



**RIAZISARA**

[www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir) **سایت ویژه ریاضیات**

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی  
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور  
نمونه سوالات امتحانات ریاضی  
نرم افزارهای ریاضیات**

و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)



<https://t.me/riazisara>

ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

۶۱- اگر  $x^2 - 3x + 2 < 0$  باشد، حاصل عبارت  $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$  همواره کدام است؟

(۱)  $3x - 1$  (۲)  $-x$  (۳)  $x + 3$  (۴)  $2x - 1$

۶۲- مجموع ریشه‌های معادله  $3|x - 2| + |x - 1| = 4$  کدام است؟

(۱) ۴ (۲)  $-\frac{7}{2}$  (۳)  $\frac{7}{2}$  (۴)  $-4$

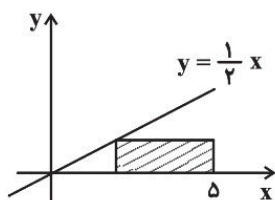
۶۳- اگر نامعادله  $|x^3 - 1| < x^2 + x + 1$  برقرار باشد، آن‌گاه حاصل  $|x + 3| + |x - 2|$  همواره کدام است؟

(۱) ۵ (۲)  $2x + 1$  (۳)  $-5$  (۴)  $-2x + 1$

۶۴- مجموعه طول تمام نقاطی که در آن‌ها نمودار توابع  $y = 3$  و  $y = ||x - 2| - |x + 1||$  بر هم منطبق هستند، کدام است؟

(۱)  $[2, +\infty)$  (۲)  $(-\infty, -1]$  (۳)  $[-1, 2]$  (۴)  $\mathbb{R} - (-1, 2)$

۶۵- اگر مساحت مستطیل زیر ۳ باشد، محیط مستطیل کدام می‌تواند باشد؟



(۱) ۶

(۲) ۷

(۳) ۵

(۴) ۹

۶۶- سه نقطه  $(-1, 2)$ ،  $(-2, 1)$  و  $(2, -1)$  رؤس یک مثلث قائم‌الزاویه هستند. فاصله وسط وتر این مثلث تا خط  $x + 2y - 4 = 0$  کدام است؟

(۱)  $\frac{4\sqrt{5}}{\Delta}$  (۲)  $\sqrt{5}$  (۳)  $3\sqrt{5}$  (۴)  $\frac{2\sqrt{5}}{\Delta}$

۶۷- دو خط  $AB: y = 3x$ ،  $BC: 3y + x = 10$  و محور  $x$  ها، معادلات اضلاع مثلث  $ABC$  هستند. معادله میانه وارد بر ضلع  $AC$  کدام است؟

(۱)  $y = \frac{3}{4}(x + 5)$  (۲)  $y = -\frac{3}{4}(x + 5)$   
 (۳)  $y = -\frac{3}{4}(x - 5)$  (۴)  $y = \frac{3}{4}(x - 5)$

۶۸- مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع  $f(x) = 2x - 1$  و  $g(x) = |x - 1| - |x|$  و محور  $y$  ها کدام است؟

- ۱ (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{6}$  (۴)

۶۹- مساحتی که نمودار  $f(x) = ||x - 2| - 2| - 1$  با محورهای مختصات (هر دو محور) در ناحیه سوم می‌سازد، کدام است؟

- ۱ (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{3}{2}$  (۳) ۲ (۴)

۷۰- نمودار  $y = 2|3x - a| + b$  از هر چهار ناحیه مختصاتی عبور می‌کند. کدام نتیجه‌گیری لزوماً صحیح است؟

- (۱)  $b(b^2 - 4a^2) < 0$  (۲)  $b(b^2 - 4a^2) > 0$   
(۳)  $ab < 0$  (۴)  $ab > 0$

۷۱- اگر طول پاره‌خطی که از تقاطع خط  $y = ax$  با خطوط  $y = 2$  و  $y = 6$  پدید می‌آید کمتر از ۵ باشد، حدود  $a$  کدام است؟

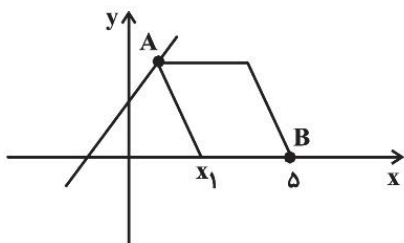
- (۱)  $-\frac{4}{3} < a < \frac{4}{3}$  (۲)  $-\frac{3}{4} < a < \frac{3}{4}$   
(۳)  $a < -\frac{4}{3}$  یا  $a > \frac{4}{3}$  (۴)  $a < -\frac{3}{4}$  یا  $a > \frac{3}{4}$

۷۲- مجموعه جواب نامعادله  $|\frac{3x}{x-1} - 2| < 2$  به صورت  $|x - \alpha| > \beta$  است. حاصل  $\alpha + 2\beta$  کدام است؟

- ۱ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۴ (۴) ۵

۷۳- در متوازی‌الاضلاع شکل زیر، رأس  $A$  روی خط  $y = x + 1$  قرار دارد و طول قطر بزرگ آن  $AB = 3\sqrt{2}$  واحد است. فاصله نقطه تلاقی

قطرهای متوازی‌الاضلاع از مبدأ مختصات کدام است؟



- (۱)  $\sqrt{29}$   
(۲)  $\sqrt{\frac{29}{2}}$   
(۳)  $\sqrt{58}$   
(۴)  $\frac{\sqrt{58}}{4}$

۷۴- تعداد ریشه‌های معادله  $2(4 - x^2)^2 - 3|x^2 - 4| + 1 = 0$  کدام است؟

- (۱) ریشه ندارد. (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۲

۷۵- در مثلث  $ABC$  با رئوس  $A(1, 5)$ ،  $B(-1, 0)$  و  $C(3, -4)$ ، فاصله بین پای ارتفاع  $AH$  و نقطه میانی ضلع  $AB$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{29}}{2}$  (۲)  $\frac{\sqrt{29}}{4}$  (۳)  $\frac{2}{\sqrt{29}}$  (۴)  $\frac{4}{\sqrt{29}}$

۷۶- نقطه  $A(-1, 1)$  یک رأس و  $AB$  یک ضلع مربع هستند. اگر معادله یک قطر مربع  $y + 2 = 2x$  باشد، مختصات رأس  $B$  کدام می تواند باشد؟

- (۱)  $(3, -1)$  (۲)  $(1, 0)$  (۳)  $(2, 2)$  (۴)  $(0, 2)$

۷۷- نقاط  $A(1, 0)$ ،  $B(4, 2)$  و  $C(3, -3)$  سه رأس مثلث  $ABC$  می باشند، در مورد مثلث  $ABC$  می توان گفت که ...

- (۱) متساوی الساقین است، قائم الزاویه نمی باشد.  
 (۲) متساوی الاضلاع است.  
 (۳) قائم الزاویه متساوی الساقین است.  
 (۴) قائم الزاویه است ولی متساوی الساقین نیست.

۷۸- خط  $4x + 3y = 5$  بر دایره  $C$  به مرکز  $O(a, 2)$  مماس است. اگر مساحت دایره  $\frac{9\pi}{25}$  باشد، مقدار صحیح  $a$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲

۷۹- چند نقطه روی سهمی  $y = x^2 - x$  وجود دارد که فاصله اش تا دو نقطه  $A(2, -1)$  و  $B(1, 4)$  به یک اندازه باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

۸۰- به ازای کدام مجموعه مقادیر  $k$ ، معادله  $\frac{3-x}{|x-4|} = k$  فقط یک ریشه دارد؟

- (۱)  $k > 1$  (۲)  $-1 \leq k < 1$  (۳)  $k < -1$  (۴)  $-1 \leq k \leq 0$

هندسه ۲ - ۱۰ سوال

۸۱- اگر دو دایره  $C(O, 5)$  و  $C'(O', 2)$  متقاطع و  $OO' = 3x - 2$  باشد، آنگاه کدام یک از مقادیر زیر

برای  $x$  قابل قبول است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $\frac{5}{2}$  (۳)  $\frac{7}{2}$  (۴)  $\frac{9}{2}$

