئله ۱- صفحه‌های ۵۳ تا ۶۲ و ۶۶ تا ۷۰)

۴

۳

۲

۱

۹۸- گزینه «۱»

(اکبر کلاه‌ملکی)

ابتدا معادله توابع خطی f و g را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} (0, 2), (-1, 0) \in f \Rightarrow f(x) = 2x + 2 \\ (0, 2), (3, 0) \in g \Rightarrow g(x) = -\frac{2}{3}x + 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f \cdot g = (2x + 2)\left(-\frac{2}{3}x + 2\right) = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 4$$

تابع $f \cdot g$ یک تابع درجه دوم است که بیشترین مقدار آن برابر است با:

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{\left(\frac{8}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{4}{3}\right)(4)}{4\left(-\frac{4}{3}\right)} = -\frac{\frac{64}{3} + 64}{-16} = \frac{\frac{256}{3}}{16} = \frac{16}{3}$$

(مسئله‌ها ۶۳ تا ۶۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

۹۹- گزینه «۳»

(سعید اکبرزاده)

با توجه به این که $(f \circ g)(-2) = 3$ ، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} f(g(-2)) = 3 \\ g(-2) = 2 + k \end{array} \right\} \Rightarrow f(k + 2) = 3 \Rightarrow \sqrt{k + 2 + 3} = 3$$

$$\Rightarrow k + 5 = 9 \Rightarrow k = 4 \Rightarrow g(x) = -x + 4$$

مقدار تابع $g \circ (f + g)$ در $x = -4 + 2 = -2$ برابر است با:

$$(f + g)(-2) = f(-2) + g(-2) = \sqrt{-2 + 3 + 2 + 4} = 7$$

$$(g \circ (f + g))(-2) = g(7) = -7 + 4 = -3$$

(مسئله‌ها ۴۶ تا ۴۸ و ۶۳ تا ۷۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

۱۰۰- گزینه «۲»

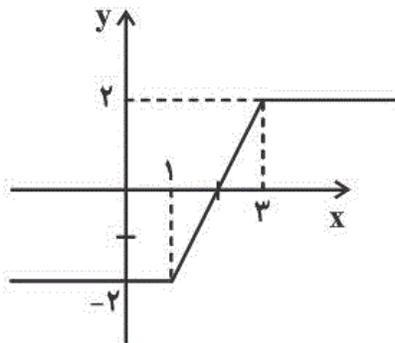
(سیدوید سیران)

ابتدا تابع f را به وسیله بازه‌بندی دامنه به یک تابع سه ضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم.

$$f(x) = |x-1| - |x-3| = \begin{cases} x-1-x+3 & x \geq 3 \\ x-1+x-3 & 1 < x < 3 \\ -x+1+x-3 & x \leq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \geq 3 \\ 2x-4 & 1 < x < 3 \\ -2 & x \leq 1 \end{cases}$$

تابع f را رسم می‌کنیم:



از روی شکل پیداست که بزرگ‌ترین بازه‌ای که در آن f یک‌به‌یک است بازه $[1, 3]$ است که ضابطه f در این بازه $y = 2x - 4$ است.

$$y = 2x - 4 \Rightarrow 2x = y + 4 \Rightarrow x = \frac{y+4}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+4}{2} \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{a+b}{3}\right) = f^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\frac{4}{3}+4}{2} = \frac{8}{3}$$

(مسئله‌ها ۵۴ تا ۶۲)

۴

۳

۲

۱

۱۰۱- گزینه «۳»

(امیرحسین ابومصوب)

یک تبدیل طولیا (ایزومتري)، طول پاره‌خطها و اندازه زاویه‌ها را حفظ می‌کند ولی می‌تواند موقعیت شکل را تغییر دهد. این موضوع را به‌طور شهودی می‌توان برای تبدیلاتی مانند بازتاب، انتقال و دوران مشاهده کرد.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۳۶ و ۳۷)

۴

۳

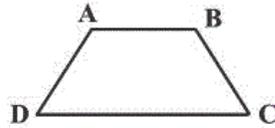
۲

۱

۱۰۲- گزینه ۱»

(شایان عبایی)

در دوزنقه متساوی الساقین، زوایای مجاور به هر قاعده برابر یکدیگرند، یعنی $\hat{A} = \hat{B}$ و $\hat{C} = \hat{D}$ است.



