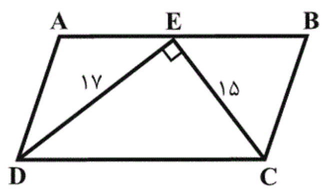
۱۳۱- اگر تعداد قطرهای یک $2n$ ضلعی محدب، دو برابر مجموع تعداد قطرها و اضلاع یک $(n+1)$ ضلعی محدب باشد، تعداد قطرهای n ضلعی محدب کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۲۴

۱۳۲- در شکل زیر، مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$ کدام است؟

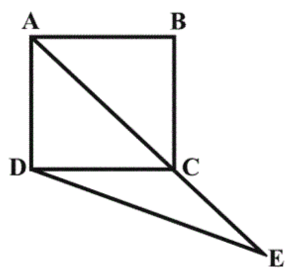


۱) ۲۵۵
۲) ۲۷۵
۳) ۲۱۵
۴) ۲۰۵

۱۳۳- در یک چندضلعی شبکه‌ای مجموع تعداد نقاط درونی و مرزی، دو برابر مساحت چندضلعی است. حداقل مساحت این چندضلعی چقدر است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۲ ۳) ۱/۵ ۴) ۱

۱۳۴- در شکل زیر $ABCD$ مربع، $C\hat{D}E = ۱۵^\circ$ و $AB = ۶$ است. طول DE کدام است؟



۱) ۸
۲) $۸\sqrt{۲}$
۳) $۶\sqrt{۲}$
۴) $\frac{۹\sqrt{۲}}{۲}$

۱۳۵- طول‌های دو قطر چهارضلعی محدب $ABCD$ باهم مساوی‌اند. نقاط وسط اضلاع این چهارضلعی را به طور متوالی به‌هم وصل می‌کنیم. چهارضلعی حاصل کدام است؟

۱) لوزی ۲) مستطیل ۳) مربع ۴) ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین

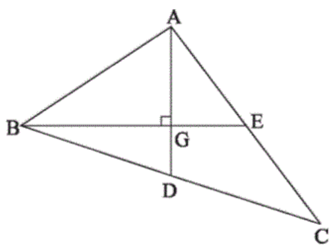
۱۳۶- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویهٔ حادهٔ آن برابر ۲۲/۵ درجه و طول وتر آن برابر ۲ است، طول ارتفاع وارد بر وتر کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

۱۳۷- اختلاف طول‌های دو قاعدهٔ یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، $\frac{۱}{۶}$ مجموع طول‌های آن دو قاعده است. اگر اندازهٔ یک زاویهٔ این ذوزنقه ۴۵° و مساحت آن برابر ۱۲ باشد، طول قاعدهٔ بزرگ ذوزنقه کدام است؟

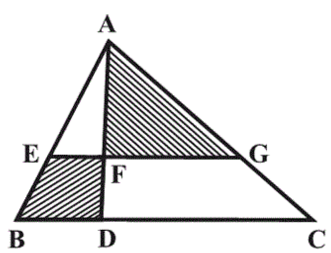
۱) $۶\sqrt{۲}$ ۲) $۸\sqrt{۲}$ ۳) $۵\sqrt{۲}$ ۴) $۷\sqrt{۲}$

۱۳۸- در شکل زیر، G نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث ABC است. اگر $AD \perp BE$ ، $EC = ۵$ و $GD = ۲$ باشد، طول BE کدام است؟



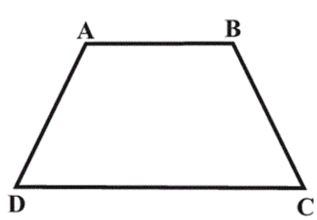
۱) ۹
۲) ۱۲
۳) ۸
۴) ۶

۱۳۹- شکل زیر، اندازهٔ پاره‌خط‌های BD و DC به ترتیب ۳ و ۷ واحد و $AD = ۴DF$ است. اگر $EG \parallel BC$ باشد، مساحت چهارضلعی BEFD چه کسری از مساحت مثلث AFG است؟



۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۲}{۵}$
۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۴۰- ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD با اندازهٔ قاعده‌های ۲/۴ و ۶ و اندازهٔ ساق ۳ مفروض است. از نقطه‌ای واقع بر قاعدهٔ بزرگ، دو عمود بر ساق‌های ذوزنقه رسم می‌کنیم، مجموع طول‌های این دو عمود کدام است؟