۸۲- اگر دو دایره  $C(O, 3)$  و  $C'(O', 4)$  دارای ۳ مماس مشترک باشند، طول مماس مشترک خارجی آن ها کدام است؟

- (۱)  $2\sqrt{3}$  (۲)  $3\sqrt{2}$  (۳)  $4\sqrt{3}$  (۴)  $6\sqrt{2}$

۸۳- دو دایره متخارج که طول مماس مشترک های خارجی و داخلی آن ها به ترتیب  $3\sqrt{7}$  و  $\sqrt{15}$  واحد و طول خط المרכזین آن ها ۸ واحد است

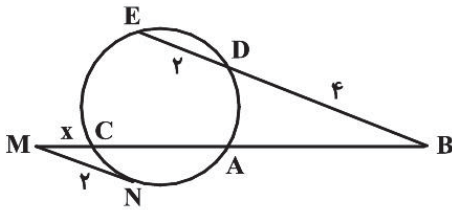
مفروض اند. شعاع دایره بزرگ تر چند برابر شعاع دایره کوچک تر است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $\frac{4}{3}$  (۳)  $\frac{5}{4}$  (۴)  $\frac{6}{5}$

۸۴- امتداد مماس‌های مشترک دو دایره متقاطع به شعاع‌های ۳ و ۴ در نقطه  $M$  با هم برخورد می‌کنند. اگر فاصله  $M$  تا مرکز دایره کوچک‌تر برابر ۵ باشد، طول مماس مشترک دو دایره، کدام است؟

- (۱) ۲ (۲)  $\frac{5}{3}$  (۳)  $\frac{4}{3}$  (۴)  $\frac{5}{2}$

۸۵- در شکل زیر  $AB = AC$  و  $MN$  بر دایره مماس است. مقدار  $x$  کدام است؟

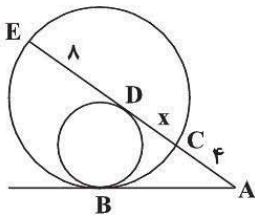


- (۱)  $2 - \sqrt{3}$   
 (۲)  $\sqrt{7} - \sqrt{3}$   
 (۳)  $3 - \sqrt{3}$   
 (۴)  $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$

۸۶- در یک چندضلعی محیطی به مساحت ۸۴، اگر طول شعاع دایره محاطی برابر ۳ باشد، آن‌گاه مجموع طول اضلاع کدام است؟

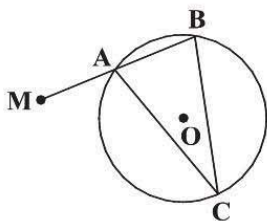
- (۱) ۲۸ (۲) ۵۶ (۳) ۲۴ (۴) ۴۸

۸۷- در شکل زیر، دو دایره در نقطه  $B$  مماس درون‌اند. اگر مماس رسم شده بر دایره کوچک‌تر در نقطه  $D$ ، دایره بزرگ‌تر را در نقاط  $C$  و  $E$  و مماس رسم شده در نقطه  $B$  را در نقطه  $A$  قطع کند، آن‌گاه طول  $CD$  کدام است؟ ( $DE = 8$  و  $AC = 4$ )



- (۱) ۲  
 (۲) ۳  
 (۳) ۴  
 (۴) ۵

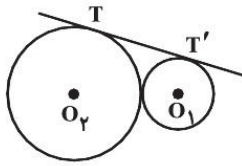
۸۸- در دایره زیر، قاطع  $MAB$  رسم شده است؛ به طوری که  $MA = AB = 6$  و  $\hat{BAC} = 75^\circ$ . اگر  $AC = CB$  باشد، فاصله نقطه  $M$  از مرکز دایره چقدر است؟



- (۱)  $6\sqrt{3}$   
 (۲) ۱۲  
 (۳)  $8\sqrt{3}$   
 (۴) ۱۶

۸۹- دو دایره  $C_1(O_1, 5)$  و  $C_2(O_2, 11)$  مماس خارج هستند. اگر از وسط پاره خط  $TT'$  (مماس مشترک خارجی دو دایره) عمودی بر آن

رسم کنیم تا  $O_1O_2$  را در نقطه  $M$  قطع کند، طول پاره خط  $MT$  کدام است؟



(۱)  $\sqrt{109}$

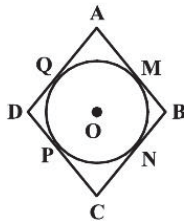
(۲)  $\sqrt{117}$

(۳)  $\sqrt{119}$

(۴)  $\sqrt{107}$

۹۰- در شکل زیر دایره در نقاط  $M, N, P, Q$  بر اضلاع لوزی مماس است. اگر  $AM = 9$  و محیط دایره  $6\pi$  باشد، طول قطر بزرگ لوزی

کدام است؟



(۱)  $4\sqrt{5}$

(۲)  $3\sqrt{10}$

(۳)  $8\sqrt{5}$

(۴)  $6\sqrt{10}$

آمار و احتمال - ۱۰ سوال -

۱۰۱- اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه باشند، گزاره سوری « $\forall x ; x \in B \Rightarrow x \notin A$ » معادل کدام یک از روابط زیر است؟

(۱)  $A \subseteq B'$       (۲)  $A' \subseteq B$       (۳)  $A \subseteq B$       (۴)  $A' \subseteq B'$

۱۰۲- اگر دو مجموعه  $A = \{a, b+1, c-3, 5\}$  و  $B = \{a+1, b-2, \{7, 2\}\}$  برابر باشند، حاصل  $a+b+c$  کدام است؟

(۱) ۱۲      (۲) ۱۳      (۳) ۱۴      (۴) ۱۵

۱۰۳- چند افزاز از مجموعه  $A = \{a, b, c, d\}$  می توان نوشت به طوری که  $a$  فقط در زیرمجموعه های دو عضوی حضور داشته باشد؟

(۱) ۳      (۲) ۴      (۳) ۵      (۴) ۶

۱۰۴- اگر  $(A' \cup B)' \subseteq (B - A)'$  باشد، کدام گزینه همواره درست است؟

(۱)  $A - B = A$

(۲)  $A - B = \emptyset$

(۳)  $A \cup B = U$

(۴)  $A \cap B = B$

۱۰۵- اگر  $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ ،  $B = \{5, 6, \dots, 15\}$  و  $C = \{9, 10, \dots, 20\}$ ، آنگاه کدام یک از مجموعه های زیر، تعداد اعضای

بیشتری دارد؟

(۱)  $A - (B \cup C)$

(۲)  $(A \cup B) - C$

(۳)  $(A \cap B) - C$

(۴)  $(A - B) \cup (C - B)$



۱۰۶- مجموعه  $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  را به چند طریق می‌توان به دو مجموعه  $A$  و  $B$  افراز کرد به گونه‌ای که  $1 \in A$  و  $5 \in B$  باشد؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۱۶

۱۰۷- کدام یک از مجموعه‌های زیر با مجموعه  $A = \{x \mid 2x \in \mathbb{N}, 3x < 10\}$  مساوی است؟

- (۱)  $B_1 = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 3x < 5\}$  (۲)  $B_2 = \{\frac{x}{3} \mid x \in \mathbb{N}, 3x < 5\}$   
 (۳)  $B_3 = \{\frac{x}{3} \mid x \in \mathbb{N}, 3x < 20\}$  (۴)  $B_4 = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 3x < 20\}$

۱۰۸- اگر  $A, B$  و  $C$  سه مجموعه دلخواه باشند، حاصل عبارت  $(A - B) \cup [(A \cap C) - B]$  همواره برابر کدام است؟

- (۱)  $A$  (۲)  $A - B$  (۳)  $B'$  (۴)  $A \cup B$

۱۰۹- اگر  $A \cup B \subseteq C \cap D$  باشد، آنگاه حاصل  $[(C \cap B) \cup (D - A)] \cap [(A - C') \cap (B \cup D)]$  کدام است؟

- (۱)  $C \cap D$  (۲)  $A \cap B$  (۳)  $A \cup B$  (۴)  $\emptyset$

۱۱۰- مجموعه  $n$  عضوی  $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  مفروض است. اگر تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی و ۸ عضوی مجموعه  $A$  برابر باشد، در