بنابراین داریم:

$$AB \parallel DC, \text{ مورب } AD \Rightarrow \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$$

$$\xrightarrow{\hat{C}=\hat{D}} \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

یعنی زوایای روبه‌رو در این چهارضلعی مکمل یکدیگرند، پس این چهارضلعی محاطی است. در دوزنقه متساوی الساقین ABCD، دو ساق AD و BC برابر یکدیگرند. حال اگر طول ساق، میانگین حسابی طول‌های دو قاعده باشد، آن‌گاه داریم:

$$AD = \frac{AB + CD}{2} \Rightarrow AB + CD = 2AD$$

$$\Rightarrow AB + CD = AD + BC$$

یعنی دوزنقه متساوی الساقین می‌تواند چهارضلعی محیطی نیز باشد.

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۷ تا ۲۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

۱۰۳- گزینه ۲»

(مهم‌ترین ششمت‌الواعظین)

فرض کنید a و b به ترتیب طول اضلاع شش ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی این دایره باشند. در این صورت داریم:

$$a = 2R \sin \frac{180^\circ}{n} \xrightarrow{n=6} a = 2R \times \frac{1}{2} = R \quad (1)$$

$$b = 2R \tan \frac{180^\circ}{n} \xrightarrow{n=6} b = 2R \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} R \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow ab = R \times \frac{2\sqrt{3}}{3} R = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} R^2$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۹ و ۳۰)

۴

۳

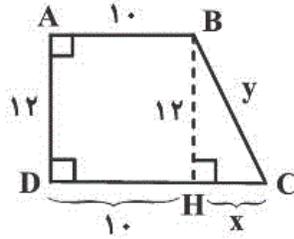
۲ ✓

۱

۱۰۴- گزینه «۲»

(امیرحسین ابومحبوب)

مطابق شکل فرض کنید از رأس B، عمود BH را بر قاعده DC رسم کنیم. در این صورت $AB = DH = 10$ است. چون چهارضلعی ABCD محیطی است، پس داریم:



$$AD + BC = AB + CD \Rightarrow 12 + y = 10 + (10 + x) \Rightarrow y = x + 8$$

$$\Delta BHC : BC^2 = BH^2 + CH^2 \Rightarrow y^2 = 12^2 + x^2$$

$$\Rightarrow (x + 8)^2 = 144 + x^2 \Rightarrow x^2 + 16x + 64 = 144 + x^2$$

$$\Rightarrow 16x = 80 \Rightarrow x = 5$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AD(AB + CD) = \frac{1}{2} \times 12(10 + 15) = 150$$

(هنر سه ۲- رایره- صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

۱۰۵- گزینه «۲»

(شایان عباپی)

فرض کنید a طول ضلع و r و r_a به ترتیب شعاع‌های دایره‌های محاطی داخلی و خارجی این مثلث باشند. اگر مساحت و نصف محیط این مثلث را با S و P نمایش دهیم، آن‌گاه داریم:

$$\pi r_a^2 = 36\pi \Rightarrow r_a = 6$$

$$P = \frac{3a}{2} \Rightarrow a = \frac{2P}{3}$$

$$r_a = \frac{S}{P - a} \Rightarrow 6 = \frac{S}{P - \frac{2P}{3}} = \frac{S}{\frac{P}{3}} \Rightarrow \frac{S}{P} = 2 \Rightarrow r = 2$$

بنابراین مساحت دایره محاطی داخلی مثلث، برابر $\pi(2)^2 = 4\pi$ است.

(هنر سه ۲- رایره- صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۴

۳

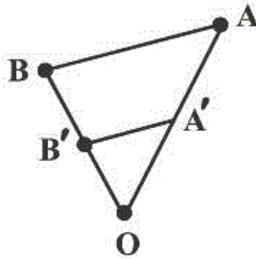
۲ ✓

۱

۱۰۶- گزینه «۳»

(مهم فندان)

مطابق شکل فرض کنید نقاط A' و B' به ترتیب تصویر نقاط A و B در این تبدیل باشند. در این صورت طبق عکس قضیه تالس داریم:



$$\frac{OA'}{A'A} = \frac{OB'}{B'B} = 1 \Rightarrow A'B' \parallel AB$$

یعنی این تبدیل، شیب خطها را ثابت نگه می‌دارد. از طرفی طبق تعمیم

قضیه تالس، $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = \frac{1}{2}$ است، یعنی طول

پاره‌خطهای AB و $A'B'$ برابر نیست، پس این تبدیل طولها نیست.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۳۶ و ۳۷)

۴

۳✓

۲

۱

۱۰۷- گزینه «۳»

(امیرحسین ابومحبوب)