۱) ۴/۶
۲) ۴/۸
۳) ۴
۴) ۵/۲

۱۱۱- عدد $۱۲!+۱۳!$ بر چند عدد طبیعی یک رقمی بخش‌پذیر است؟

۱) ۴ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) ۷

۱۱۲- باقی‌ماندهٔ تقسیم $۳^{۵۰}$ بر عدد ۱۳ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸

۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۱۳- در تقسیم عدد ۲۵۹ بر b، باقی‌مانده برابر ۳۱ است. چند مقدار طبیعی برای b وجود دارد؟

۱) ۵ ۲) ۷

۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۱۴- اگر $۰ | x^۲+۳x+۲$ و $۰ | ۳+۲y+y^۲$، آن‌گاه برای x و y به‌ترتیب از راست به چپ، چند جواب صحیح وجود دارد؟

۱) ۲ و ۰ ۲) ۰ و ۰

۳) ۲ و بی‌شمار ۴) بی‌شمار و ۰

۱۱۵- کدام‌یک از گزاره‌های زیر با استفاده از مثال نقض رد می‌شود؟

۱) باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، برابر یک است.

۲) اگر a حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، $۴a+۱$ مربع کامل است.

۳) هر عدد اول فرد به یکی از دو فرم $۲^n+۱$ یا $۲^n-۱$ نوشته می‌شود. $(n\in \mathbb{N})$

۴) مربع و مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است.

۱۱۶- چند عدد طبیعی b وجود دارد به گونه‌ای که باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد a و $۳a$ بر b به ترتیب ۲۳ و ۱۵ باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۷- اگر $۳ | a+۲b$ و $۹ | a^۲+kab-۵b^۲$، k کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۵- ۲) ۴-

۳) ۳- ۴) ۱-

۱۱۸- به ازای چند مقدار طبیعی کوچکتر از ۲۰ برای n ، رابطهٔ $5^n + 12 \overset{13}{\equiv} 0$ برقرار است ؟

۱) ۵
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۲

۱۱۹- اگر $a^3 - 1 \overset{m}{\equiv} a^2 + a + 1$ و $(a^2 + a + 1, m) = 1$ باشند، a همواره به کدام دستهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ m تعلق دارد؟

۱) $[-2]$
۲) $[-1]$
۳) $[1]$
۴) $[2]$

۱۲۰- اگر $d = (4a+4, 2a-5)$ و $d \neq 1$ باشد، رقم یکان 13^d کدام است؟

۱) ۱
۲) ۳
۳) ۷
۴) ۹

ریاضیات گسسته - آشنا - ۱۰ سوال -

۱۲۱- چند زوج مرتب (a,b) از اعداد صحیح و ناصفر وجود دارد به‌گونه‌ای که رابطهٔ $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ برقرار باشد؟

۱) هیچ
۲) ۱
۳) ۲
۴) بی‌شمار

۱۲۲- اگر $a^3 \mid b^2$، کدام‌یک از روابط زیر درست <u>نیست</u>؟

۱) $a \mid b$
۲) $a^4 \mid b^3$
۳) $a^5 \mid b^3$
۴) $a^7 \mid b^5$

۱۲۳- به ازای اعداد طبیعی $1 \le n \le 50$، در چند حالت دو عدد $4n+7$ و $5n+9$ نسبت به هم اول‌اند؟

۱) ۴۷
۲) ۴۸
۳) ۴۹
۴) ۵۰

۱۲۴- در یک تقسیم، مقسوم ۸۰۲ و خارج قسمت ۱۴ است. حداقل و حداکثر مقدار مقسوم‌علیه کدام است؟

۱) ۵۳ و ۵۸ ۲) ۵۴ و ۵۷

۳) ۵۴ و ۵۸ ۴) ۵۵ و ۵۷

۱۲۵- در تقسیم عدد طبیعی سه رقمی a بر عدد طبیعی b، خارج‌قسمت ۲۱ و باقی‌مانده ۳۷ است. چند عضو از مجموعهٔ جواب‌های a، مضرب ۵ است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۶- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد 13^{43} بر عدد ۱۷ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

۱۲۷- از رابطهٔ هم‌نهشتی $18a \overset{9}{\equiv} 12b$، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟ $(a,b \neq 0)$