چند زیرمجموعه از  $A$  کوچک‌ترین عضو مضربی از ۴ است؟

- (۱) ۶۴ (۲) ۶۸ (۳) ۱۲۸ (۴) ۱۳۶

هندسه ۲- آشنا - ۱۰ سوال -

۹۱- فاصله دورترین نقطه دایره‌ای از نقطه  $P$  برابر ۹ سانتی‌متر و فاصله  $P$  تا مرکز دایره  $\frac{13}{4}$  سانتی‌متر است. طول مماس رسم شده از نقطه  $P$

بر این دایره کدام است؟

- (۱)  $3\sqrt{2}$  (۲) ۶ (۳)  $\sqrt{13}$  (۴)  $\sqrt{6}$

۹۲- از نقطه  $P$  دو مماس عمود بر هم بر دایره‌ای به شعاع ۲ رسم شده است، سطح بین دو مماس و محیط دایره کدام است؟

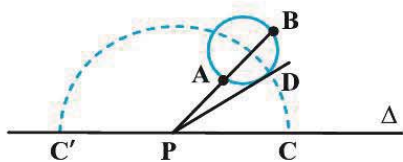
- (۱)  $4 - \pi$  (۲)  $2\pi - 4$  (۳)  $4 - \frac{\pi}{2}$  (۴)  $2 - \frac{\pi}{2}$

۹۳- در یک دایره به شعاع  $2\sqrt{6}$ ، نقطه  $M$  قطر  $AB$  را به نسبت  $\frac{1}{3}$  و وتر  $CD$  را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. طول وتر  $CD$  کدام

است؟

- (۱)  $2\sqrt{6}$  (۲)  $6\sqrt{2}$  (۳)  $4\sqrt{6}$  (۴)  $3\sqrt{2}$

۹۴- نقطه P مرکز نیم‌دایره‌ای به قطر CC' است. شعاع PD در نقطه D بر دایره مفروض مماس شده است. دایره‌ای که بر دو نقطه A و B می‌گذرد و مماس بر خط  $\Delta$  است، در کدام نقطه بر خط  $\Delta$  مماس می‌شود؟



(۱) C یا C'

(۲) بین دو نقطه C و C'

(۳) خارج پاره خط C'C

(۴) نشدنی

۹۵- دو دایره یکی با مساحت  $25\pi^3$  و دیگری با محیط  $8\pi^2$  مفروض است. اگر طول خط‌المركزین آن‌ها  $\pi$  باشد، وضعیت این دو دایره نسبت به هم چگونه است؟

هم چگونه است؟

(۲) مماس درون

(۱) متقاطع

(۴) مماس برون

(۳) متداخل

۹۶- دو دایره به شعاع‌های ۴ و  $10/5$  واحد مماس برون‌اند. از مرکز دایره کوچک‌تر، مماسی بر دایره بزرگ‌تر رسم می‌کنیم. طول این قطعه مماس کدام است؟

مماس کدام است؟

(۲)  $4\sqrt{5}$

(۱) ۸

(۴) ۱۰

(۳)  $4\sqrt{6}$

۹۷- دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۵ واحد مماس درون هستند. چند وتر به طول  $4\sqrt{6}$  در دایره بزرگ‌تر می‌توان رسم کرد که بر دایره کوچک‌تر مماس باشند؟

مماس باشند؟

(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) ۴

(۳) ۳

۹۸- در دو دایره متقاطع به مراکز O و O' و شعاع‌های ۳ و ۴ واحد، فاصله هریک از نقاط تلاقی دو دایره از وسط OO' برابر  $\frac{1}{4}OO'$  می‌باشد. اندازه مماس مشترک این دو دایره چند واحد است؟

اندازه مماس مشترک این دو دایره چند واحد است؟

(۲)  $2\sqrt{5}$

(۱) ۴

(۴) ۵

(۳)  $2\sqrt{6}$



۹۹- بیشترین فاصله بین نقاط دو دایره متخارج  $C(O, R)$  و  $C'(O', R')$  برابر ۱۶ و طول خطالمركزین دو دایره برابر ۱۰ است. طول مماس

مشترک داخلی این دو دایره کدام است؟

۶ (۲)

۴ (۱)

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۱۰۰- از برخورد نیمسازهای چهار زاویه داخلی چهارضلعی  $ABCD$  فقط یک نقطه به دست می آید. چهارضلعی  $ABCD$  لزوماً ... است.

محیطی (۲)

لوزی (۱)

محاظی (۴)

مستطیل (۳)

۶۱- گزینه «۳»

(ویدر راقتی)

$$x^2 - 3x + 2 < 0 \Rightarrow (x-2)(x-1) < 0 \Rightarrow 1 < x < 2$$

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(2x+1)^2}$$

$$\frac{1 < x < 2}{\substack{\text{منفی} & \text{مثبت}}} \quad |x-2| + |2x+1| = -x+2+2x+1 = x+3$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۵)

۴

۳ ✓

۲

۱

۶۲- گزینه «۳»

(ویدر راقتی)

$$\begin{cases} x \geq 2 \rightarrow 3x - 6 + x - 1 = 4 \Rightarrow x = \frac{11}{4} \text{ ق ق} \\ 1 < x < 2 \rightarrow -3x + 6 + x - 1 = 4 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ق ق غ} \\ x \leq 1 \rightarrow -3x + 6 - x + 1 = 4 \Rightarrow x = \frac{3}{4} \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$\text{مجموع دو ریشه معادله} = \frac{11}{4} + \frac{3}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

۶۳- گزینه «۱»

(ویدر راقتی)

همواره مثبت

$$|(x-1)(x^2+x+1)| < x^2+x+1$$

اتحاد چاق و لاغر

$$\Rightarrow |x-1|(x^2+x+1) < x^2+x+1 \Rightarrow |x-1| < 1$$

$$\Rightarrow -1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$$

$$\frac{\text{مثبت}}{|x+3|} + \frac{\text{منفی}}{|x-2|} = x+3-x+2 = 5$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

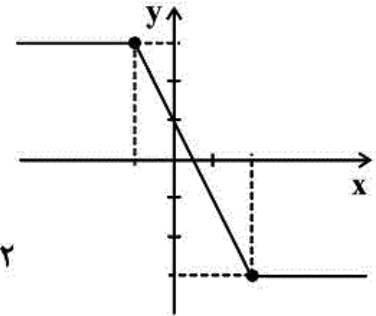
۶۴- گزینه «۴»

(میثم بهرامی بویا)

ابتدا نمودار  $y_1 = |x-2| - |x+1|$  را رسم می‌کنیم:

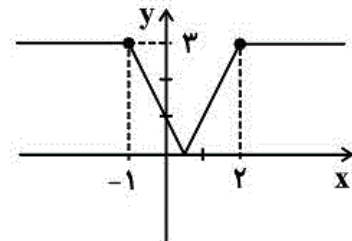
$$y_1 = |x-2| - |x+1|$$

$$\Rightarrow y_1 = \begin{cases} -3 & x \geq 2 \\ -2x+1 & -1 < x < 2 \\ +3 & x \leq -1 \end{cases}$$



برای رسم نمودار  $y = ||x-2| - |x+1||$  قسمت‌هایی از نمودار تابع  $y_1$  را که زیر محور  $x$  ها است نسبت به این محور قرینه می‌کنیم. سپس طول نقاط انطباق آن با خط  $y = 3$  را مشخص می‌کنیم:

$$y = ||x-2| - |x+1||$$



محدوده خواسته شده:  $\mathbf{R - (-1, 2)}$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

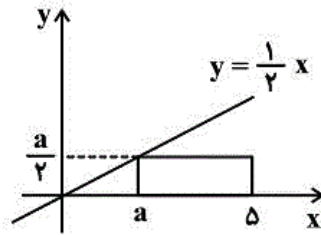
۴

۳

۲

۱

(میثم بهرامی پویا)



عرض:  $\frac{a}{2}$  و طول:  $5-a$

$$\frac{a}{2}(5-a) = 3 \Rightarrow 5a - a^2 = 6 \Rightarrow a^2 - 5a + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 3 \end{cases}$$