طبق فرض $r_a = 6$ و $r_c = 4$ است. چون مثلث ABC متساوی‌الساقین

و $b = c$ می‌باشد، پس $r_b = r_c = 4$ است و در نتیجه داریم:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{2+3+3}{12} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{8}{12} = \frac{1}{r} \Rightarrow r = \frac{12}{8} = 1.5$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۵، ۲۶ و ۲۹)

۴

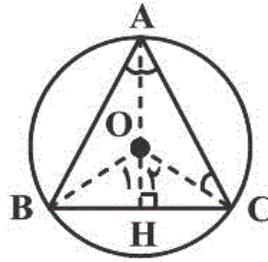
۳✓

۲

۱

(میثم بهرامی بویا)

مرکز دایره محیطی مثلث، محل برخورد عمودمنصف‌های مثلث است. بنابراین نقطه O روی عمودمنصف ضلع BC قرار دارد. مطابق شکل داریم:



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} \text{ (زاویه محاطی)} \\ \hat{B}OC = \widehat{BC} \text{ (زاویه مرکزی)} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B}OC = 2\hat{A} = 6^\circ$$

دو مثلث OHC و OHB هم‌نهشت هستند، پس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = 3^\circ$. از

طرفی OH عمودمنصف BC است، پس $BH = \frac{BC}{2} = 3$. در مثلث

قائم‌الزاویه OHB، اندازه ضلع روبه‌رو به زاویه 3° ، نصف اندازه وتر است، پس داریم:

$$\hat{O}_1 = 3^\circ \Rightarrow BH = \frac{1}{2}OB \Rightarrow 3 = \frac{1}{2}R \Rightarrow R = 6$$

(هندسه ۲ - دایره - صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

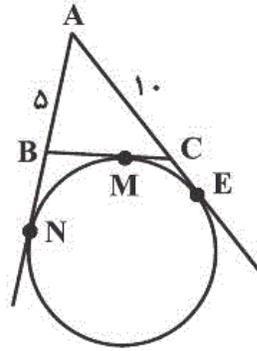
۴ ✓

۳

۲

۱

در شکل مقابل، طول مماس AN برابر نصف محیط مثلث (P) است.



$$AN = P = \frac{5 + 7 + 10}{2} = 11 \Rightarrow AB + BN = 11$$

$$\xrightarrow{AB=5} BN = 6$$

طول مماس‌های رسم شده از یک نقطه واقع در خارج دایره بر آن دایره، برابر یکدیگرند، بنابراین داریم:

$$BM = BN = 6 \Rightarrow CM = BC - BM = 7 - 6 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{CM}{BM} = \frac{1}{6}$$

(هنر سه ۲- دایره - مشابه تمرین ۶ صفحه ۳۰)

۴ ✓

۳

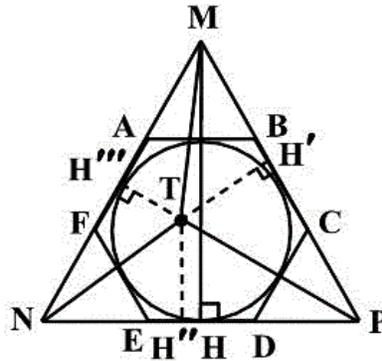
۲

۱

اندازه ضلع یک n ضلعی منتظم که بر دایره‌ای به شعاع r محیط شده

است، از رابطه $AB = 2r \tan \frac{18^\circ}{n}$ به دست می‌آید. حال

عمودهای TH' ، TH'' و TH''' را رسم می‌کنیم. از طرفی از نقطه T به رئوس M ، N و P وصل می‌کنیم، می‌توان نوشت:



$$S_{MTN} + S_{NTP} + S_{MTP} = S_{MNP} \quad (1)$$

می‌دانیم مثلث MNP متساوی‌الاضلاع می‌باشد، بنابراین داریم:

$$MN = MP = NP$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{رابطه (1)}} & \frac{TH''' \times MN}{2} + \frac{TH'' \times NP}{2} + \frac{TH' \times MP}{2} \\ & = \frac{NP \times MH}{2} \Rightarrow MH = TH' + TH'' + TH''' \end{aligned}$$

حال باید اندازه ارتفاع MH را به دست آوریم:

$$MH = \frac{\sqrt{3}}{2} MN \xrightarrow{\substack{MN=2AF \\ AF=AB}}$$

$$MH = \frac{\sqrt{3}}{2} [3(2r \tan \frac{18^\circ}{n})] = 3\sqrt{3} \times 4 \times \tan 3^\circ$$

$$= 3\sqrt{3} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 12$$

(هندسه ۲- دایره- مشابه تمرین ۸ صفحه ۳۰)

۱۱۱- گزینه «۴»

(امیرحسین ابومحبوب)

با توجه به مفهوم رخ دادن یک پیشامد، هر سه گزاره «الف»، «ب» و «پ» درست هستند.