۱) $a \overset{2}{\equiv} 0$ ۲) $b \overset{3}{\equiv} 0$ ۳) $3a \overset{3}{\equiv} b$ ۴) $3a \overset{3}{\equiv} 2b$

۱۲۸- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عددهای ۶۸ و ۱۴۵ بر m، دو عدد مساوی باشند و $m \neq 1$، باقی‌ماندهٔ تقسیم ۱۶۰ بر m کدام است؟

۱) صفر ۲) ۶

۳) ۷ ۴) ۱۱

۱۲۹- تعداد اعداد دو رقمی a به‌طوری که $11^a \equiv 1$ (پیمانه ۱۹) باشد، کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۷

۳) ۲۸ ۴) ۳۰

۱۳۰- چند عدد سه رقمی وجود دارد که مضرب ۱۱ و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر دو عدد ۴ و ۵، برابر ۱ باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

۸۱- در کل مجموعهٔ $(-\infty,a)-\{b\}$، نمودار تابع $f(x)=x^2$ بالاتر از نمودار تابع $g(x)=x^3$ قرار می‌گیرد. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۱-

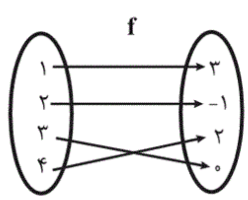
۸۲- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)=x^2+mx-2$ بر $x+1$ برابر ۲ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر $x-1$ کدام است؟

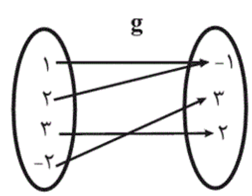
۱) ۱ ۲) ۴- ۳) ۱- ۴) ۴

۸۳- در تجزیهٔ $x^{10}+32$ کدام عامل موجود است؟

۱) $x-2$ ۲) $x+2$ ۳) x^2+2 ۴) x^2+4

۸۴- با توجه به نمودارهای پیکانی دو تابع f و g، مجموع اعضای برد تابع $\frac{g}{f}$ کدام است؟





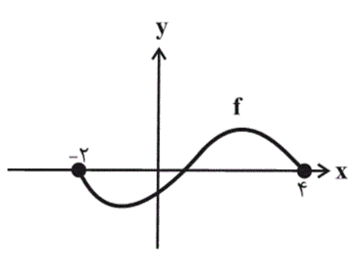
۱) $\frac{2}{3}$

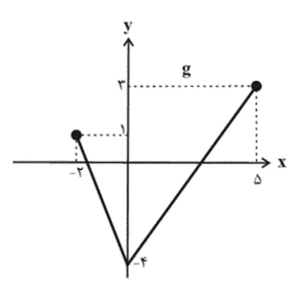
۲) $-\frac{4}{3}$

۳) $\frac{4}{3}$

۴) $-\frac{2}{3}$

۸۵- نمودار توابع f و g به صورت زیر است. چند عدد صحیح در دامنهٔ fog قرار دارد؟





۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۸۶- اگر $f(x)=\frac{۲}{۳}x-k$ و $D_{fof}=D_f=[-۱,۲]$ باشد، حدود k کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}\le k\le \frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}\le k\le \frac{۲}{۳}$ ۳) $-\frac{۱}{۳}< k\le \frac{۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۲}{۳}\le k\le \frac{۲}{۳}$

۸۷- اگر $f(x)=۲^{۳x}$ و $g(x)=\frac{[۳x]+۱}{۳}-x$ باشد، برد تابع fog کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $[-\frac{۱}{۳},۱)$ ۲) $[۰,۱)$ ۳) $(۱,۲]$ ۴) $(\frac{۲}{۳},۱]$

۸۸- اگر f و g دو تابع با دامنه‌های $D_f=[۳,۶]$ و $D_g=[-۲,۱]$ باشند، دامنهٔ تابع $h(x)=f(\frac{۳x}{۲})-g(x-۳)$ کدام است؟

۱) $[۲,۴]$ ۲) $[۱,۴]$ ۳) $[-۲,۶]$ ۴) $[۱,۶]$

۸۹- اگر $(f^{-۱}og^{-۱})(a)=۹$، $f(x)=۲x+\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{x+۳}{x-۱}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱/۱ ۲) ۱/۲ ۳) ۱/۳ ۴) ۱/۴