$a = 2 \Rightarrow$  محیط = ۸ : عرض ۱ و طول ۳

$a = 3 \Rightarrow$  محیط = ۷ : عرض  $\frac{3}{2}$  و طول ۲

(حسابان ۱- صفحه‌های ۲۹ و ۳۰)

۴

۳

۲

۱

ابتدا رأس قائم مثلث را پیدا می‌کنیم تا وتر آن مشخص شود، برای این منظور داریم:

$$C(2, -1), B(-2, 1), A(-1, 2)$$

$$\begin{cases} m_{AB} = \frac{2-1}{-1-(-2)} = \frac{1}{1} = 1 \\ m_{BC} = \frac{1-(-1)}{-2-2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \\ m_{AC} = \frac{2-(-1)}{-1-2} = \frac{3}{-3} = -1 \end{cases}$$

چون  $m_{AB} \times m_{AC} = -1$ ، یعنی مثلث در رأس  $A(-1, 2)$  قائمه است و وتر آن پاره‌خط  $BC$  است. حال کافیست فاصله نقطه وسط پاره‌خط  $BC$  تا خط  $x + 2y - 4 = 0$  را به دست آوریم.

$$\begin{cases} B(-2, 1) \\ C(2, -1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{(-2) + (2)}{2} = 0 \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0 \end{cases}$$

$$BC \text{ پاره‌خط وسط} = \text{وسط وتر} = (0, 0)$$

فاصله نقطه  $(0, 0)$  از خط  $x + 2y - 4 = 0$  برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 \times 0 + 2 \times (0) - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

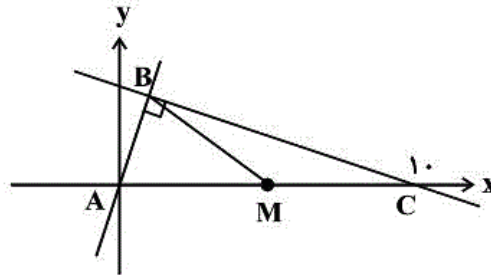
۴

۳

۲

۱ ✓

ابتدا مثلث را رسم می‌کنیم؛ دقت کنید  $AB \perp BC$  است. میانه  $BM$  خطی است که از وسط ضلع  $AC$  یعنی  $M(5, 0)$  می‌گذرد.



برای محاسبه  $B$  دو خط  $AB$  و  $BC$  را تلافی می‌دهیم:

$$\begin{cases} y - 3x = 0 \\ \times(3) \quad 3y + x = 10 \end{cases}$$

$$\text{مختصات } B: y = 3, x = 1$$

$$\text{BM معادله: } y - 0 = \frac{3 - 0}{1 - 5}(x - 5)$$

$$y = -\frac{3}{4}(x - 5)$$

(مسائل ۱- صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

 ۴

 ۳

 ۲

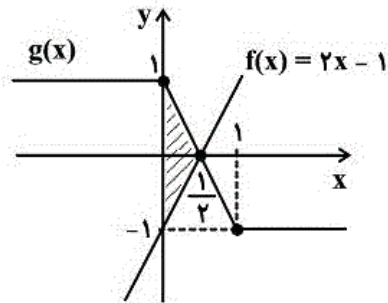
 ۱



نمودارهای دو تابع  $f(x)$  و  $g(x)$  را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

$$g(x) = |x-1| - |x| = \begin{cases} -x+1+x & ; x < 0 \\ -x+1-x & ; 0 \leq x \leq 1 \\ x-1-x & ; x > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & ; x < 0 \\ -2x+1 & ; 0 \leq x \leq 1 \\ -1 & ; x > 1 \end{cases}$$



مساحت ناحیه هاشورخورده :  $S = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

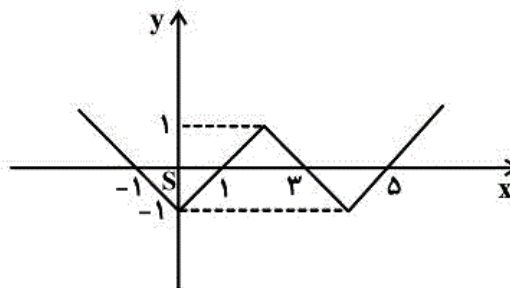
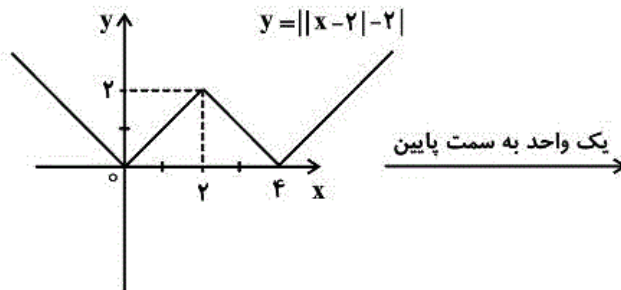
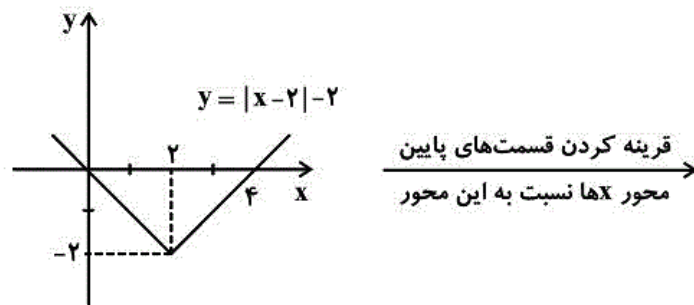
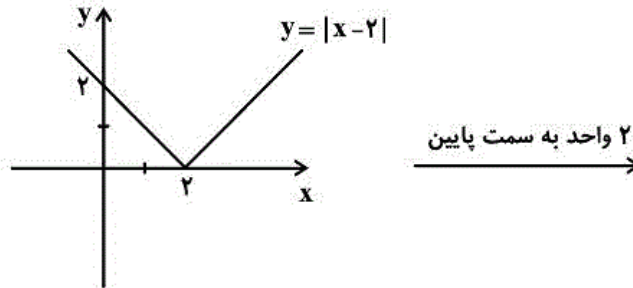
۴

۳ ✓

۲

۱

نمودار  $f$  را رسم می‌کنیم. (ابتدا  $y = |x - 2|$  را رسم کرده و ۲ واحد شکل را در راستای عمودی پایین می‌آوریم. سپس قسمت‌های زیر محور  $x$  ها را قرینه کرده و یک واحد شکل را پایین می‌آوریم)



مساحت مورد نظر در ناحیه سوم برابر با  $S$  است:

$$S = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳

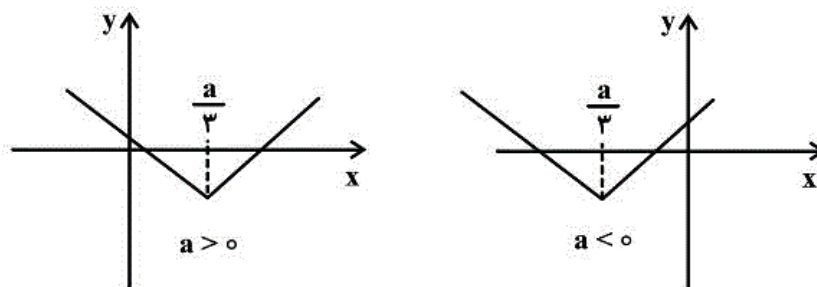
۲ ✓

۱

۷۰- گزینه «۱»

(میلاد منصوری)

$b$  باید منفی باشد. زیرا اگر  $b \geq 0$  باشد، آن گاه  $y = 2|3x - a| + b \geq 0$  است، یعنی نمودار در هیچ نقطه‌ای زیر محور  $x$  ها نخواهد بود و لذا نمی‌تواند از ناحیه‌های سوم و چهارم عبور کند. علاوه بر این، نمودار  $y = 2|3x - a| + b$  باید محور  $y$  ها را در نقطه‌ای با عرض منفی قطع کند، در غیر این صورت از یکی از نواحی سوم یا چهارم عبور نمی‌کند.