(آمار و احتمال - احتمال - مشابه کار در کلاس صفحه ۴۳)

۴

۳

۲

۱

۱۱۲- گزینه «۳»

(سیدمسن فاطمی)

تعداد اعضای فضای نمونه این آزمایش برابر است با:

$$n(S) = \left[\binom{2}{2} + \binom{2}{2} \right] \times 6 + \binom{2}{1} \times 2^2$$

↓ دو بار رو ↓ دو بار پشت ↓ پرتاب تاس ↓ یک بار رو ↓ پرتاب دو سکه

$$= (1+1) \times 6 + 2 \times 4 = 20$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۲ تا ۴۴)

۴

۳

۲

۱

۱۱۳- گزینه «۳»

(امیرهوشنگ فمسه)

تعداد کل پیشامدها در یک فضای نمونه n عضوی، برابر 2^n است. پس داریم:

$$2^n = 512 = 2^9 \Rightarrow n = 9$$

تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعه n عضوی، برابر $\binom{n}{r}$

است. بنابراین داریم:

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!6!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3} = 84$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۲ تا ۴۴)

۴

۳

۲

۱

۱۱۴- گزینه «۲»

(افشین قاصدقانی)

اگر مسیر رفت و برگشت را با مجموعه $A = \{2, 3, 4\}$ نشان دهیم تعداد اعضای فضای نمونه برابر تعداد اعضای مجموعه $A \times A$ یعنی ۹ خواهد بود و پیشامد مطلوب دارای ۲ عضو است.

$$B = \{(4, 2), (4, 4)\}$$

بنابراین احتمال این پیشامد برابر $\frac{2}{9}$ خواهد بود.

(آمار و احتمال - احتمال - مشابه مثال صفحه ۴۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

۱۱۵- گزینه «۲»

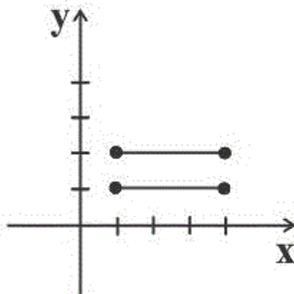
(نورا صالح پور)

$$x^2 - 5x + 4 \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x-4) \leq 0$$

$$\Rightarrow 1 \leq x \leq 4 \Rightarrow A = [1, 4]$$

$$2x - 1 < 5 \Rightarrow 2x < 6 \Rightarrow x < 3 \Rightarrow B = \{1, 2\}$$

پس نمودار $A \times B$ به صورت زیر خواهد شد:



(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات - صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

پیشامد آن که مجموع دو تاس عددی مربع کامل باشد، شامل حالت‌هایی است که مجموع دو تاس برابر ۴ یا ۹ باشد، اگر این پیشامد را A بنامیم، آن‌گاه داریم:

$$A = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$$

پیشامد گزینه «۱»: شامل $(1, 3)$ و $(3, 1)$ است، پس با پیشامد A ناسازگار نیست.

پیشامد گزینه «۲»: شامل $(2, 2)$ است، پس با پیشامد A ناسازگار نیست.

پیشامد گزینه «۳»: شامل $(3, 6)$ و $(6, 3)$ است، پس با پیشامد A ناسازگار نیست.

پیشامد گزینه «۴»: به صورت

$\{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$ است که اشتراک آن با پیشامد A تهی بوده و در نتیجه با A ناسازگار است.

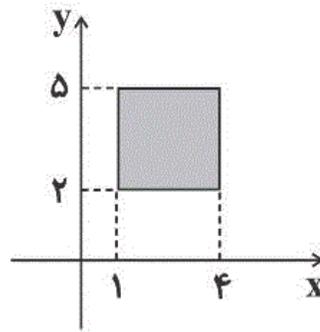
(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۵ و ۴۶)