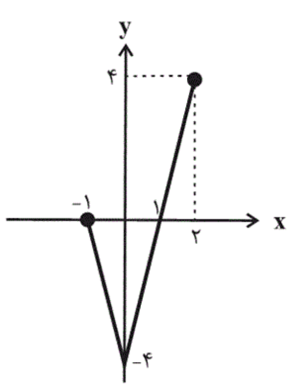
۹۰- اگر نمودار تابع $f(x)=-۱+\sqrt{x+۱}$ در بازهٔ (a,b) بالاتر از نمودار تابع $g(x)=x^۳+۳x^۲+۳x$ باشد، بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۹۱- نقطهٔ $A(۲,-۱)$ روی نمودار تابع $g(x)=f(۲x-۱)-۱$، بعد از تبدیل این نمودار به نمودار تابع $h(x)=f(۳x+۴)+۱$، در کدام ناحیه دستگاه مختصات قرار می‌گیرد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۹۲- نمودار تابع $y=f(x)$ مطابق زیر است. بیشترین مقدار تابع $y=|۲f(۳x+۱)-۲|$ کدام است؟



۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۶
۴) ۱۲

۹۳- اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x} & ;x<0\\ x^2-3x & ;x\geq 2\end{cases}$ باشد، نمودار تابع $y=-f(2x+1)$ از کدام ناحیه (یا نواحی) دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱) فقط اول ۲) فقط دوم ۳) دوم و چهارم ۴) فقط سوم

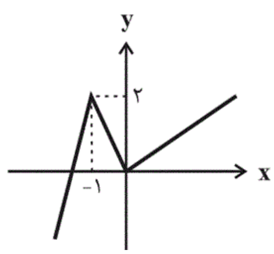
۹۴- نمودار تابع $f(x)=(|x|-1)^3$ در بازهٔ $[a,+\infty)$ اکیداً صعودی است. حداقل مقدار a کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) صفر ۴) ۱

۹۵- به ازای چند مقدار صحیح a، تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+1 & ;x\geq 1\\ ax-2 & ;x<1\end{cases}$ اکیداً یکنوا است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۶- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. اگر $g(x)=ax$ باشد، حداقل مقدار a کدام باشد تا نمودار تابع $f+g$ صعودی باشد؟



۱) ۱

۲) ۱-

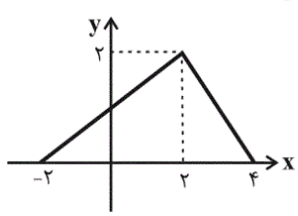
۳) ۲

۴) ۲-

۹۷- اگر $f(x)=\begin{cases}x+2 & ;x>1\\ -2x+1 & ;x<1\end{cases}$ باشد، نمودار تابع $y=(fof)(x)$ روی $(-\infty,1)$ چگونه است؟

۱) اکیداً صعودی ۲) اکیداً نزولی ۳) غیریکنوا ۴) ثابت

۹۸- اگر نمودار تابع f به‌صورت زیر و $g(x)=f(2x)$ باشد، تابع fog روی بازهٔ $[a,b]$ اکیداً نزولی است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۲

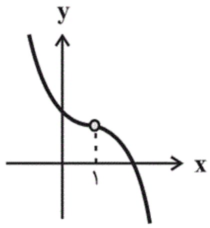
۳) ۳ ۴) ۵

۹۹- تابع $\begin{cases}f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}\\ f(x)=\sin\frac{1}{x}\end{cases}$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

۱) همواره صعودی ۲) همواره نزولی

۳) ابتدا صعودی و سپس نزولی ۴) ابتدا نزولی و سپس صعودی

۱۰۰- نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر است. مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $f(x+۱)\le f(۲x-۳)$ چند عدد طبیعی را شامل می‌شود؟



۱) صفر
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

هندسه ۳ - ۱۰ سوال

۱۰۱- اگر $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} = A^{-۱}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $A^۲$ کدام است؟

۱) ۲-　　۲) صفر　　۳) ۱　　۴) ۲

۱۰۲- اگر دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} ax+۳y=۵ \\ ۲x+y=۷ \end{cases}$ جواب نداشته باشد، دستگاه $\begin{cases} ۲x-ay=-۲a \\ -x+۳y=a \end{cases}$ چند جواب دارد؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) بی‌شمار