تابع  $y = 2|3x - a| + b$  محور  $y$  ها را در نقطه‌ای به عرض  $2|a| + b$  قطع می‌کند. یعنی داریم:

$$\begin{cases} b < 0 \\ 2|a| + b < 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{2|a|}_{\text{مثبت}} < \underbrace{-b}_{\text{مثبت}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4a^2 < b^2 \Rightarrow b^2 - 4a^2 > 0$$

بنابراین  $b(b^2 - 4a^2) < 0$  است.

(مسابقان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

۷۱- گزینه «۳»

(پهانیفش نیکنام)

نقطه تقاطع  $y = ax$  با خطوط  $y = 2$  و  $y = 6$  به ترتیب  $(\frac{2}{a}, 2)$

و  $(\frac{6}{a}, 6)$  می‌باشد. پس داریم:

$$\sqrt{\left(\frac{6}{a} - \frac{2}{a}\right)^2 + (6 - 2)^2} < 5 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{16}{a^2} + 16 < 25$$

$$\Rightarrow \frac{16}{9} < a^2 \Rightarrow a > \frac{4}{3} \text{ یا } a < -\frac{4}{3}$$

(مسابقان ۱- صفحه‌های ۲۹ تا ۳۱)

۴

۳ ✓

۲

۱

ابتدا نامعادله داده شده را حل می‌کنیم:

$$\left| \frac{3x}{x-1} - 2 \right| < 2 \Rightarrow \left| \frac{x+2}{x-1} \right| < 2 \Rightarrow \frac{|x+2|}{|x-1|} < 2$$

$$\Rightarrow |x+2| < 2|x-1| \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 + 4x + 4 < 4(x^2 - 2x + 1)$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 < 4x^2 - 8x + 4 \Rightarrow 3x^2 - 12x > 0$$

$$\Rightarrow 3x(x-4) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$$

x	0	4
	+	-
	+	+

می‌توان مجموعه جواب  $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$  را به صورت نامعادلهقدرمطلق  $|x - \frac{a+b}{2}| > \frac{b-a}{2}$  نوشت. یعنی:

$$\left| x - \frac{0+4}{2} \right| > \frac{4-0}{2} \Rightarrow |x-2| > 2$$

$$\Rightarrow \alpha = 2, \beta = 2 \Rightarrow \alpha + 2\beta = 2 + 4 = 6$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

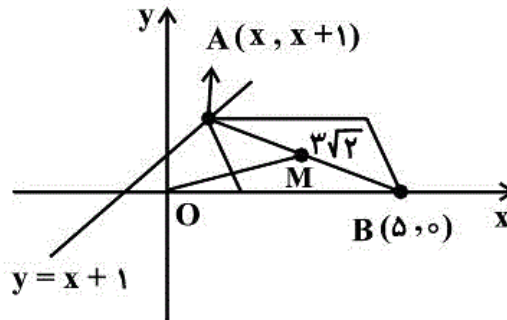
۴

۳

۲

۱ ✓

چون نقطه A روی خط  $y = x + 1$  واقع است بنابراین مختصات آن  $(x, x + 1)$  است و فاصله نقاط  $A(x, x + 1)$  و  $B(5, 0)$  برابر طول قطر بزرگ است.



بنابراین داریم:

$$AB = \sqrt{(x-5)^2 + (x+1)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} (x-5)^2 + (x+1)^2 = 18$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x + 25 + x^2 + 2x + 1 = 18 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 8 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم بر ۲}} x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

بنابراین  $A(2, 3)$  خواهد بود. همچنین در متوازی الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می کنند. لذا نقطه تلاقی قطرها همان وسط پاره خط  $AB$  می باشد.

$$AB \text{ وسط پاره خط } M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

طول  $OM$  را محاسبه می کنیم:

$$OM = \sqrt{\left(\frac{7}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{58}{4}} = \sqrt{\frac{29}{2}}$$

(مسئله ۱- صفحه های ۲۹ تا ۳۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

می‌دانیم:

$$(۴ - x^2)^2 = (-(x^2 - 4))^2 = (x^2 - 4)^2$$

$$|x^2 - 4|^2 = (x^2 - 4)^2$$

$$\Rightarrow 2(x^2 - 4)^2 - 3|x^2 - 4| + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2|x^2 - 4|^2 - 3|x^2 - 4| + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{|x^2 - 4| = t} 2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} t = 1 = |x^2 - 4| \\ t = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} = |x^2 - 4| \end{cases}$$

$$|x^2 - 4| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 1 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5} \\ x^2 - 4 = -1 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

$$|x^2 - 4| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{9}{2}} \\ x^2 - 4 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{7}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}} \end{cases}$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

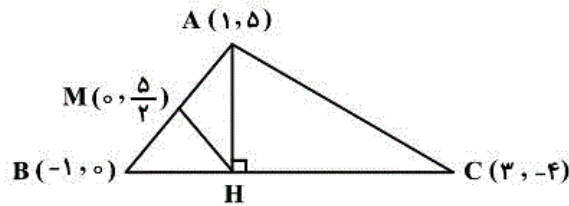
۴

۳✓

۲

۱





$$\text{BC ضلع شیب : } m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4}{3+1} = -1$$

$$\text{BC معادله : } y = -x + h \xrightarrow{B(-1, 0)} 0 = 1 + h \Rightarrow h = -1$$

$$\Rightarrow \text{BC : } y = -x - 1$$

$$\text{AH ارتفاع معادله : } y = \frac{-1}{m_{BC}}x + h' = x + h'$$

$$\xrightarrow{A(1, 5)} 5 = 1 + h' \Rightarrow h' = 4 \Rightarrow y = x + 4$$

$$\xrightarrow{\text{تلاقی AH و BC}} \text{H نقطه : } \left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{AB وسط ضلع : } M\left(\frac{1-1}{2}, \frac{5+0}{2}\right) = \left(0, \frac{5}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \text{MH} = \sqrt{\left(-\frac{5}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 1} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر طول ضلع مربع را  $a$  فرض کنیم فاصله نقطه  $A$  تا قطر برابر  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

خواهد بود. نقطه  $B$  را با مختصات مجهول روی قطر مورد نظر فرض می‌کنیم  $(\alpha, 2\alpha - 2)$  که فاصله آن تا نقطه  $A$  برابر  $a$  خواهد بود.

$$\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{|1+2-2(-1)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} \Rightarrow a = \sqrt{10}$$

$$|AB| = a = \sqrt{(\alpha+1)^2 + (2\alpha-2)^2} = \sqrt{10}$$

$$5\alpha^2 - 10\alpha + 10 = 10 \Rightarrow 5\alpha(\alpha-2) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 0, 2 \Rightarrow B(0, -2) \text{ یا } B(2, 2)$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

۷۷- گزینه «۳»

(امیر مرادیان)

$$\left. \begin{matrix} A(1, 0) \\ B(4, 2) \end{matrix} \right\} \Rightarrow AB = \sqrt{(4-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$\left. \begin{matrix} A(1, 0) \\ C(3, -3) \end{matrix} \right\} \Rightarrow AC = \sqrt{(3-1)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$\left. \begin{matrix} B(4, 2) \\ C(3, -3) \end{matrix} \right\} \Rightarrow BC = \sqrt{(3-4)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

$AB = AC = \sqrt{13} \Rightarrow$  متساوی الساقین است.

بررسی شرط قائم الزویه:  $AB^2 + AC^2 = BC^2$

در رأس A قائم الزویه است.  $\Rightarrow (\sqrt{13})^2 + (\sqrt{13})^2 = (\sqrt{26})^2$

(مسئله ۱- صفحه های ۲۹ تا ۳۶)

۴

۳

۲

۱

۷۸- گزینه «۳»

(یاسین سپهر)

فاصله مرکز دایره از خط مماس بر دایره، شعاع دایره می باشد. از طرفی

چون مساحت دایره به شعاع r برابر  $\pi r^2$  می باشد، پس:

$$\pi r^2 = \frac{9\pi}{25} \Rightarrow r^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow r = \frac{3}{5}$$

فاصله مرکز تا خط مماس بر دایره:  $\frac{|4a + 3(2) - 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{3}{5}$

$$\Rightarrow \frac{|4a + 1|}{5} = \frac{3}{5} \Rightarrow |4a + 1| = 3$$

$$\Rightarrow 4a + 1 = 3 \Rightarrow a = \frac{1}{2}, \quad 4a + 1 = -3 \Rightarrow a = -1$$

پس مقدار صحیح a برابر ۱- می باشد.