 ۴

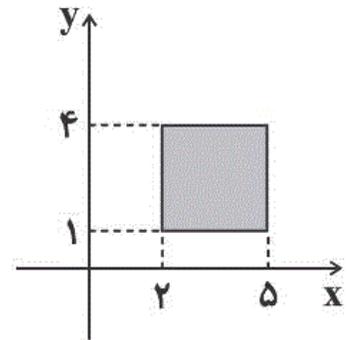
 ۳

 ۲

 ۱

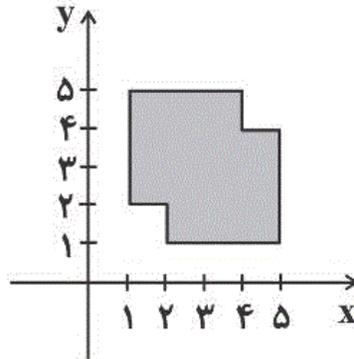


$A \times B$



$B \times A$

مطابق شکل، نمودار $(A \times B) \cup (B \times A)$ ، یک مربع به ضلع ۴ است که دو مربع به ضلع ۱ از دو گوشه آن حذف شده است. مساحت ناحیه محصور به این نمودار برابر است با:



$$S = 4 \times 4 - 2(1 \times 1) = 14$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات - صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۴

۳

۲

۱

(مر تفسی فویم علوی)

$$(x, y) \in (A \times B) \Rightarrow x \in A, y \in B \quad (1)$$

$$(x, y) \in (C \times D) \Rightarrow x \in C, y \in D \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} x \in A, x \in C \Rightarrow x \in A \cap C \\ y \in B, y \in D \Rightarrow y \in B \cap D \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

$$A \cap C = \{1, 3, 5\} \quad B \cap D = \{2\}$$

$$n((A \times B) \cap (C \times D)) = n((A \cap C) \times (B \cap D))$$

$$= n(A \cap C) \times n(B \cap D) = 3 \times 1 = 3$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات - صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

(امیر هوشنگ فمسه)

نیمساز ربع اول و سوم، خط $y = x$ است. نقطه‌ای با مختصات (x, y) زیر خط $y = x$ قرار دارد، هرگاه $x > y$ باشد. بنابراین نقاطی در نمودار $A \times B$ ، زیر نیمساز ربع اول و سوم واقع‌اند که مؤلفه اول آن‌ها $(x \in A)$ ، بزرگ‌تر از مؤلفه دوم آن‌ها $(y \in B)$ باشد.

$$x = 1 \Rightarrow y = -1, 0 \Rightarrow \text{نقطه ۲}$$

$$x = 2 \Rightarrow y = -1, 0, 1 \Rightarrow \text{نقطه ۳}$$

$$x = 3 \Rightarrow y = -1, 0, 1, 2 \Rightarrow \text{نقطه ۴}$$

$$x = 4 \Rightarrow y = -1, 0, 1, 2, 3 \Rightarrow \text{نقطه ۵}$$

بنابراین در مجموع، ۱۴ نقطه در نمودار $A \times B$ ، زیر نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات - صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۴ ✓

۳

۲

۱

۱۲۰- گزینه «۱»

(نرد صالح پور)

فرض کنید A و B زیرمجموعه‌هایی از فضای نمونه $S = \{1, 2, 3, \dots, 50\}$ باشند که اعضای آن‌ها به ترتیب بر ۳ و ۷ بخش پذیر هستند. احتمال خواسته شده در مسئله، معادل $P(A \cup B) - P(A \cap B)$ است. حال داریم:

$$P(A) = \frac{\binom{50}{3}}{\binom{50}{1}} = \frac{16}{50} \quad \text{و} \quad P(B) = \frac{\binom{50}{7}}{\binom{50}{1}} = \frac{7}{50}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{50}{21}}{\binom{50}{1}} = \frac{2}{50}$$

$$P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

$$= \frac{16}{50} + \frac{7}{50} - 2 \times \frac{2}{50} = \frac{19}{50} = 0.38$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

۱۲۱- گزینه «۱»

(کتاب آبی)

$$(A \times B) \subseteq (B \times A) \Rightarrow \begin{cases} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{cases} \Rightarrow A = B$$

$$(A \cup B) - (A \cap B) = A - A = \emptyset$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات - صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

۱۲۲- گزینه «۲»

(کتاب آبی)

$$A - B = A - (A \cap B) = \{4, 5, 6\}$$

$$|(A - B) \times (B - A)| = 6 \Rightarrow |A - B| \times |B - A| = 6$$

$$\Rightarrow |B - A| = 2$$

$$|B - A| = |B| - |A \cap B| \Rightarrow 2 = |B| - 2 \Rightarrow |B| = 4$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات - صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

۱۲۳- گزینه «۳»