(مسئله ۱- صفحه های ۲۳ تا ۳۶)

۴

۳

۲

۱

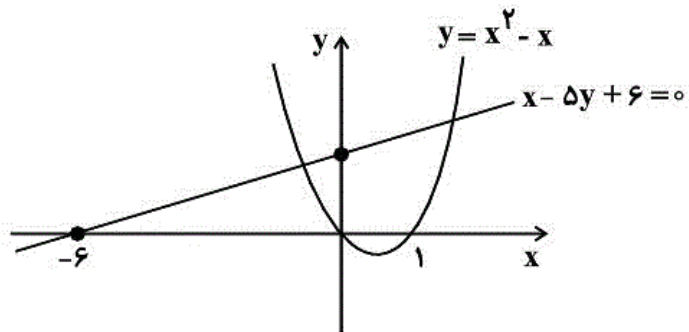
باید مشخص کنیم که سهمی مفروض چند بار عمودمنصف پاره‌خط AB را قطع می‌کند:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2}$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16$$

$$\Rightarrow 2x - 10y + 12 = 0 \Rightarrow x - 5y + 6 = 0 \quad (\text{عمودمنصف AB})$$

$$\begin{cases} x - 5y + 6 = 0 \\ y = x^2 - x \end{cases}$$



خط  $x - 5y + 6 = 0$  دو بار سهمی  $y = x^2 - x$  را قطع می‌کند. پس سؤال دارای ۲ جواب است.

(مسئله‌ها ۱- صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

۸۰- گزینه «۲»

(البر کلاه‌ملکی)

ریشه داخلی قدرمطلق  $x = 4$  است.

$$x > 4: \frac{3-x}{x-4} = k \Rightarrow 3-x = kx - 4k$$

$$\Rightarrow (k+1)x = 4k+3 \Rightarrow x = \frac{4k+3}{k+1} \Rightarrow \frac{4k+3}{k+1} > 4$$

$$\Rightarrow \frac{4k+3}{k+1} - 4 > 0 \Rightarrow \frac{-1}{k+1} > 0 \Rightarrow k < -1$$

$$x < 4: \frac{3-x}{4-x} = k \Rightarrow 3-x = 4k - kx$$

$$\Rightarrow (k-1)x = 4k-3 \Rightarrow x = \frac{4k-3}{k-1} \Rightarrow \frac{4k-3}{k-1} < 4$$

$$\Rightarrow \frac{4k-3}{k-1} - 4 < 0 \Rightarrow \frac{1}{k-1} < 0 \Rightarrow k < 1$$

پس برای  $k \geq 1$  معادله ریشه ندارد و برای  $-1 \leq k < 1$  معادله یک

ریشه و برای  $k < -1$  معادله دارای ۲ ریشه است.

(مسئله ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

۸۱- گزینه «۲»

(امیرحسین ابومحبوب)

برای دو دایره متقاطع C و C' داریم:

$$|R - R'| < OO' < R + R' \Rightarrow 5 - 2 < 3x - 2 < 5 + 2$$

$$3 < 3x - 2 < 7 \Rightarrow 5 < 3x < 9 \Rightarrow \frac{5}{3} < x < 3 \quad (1)$$

$$OO' > 0 \Rightarrow 3x - 2 > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{3} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{5}{3} < x < 3$$

در بین گزینه‌ها تنها  $x = \frac{5}{3}$  در این بازه قرار دارد.

(هنر سه ۲- صفحه ۲۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

۸۲- گزینه «۳»

(شایان عباپی)

دو دایره در صورتی سه مماس مشترک دارند که مماس برون باشند (در این صورت دو دایره دو مماس مشترک خارجی و یک مماس مشترک داخلی دارند). طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس برون از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = 2\sqrt{RR'} = 2\sqrt{3 \times 4} = 4\sqrt{3}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

۴

۳

۲

۱

۸۳- گزینه «۲»

(مهمد پورامری)

$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{15} = \sqrt{64 - (R + R')^2} \Rightarrow (R + R')^2 = 49 \Rightarrow R + R' = 7$$

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{63} = \sqrt{64 - (R - R')^2} \Rightarrow (R - R')^2 = 1 \Rightarrow |R - R'| = 1$$

فرض کنید  $R > R'$  باشد، در این صورت داریم:

$$\begin{cases} R + R' = 7 \\ R - R' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 4 \\ R' = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{R}{R'} = \frac{4}{3}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۱ و ۲۲)

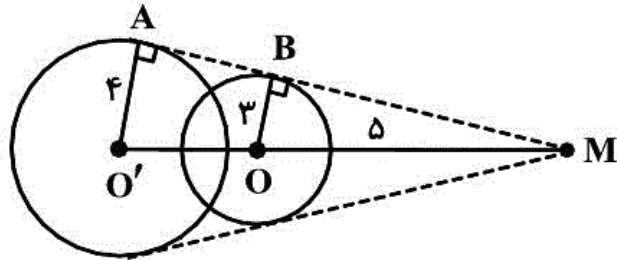
۴

۳

۲

۱

(میثم بهرامی پویا)



$$\Delta OBM : BM^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow BM = 4$$

$$O'A \parallel OB \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{OB}{O'A} = \frac{MB}{MA}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{4}{MA} \Rightarrow MA = \frac{16}{3} \Rightarrow AB = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۴

۳✓

۲

۱

(میثم بهرامی پویا)

طبق روابط طولی در دایره داریم:

$$BD \times BE = BA \times BC \Rightarrow 24 = AB \times 2AB$$

$$\Rightarrow 2AB^2 = 24 \Rightarrow AB = 2\sqrt{3} = AC$$

$$MN^2 = MC \times MA \Rightarrow 2^2 = x(x + 2\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow x^2 + 2\sqrt{3}x - 4 = 0$$

$$\Delta = 12 + 16 = 28$$

$$x = \frac{-2\sqrt{3} \pm 2\sqrt{7}}{2} = \begin{cases} x = \sqrt{7} - \sqrt{3} \\ x = -(\sqrt{3} + \sqrt{7}) \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

۴

۳

۲✓

۱



**۸۶- گزینه «۲»**

(سینا ممبرپور)

می‌دانیم اگر در یک چندضلعی محیطی با مساحت  $S$  و محیط  $2P$ ، شعاع دایره محاطی برابر  $r$  باشد، آن‌گاه  $S = rP$  خواهد بود. پس:

$$S = r \cdot P \Rightarrow P = \frac{S}{r} \Rightarrow P = \frac{84}{3} = 28$$

در نتیجه مجموع طول اضلاع یا به عبارت دیگر محیط این چندضلعی برابر است با:

$$2P = 2 \times 28 = 56$$

(هنرسه ۲- صفحه ۲۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

**۸۷- گزینه «۳»**

(رفنا عباسی اصل)

مماس‌های رسم شده از  $A$  بر دایره کوچک‌تر با هم مساوی‌اند، پس:

$$AB = AD \Rightarrow AB = x + 4$$

با استفاده از روابط طولی در دایره بزرگ‌تر داریم:

$$AB^2 = AC \cdot AE \Rightarrow (x + 4)^2 = 4(x + 12)$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x - 32 = 0 \Rightarrow (x + 8)(x - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -8 & \text{غ ق ق غ} \\ x = 4 \end{cases}$$

(هنرسه ۲- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۰)

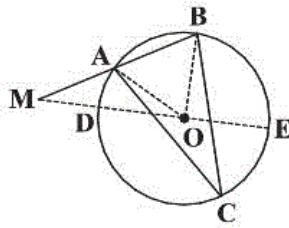
۴

۳ ✓

۲

۱

در مثلث متساوی الساقین ABC داریم:



$$\widehat{BAC} = 75^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 60^\circ$$

$$AB = r = 6$$

بنابراین مثلث OAB متساوی الاضلاع است:

$$MA \times MB = MD \times ME = (MO - r)(MO + r)$$

$$\Rightarrow 6 \times 12 = MO^2 - 6^2 \Rightarrow MO = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

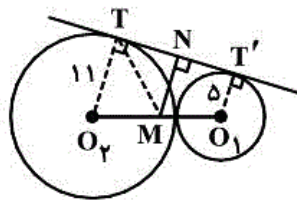
(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

۴

۳

۲

۱ ✓



$$TT' = 2\sqrt{RR'} = 2\sqrt{55}$$

$$\Rightarrow NT = \sqrt{55}$$

از آنجایی که  $TT' \parallel MN \parallel O_1T'$  و N وسط  $TT'$  است، داریم:

$$MN = \frac{O_1T' + O_2T}{2} = \frac{5 + 11}{2} = 8$$

$$MT = \sqrt{MN^2 + NT^2} = \sqrt{8^2 + (\sqrt{55})^2} = \sqrt{119}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۴

۳ ✓

۲

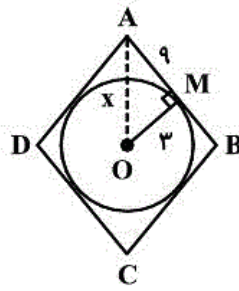
۱

۹۰- گزینه «۴»

(میثم بهرامی بویا)

$$2\pi r = 6\pi \Rightarrow r = 3$$

مرکز دایره بر محل تقاطع قطرهای لوزی منطبق است، بنابراین داریم:



$$\triangle OAM: x^2 = 9^2 + 3^2 \Rightarrow x = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

$$\text{طول قطر بزرگ} = 2 \times 3\sqrt{10} = 6\sqrt{10}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۴ ✓

۳

۲

۱

۱۰۱- گزینه «۱»

(امسان فیراللهی)

می‌دانیم یک ترکیب شرطی با عکس نقیض آن ترکیب شرطی هم ارز است، بنابراین داریم:

$$(\forall x; x \in B \Rightarrow x \notin A) \equiv (\forall x; x \in A \Rightarrow x \notin B)$$

$$\equiv (\forall x; x \in A \Rightarrow x \in B')$$

با توجه به گزاره آخر، رابطه  $A \subseteq B'$  برقرار است.

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

۱۰۲- گزینه «۴»

(امسان فیراللهی)

$$a + 1 = 5 \Rightarrow a = 4$$

$$a = b - 2 \Rightarrow 4 = b - 2 \Rightarrow b = 6$$

$$\{b + 1, c - 3\} = \{7, 2\} \xrightarrow{b+1=7} c - 3 = 2 \Rightarrow c = 5$$

$$a + b + c = 4 + 6 + 5 = 15$$

(آمار و احتمال- صفحه ۲۳)

۴ ✓

۳

۲

۱

۱۰۳- گزینه «۴»

(نرا صالح پور)

a فقط باید در زیرمجموعه‌های دو عضوی باشد، پس یکی از سه زیرمجموعه {a, b}، {a, c} و {a, d} حتماً در هر افراز وجود دارد. افرازهای ممکن به صورت زیر هستند:

- |                     |                   |
|---------------------|-------------------|
| ۱) {a, b}, {c}, {d} | ۲) {a, b}, {c, d} |
| ۳) {a, c}, {b}, {d} | ۴) {a, c}, {b, d} |
| ۵) {a, d}, {b}, {c} | ۶) {a, d}, {b, c} |

(آمار و احتمال - صفحه ۲۱)

۴

۳

۲

۱

۱۰۴- گزینه «۱»

(امسان فیرالعی)

$$(A' \cup B')' \subseteq (B - A')' \Rightarrow (A \cap B) \subseteq (B \cap A)'$$

یک مجموعه و متمم آن، جدا از هم هستند، پس تنها در صورتی یک مجموعه زیرمجموعه متمم خود است که آن مجموعه تهی باشد. در این صورت داریم:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A - B = A$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)

۴

۳

۲

۱

۱۰۵- گزینه «۴»

(وهید کویانی پور)

$A - (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4\}$  گزینه «۱»:

$(A \cup B) - C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  گزینه «۲»:

$(A \cap B) - C = \{5, 6, 7, 8\}$  گزینه «۳»:

گزینه «۴»:

$$(A - B) \cup (C - B) = \{1, 2, 3, 4, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

مجموعه گزینه «۴» با ۹ عضو، بیشترین تعداد عضو را دارد.

(آمار و احتمال - مشابه کار در کلاس صفحه ۳۴)

۴

۳

۲

۱

۱۰۶- گزینه «۴»

(میلار منصوری)

دو مجموعه A و B جدا از یکدیگرند و از طرفی هر یک از اعضای مجموعه X باید دقیقاً به یکی از دو مجموعه A و B تعلق داشته باشد. وضعیت دو عضو ۱ و ۵ از مجموعه X مشخص است، اما هر یک از اعضای ۰، ۲، ۳ و ۴ می‌توانند عضو یکی از دو مجموعه A یا B باشند، بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد جواب‌های مسئله برابر است با:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۴

۳

۲

۱

۱۰۷- گزینه «۳»

(میلار منصوری)

با توجه به تعریف مجموعه A داریم:

$$A = \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3 \right\}$$

حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$B_1 = \{1\}$$

گزینه «۱»:

$$B_2 = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

گزینه «۲»:

$$B_3 = \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3 \right\}$$

گزینه «۳»:

$$B_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

گزینه «۴»:

بنابراین مجموعه B<sub>۳</sub> مساوی با مجموعه A است.

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۱۹، ۲۳ و ۲۴)

۴

۳

۲

۱

۱۰۸- گزینه «۲»

(امیرحسین ابومصوب)

$$\begin{aligned} (A - B) \cup [(A \cap C) - B] &= (A \cap B') \cup [(A \cap C) \cap B'] \\ &= \underbrace{(A \cap B') \cup [(A \cap B') \cap C]}_{\text{قانون جذب}} = A \cap B' = A - B \end{aligned}$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)

۴

۳

۲

۱

$$\left. \begin{array}{l} A \subseteq A \cup B \\ B \subseteq A \cup B \\ C \cap D \subseteq C \\ C \cap D \subseteq D \end{array} \right\} \xrightarrow{A \cup B \subseteq C \cap D} \left\{ \begin{array}{l} A \subseteq C \\ A \subseteq D \\ B \subseteq C \\ B \subseteq D \end{array} \right.$$

$$\underbrace{(C \cap B)}_B \cup (D - A) = B \cup (D \cap A') \quad (1)$$

$$(A - C') \cap \underbrace{(B \cup D)}_D = \underbrace{(A \cap C)}_A \cap D = A \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (1), (2) &\Rightarrow [B \cup (D \cap A')] \cap A = (A \cap B) \cup [A \cap (D \cap A')] \\ &= (A \cap B) \cup \underbrace{[(A \cap A') \cap D]}_{\emptyset} = A \cap B \end{aligned}$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)

۴

۳

۲

۱

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{8} \Rightarrow n = 2 + 8 = 10$$

زیرمجموعه‌های مورد نظر به یکی از دو صورت زیر است:

الف) کوچک‌ترین عضو آن‌ها برابر ۴ باشد و می‌توانند شامل اعضای ۵ تا

۱۰ باشند یا نباشند که تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر  $2^6 = 64$  است.

ب) کوچک‌ترین عضو آن‌ها برابر ۸ باشد و می‌توانند شامل ۹ و ۱۰ باشند

یا نباشند که تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر  $2^2 = 4$  است.

پس در مجموع  $64 + 4 = 68$  زیرمجموعه با مشخصات مورد نظر داریم.

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۴

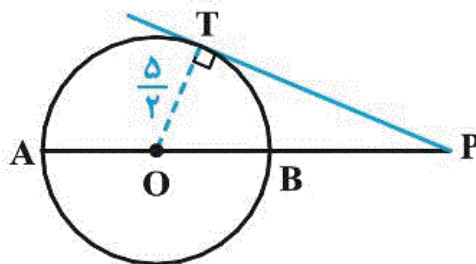
۳

۲

۱

طبق فرض‌های مسئله  $PA = 9$  و  $PO = \frac{13}{2}$

است، پس اگر شعاع دایره برابر  $R$  باشد، آن‌گاه:



$$R = OA = AP - OP = 9 - \frac{13}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow OT = R = \frac{5}{2}$$

در مثلث قائم‌الزاویه  $OTP$  با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

$$PT^2 = OP^2 - OT^2 = \left(\frac{13}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{169 - 25}{4}$$

$$PT^2 = \frac{144}{4} = 36 \Rightarrow PT = 6$$

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۴

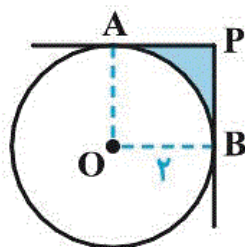
۳

۲ ✓

۱

هرگاه از  $P$  دو مماس بر دایره رسم شود:  $PA = PB$  و

چون  $\hat{P} = 90^\circ$  است، چهارضلعی مربع است.