(کتاب آبی)

طبق تعریف ضرب دکارتی دو مجموعه A و B داریم:

$$A \times B = \left\{ (1,1), (1,3), (1,5), (2,1), (2,3), (2,5), (3,1), (3,3), (3,5) \right\}$$

واضح است که طبق تعریف ضرب دکارتی دو مجموعه، زوج مرتب‌های $(1,1)$ ، $(1,3)$ ، $(3,1)$ و $(3,3)$ در مجموعه $B \times A$ نیز وجود دارند. پس ۵ زوج مرتب در $A \times B$ می‌توان یافت که به $B \times A$ تعلق نداشته باشند.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات - صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۴

۳

۲

۱

۱۲۴- گزینه «۴»

(کتاب آبی)

$$A \neq \emptyset, B \neq \emptyset \xrightarrow{A \times B = B \times A} A = B \Rightarrow \left\{ 4, \frac{a}{2} + 1, b \right\} = \{a, 3\}$$

$$\Rightarrow a = 4 \Rightarrow \frac{a}{2} + 1 = 3 \Rightarrow \{4, 3, b\} = \{4, 3\}$$

پس b می‌تواند ۳ یا ۴ باشد که به ازای مقدار $b = 4$ ، حداکثر مقدار $a + b$ یعنی $a + b = 4 + 4 = 8$ حاصل می‌شود.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات - صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۴

۳

۲

۱

۱۲۵- گزینه «۲»

(کتاب آبی)

با توجه به تعریف کتاب درسی از علم احتمال، اگر جامعه معلوم باشد و به دنبال نمونه‌ای نامعلوم از این جامعه باشیم، موضوع مربوط به علم احتمال است.

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

۴

۳

۲

۱

۱۲۶- گزینه «۴»

(کتاب آبی)

می‌دانیم که پیشامد «A رخ ندهد» همان A' است. بنابراین:

$$A' \cup B' \rightarrow (A \text{ رخ ندهد}) \text{ یا } (B \text{ رخ ندهد})$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

۴

۳

۲

۱

۱۲۷- گزینه «۳»

(کتاب آبی)

اگر $B \subseteq A$ باشد، آن گاه با رخ دادن B نتیجه می‌گیریم که A نیز رخ داده است. اگر عددهای دو تاس برابر باشند، بدون شک مجموع‌شان زوج است و در نتیجه A رخ داده است. (گزینه «۳») اما در گزینه‌های «۱» و «۲»، در صورتی که اعداد ۲ و ۳ رو شوند مجموع زوج نخواهد بود.

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

۴

۳

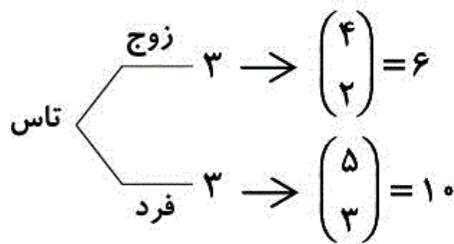
۲

۱

۱۲۸- گزینه «۳»

(کتاب آبی)

تاس در ۳ حالت عدد زوج و در ۳ حالت عدد فرد می‌آید:



$$n(S) = 3 \times 6 + 3 \times 10 = 48 \text{ بنابراین:}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۲ تا ۴۴)

۴

۳

۲

۱

$$1 - P(A \cap B) - P(A \cap B') = 1 - [P(A \cap B) + P(A \cap B')]$$

با توجه به این که دو مجموعه $A \cap B$ و $A \cap B'$ دارای اشتراک
تهی اند، می توان حاصل را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} 1 - P((A \cap B) \cup (A \cap B')) \\ = 1 - P(A \cap (B \cup B')) = 1 - P(A) = P(A') \end{aligned}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه های ۴۴ تا ۴۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر پیشامد مضر ۴ بودن را با A و پیشامد مضر ۶ بودن را با B
نمایش دهیم، $P(A \cap B')$ خواسته شده است. داریم:

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

عددی که هم مضر ۴ و هم مضر ۶ باشد، مضر ۱۲ است. بنابراین
باید تعداد مضرهای ۴ را به دست آورده و تعداد مضرهای ۱۲ را از
آن کم کنیم:

$$P(A - B) = \frac{\left[\frac{500}{4} \right] - \left[\frac{500}{12} \right]}{500} = \frac{125 - 41}{500} = \frac{84}{500} = 0.168$$

(آمار و احتمال - احتمال - مشابه تمرین ۵ صفحه ۴۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