قطوع  $S$  - مربع  $S =$  سطح هاشورخورده

$$\text{سطح هاشورخورده} = (2)^2 - \frac{1}{4}(\pi(2)^2) = 4 - \pi$$

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

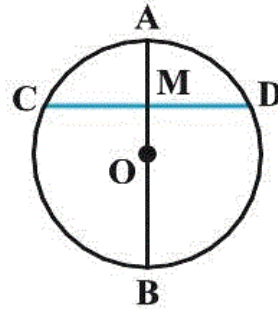
۴

۳

۲

۱ ✓





رابطه طولی در دایره:

$$MA \times MB = MC \times MD$$

$$MA = \frac{1}{4} AB = \frac{1}{4} \times 2R = \sqrt{6}$$

$$MB = \frac{3}{4} AB = 3\sqrt{6}$$

$$MC = \frac{1}{2} CD \text{ و } MD = \frac{1}{2} CD$$

$$\Rightarrow \sqrt{6} \times 3\sqrt{6} = \frac{1}{2} CD \times \frac{1}{2} CD$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} CD^2 = 18 \Rightarrow CD = 6\sqrt{2}$$

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

 ۴

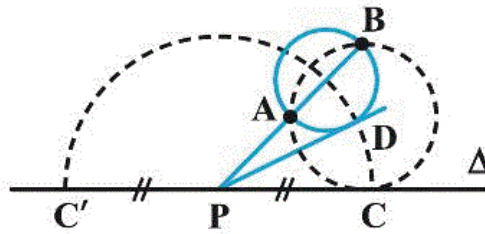
 ۳

 ۲

 ۱



با توجه به شکل و فرض سؤال، داریم:



$$PD^2 = PA \cdot PB \quad (1)$$

دایره مورد نظر سؤال از نقاط A و B می‌گذرد که با توجه به شکل، نقطه P قطعاً خارج دایره قرار دارد. فرض کنیم که این دایره در نقطه M بر خط  $\Delta$  مماس است که در نتیجه:

$$PM^2 = PA \cdot PB \quad (2)$$

از مقایسه روابط (۱) و (۲) این نتیجه گرفته می‌شود که PM برابر شعاع نیم‌دایره است و لذا M یکی از نقاط C و C' روی خط  $\Delta$  است.

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

باید اندازه شعاع هر یک از دایره‌ها را محاسبه کرده و با توجه به طول خط‌المرکزین، وضعیت آن‌ها را مشخص کنیم.

$$\begin{cases} \text{مساحت دایره } C = \pi R^2 = 25\pi^3 \rightarrow R = 5\pi \\ \text{محیط دایره } C' = 2\pi R' = 8\pi^2 \rightarrow R' = 4\pi \end{cases}$$

با توجه به این که  $OO' = |R - R'| = \pi$  است، این دو دایره مماس درون هستند.

(هندسه ۲- صفحه ۲۰)

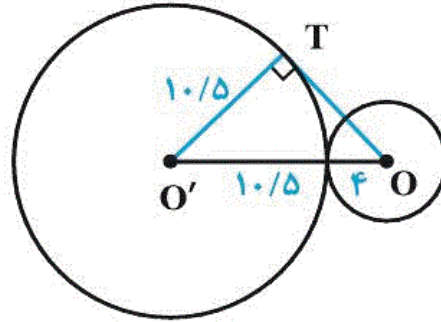
۴

۳

۲ ✓

۱

دو دایره، مماس برون هستند پس طول خط‌المركزین آنها برابر است با مجموع طول شعاع‌های دو دایره.



$$\Delta OO'T : OT^2 = OO'^2 - O'T^2 = (14/5)^2 - (10/5)^2$$

$$\Rightarrow OT^2 = (14/5 + 10/5)(14/5 - 10/5) = 25 \times 4 = 100$$

$$\Rightarrow OT = 10$$

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

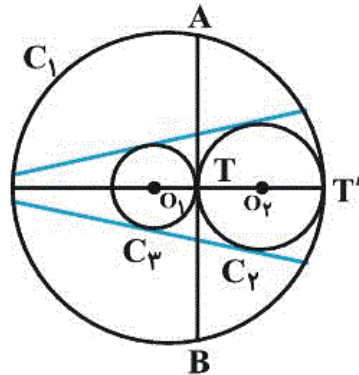
۴

۳

۲

۱

مطابق شکل دو دایره  $C_1(O_1, 5)$  و  $C_2(O_2, 2)$  را در نظر می‌گیریم. اگر فاصله وتر به طول  $4\sqrt{6}$  از مرکز دایره به شعاع ۵ را  $O_1T = d$  بگیریم، آن‌گاه:



$$TB = \sqrt{O_1B^2 - O_1T^2} \text{ و } AB = 2TB$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{6} = 2\sqrt{5^2 - d^2} \Rightarrow d^2 = 1 \Rightarrow d = 1$$

یعنی این‌که تمام وترهای به طول  $4\sqrt{6}$  در دایره  $C_1$  بر دایره  $C_3(O_3, 1)$  مماس‌اند.

با توجه به شکل، دایره  $C_3(O_3, 1)$  با دایره  $C_2(O_2, 2)$  مماس خارجی است.

$$O_1O_2 = O_1T' - O_2T' = 5 - 2 = 3 = R_2 + R_3$$

از آن‌جا که دو دایره مماس خارج، سه مماس مشترک دارند، پس فقط سه وتر به طول  $4\sqrt{6}$  در دایره به شعاع ۵ وجود دارد که بر دایره به شعاع ۲ مماس است.

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۴

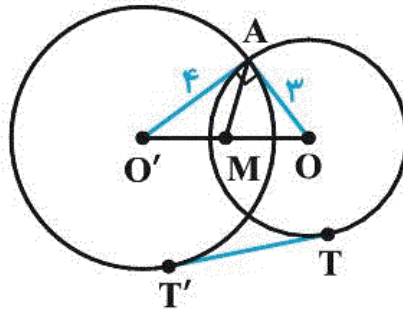
۳

۲

۱

می‌دانیم اگر در مثلثی، میانه وارد بر ضلعی نصف طول آن ضلع باشد، زاویه رأسی که این میانه از آن خارج شده، قائمه است.

مطابق شکل، مثلث  $AOO'$  با توجه به توضیح بالا، در رأس  $A$  قائم‌الزاویه است، پس:



$$OO' = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

طول مماس مشترک  $TT'$  برابر است با:

$$\sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} = \sqrt{5^2 - (4 - 3)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۴

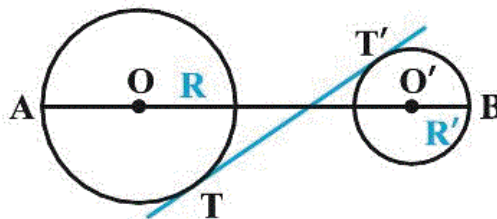
۳ ✓

۲

۱

دورترین نقاط دو دایره متخارج  $C(O, R)$  و  $C'(O', R')$ ، نقاط  $A$  و  $B$  در شکل زیر می‌باشد. در این صورت داریم:

$$AB = OO' + R + R' \Rightarrow 16 = 10 + R + R' \Rightarrow R + R' = 6$$



طول مماس مشترک داخلی دو دایره برابر است با:

$$TT' = \sqrt{OO'^2 - (R + R')^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$$

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

۱۰۰- گزینه «۲»

(کتاب آبی)

در هر چهارضلعی محیطی، نیمسازهای چهار زاویه داخلی، همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند که این نقطه مرکز دایره محاطی چهارضلعی است.

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۴

۳

۲ ✓

۱