۱۰۳- اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A^۶=kA$ باشد، مقدار k کدام است؟

۱) ۲۷　　۲) ۸۱　　۳) ۲۴۳　　۴) ۷۲۹

۱۰۴- اگر در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=۲ \end{cases}$، معکوس ماتریس ضرایب مجهولات به صورت $\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $x+y=۱۲$ باشد، مقدار y کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۱−　　۳) $\frac{۳}{۲}$　　۴) ۳

۱۰۵- اگر $B=\begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$، $C=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $BA-I=C$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۱۰۶- اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ستون سوم ماتریس $A^۴$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۱-　　۳) ۲　　۴) ۲-

۱۰۷- اگر A یک ماتریس مربعی غیرصفر و $A^۲=\bar{O}$ باشد، وارون ماتریس $I+۲A$ کدام است؟

۱) $I+\frac{۱}{۲}A$　　۲) $I-\frac{۱}{۲}A$　　۳) $I-۲A$　　۴) $I-A$

۱۰۸- در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=۵ \\ ۳x-۵y=۳ \end{cases}$، اگر دترمینان ماتریس ضرایب مجهولات برابر ۱۷ و $x=-۲$ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۲-　　۳) ۳　　۴) ۴

۱۰۹- اگر دستگاه معادلات $\begin{cases} mx+۲y=-۴ \\ ۳x+(m-۱)y=۶ \end{cases}$ بی‌شمار جواب داشته باشد، چه تعداد از دستگاه‌های زیر جواب منحصر به فرد دارند؟

الف) $\begin{cases} mx+۳y=۴ \\ ۳x-my=۵ \end{cases}$　　ب) $\begin{cases} ۴mx+۴y=m-۱ \\ ۲x-y=۴ \end{cases}$　　ج) $\begin{cases} ۳mx-y=۴ \\ ۶x+y=m-۲ \end{cases}$

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

۱۱۰- اگر A ماتریسی وارون‌پذیر و $(A+I)^۳=\bar{O}$ باشد، $A^{-۱}+I$ کدام است؟

۱) $-(A+۲I)(A-I)$　　۲) $(A+I)(A+۳I)$　　۳) $(A-I)(A+۲I)$　　۴) $-(A+I)(A+۲I)$

۱۳۱- گزینهٔ «۱» (مهدی نیک‌زاد)

طبق رابطهٔ تعداد اضلاع و قطرهای یک چندضلعی داریم:

$$\frac{۲n(۲n-۳)}{۲}=۲(n+۱+\frac{(n+۱)(n-۲)}{۲})\Rightarrow n^۲-۴n=۰\begin{cases}n=۰ \text{ غ‌ق‌ق}\\ n=۴\end{cases}$$

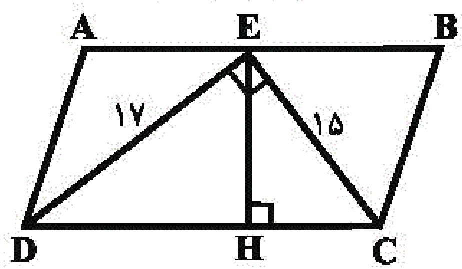
$$\text{تعداد قطرهای } n \text{ ضلعی}=\frac{n(n-۳)}{۲}=\frac{۴\times۱}{۲}=۲$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها ، صفحهٔ ۵۵)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۳۲- گزینهٔ «۱» (علی ایمانی)

با رسم ارتفاع EH می‌بینیم که ارتفاع و قاعده در مثلث DEC همان ارتفاع و قاعده در متوازی‌الاضلاع ABCD است. بنابراین داریم:



$$S_{ABCD}=۲S_{CDE}=۲\frac{(۱۵\times۱۷)}{۲}=۲۵۵$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها ، صفحهٔ ۶۵)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۳۳- گزینهٔ «۱» (سید محمدرضا حسینی‌فرد)

با توجه به فرمول پیک داریم:

$$S=\frac{i+b}{۲}=\frac{b}{۲}+i-۱\Rightarrow i=۲$$

حال یک چند ضلعی شبکه‌ای داریم که ۲ نقطهٔ درونی دارد و می‌دانیم $b\geq۳$ ، پس حداقل مساحت برابر است با:

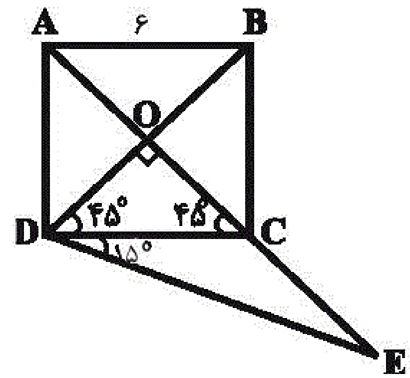
$$S_{min}=\frac{۳}{۲}+۲-۱=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها ، صفحه‌های ۶۹ تا ۷۱)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۳۴- گزینهٔ «۳» (علی ایمانی)

مطابق شکل در مثلث DOE، $\hat{D}=۶۰^\circ$ و $\hat{O}=۹۰^\circ$، بنابراین $\hat{E}=۳۰^\circ$ است. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه، طول ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰°، نصف طول وتر است، پس داریم:



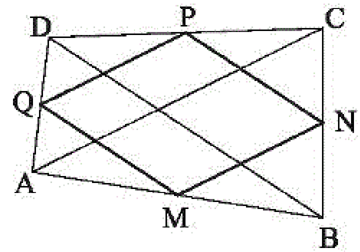
$$DB=\sqrt{۲}AB=۶\sqrt{۲}\Rightarrow DO=\frac{۱}{۲}DB=۳\sqrt{۲}\ \ (*)$$

$$\overset{\Delta}{DOE}:DO=\frac{۱}{۲}DE\xrightarrow{(*)}DE=۶\sqrt{۲}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها ، صفحهٔ ۶۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۳۵- **گزینهٔ «۱»** (محمدابراهیم گیتی‌زاده)



چهارضلعی MNPQ متوازی‌الاضلاع است و در آن $MN = \frac{AC}{2}$ و $NP = \frac{BD}{2}$ است. باتوجه به برابری قطرها داریم:

$$AC = BD \Rightarrow \frac{AC}{2} = \frac{BD}{2} \Rightarrow MN = NP$$

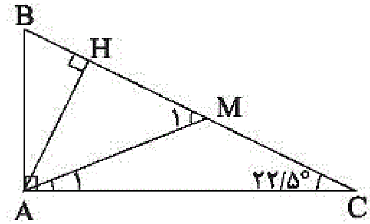
متوازی‌الاضلاعی که دو ضلع مجاور آن برابر باشند، یک لوزی است، پس چهارضلعی MNPQ لوزی می‌باشد.

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱ و ۶۴)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۳۶- **گزینهٔ «۳»** *(سیدسروش کریمی مدامی)*

در این مثلث قائم‌الزاویه، میانه و ارتفاع وارد بر وتر را رسم می‌کنیم:



می‌دانیم طول میانهٔ وارد بر وتر نصف طول وتر است، پس داریم:

$$AM = CM = \frac{۱}{۲}BC \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{C} = ۲۲/۵°$$

$$\overset{\Delta}{AMC}:\ \text{زاویهٔ خارجی}\ \hat{M}_۱ \Rightarrow \hat{M}_۱ = \hat{A}_۱ + \hat{C} = ۴۵°$$

در مثلث قائم‌الزاویه، طول ضلع روبه‌رو به زاویهٔ $۴۵°$، $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ طول وتر است، پس داریم:

$$\Delta AMH : \hat{M}_۱ = ۴۵°$$

$$\Rightarrow AH = \frac{\sqrt{۲}}{۲}AM = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{۱}{۲}BC = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times ۱ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها، صفحه‌های ۶۰ و ۶۴)

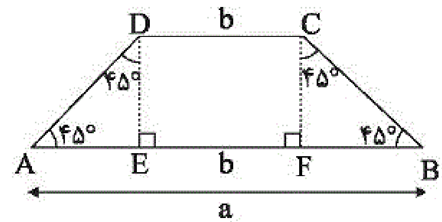
۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۳۷- **گزینهٔ «۴»** (محمدطاهر شجاعی)

مطابق شکل داریم $AE = BF = \frac{a-b}{2}$. مثلث‌های کناری قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین هستند پس $DE = CF = \frac{a-b}{2}$. در نتیجه داریم:

$$S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{1}{2} \times DE \times (CD + AB)$$

$$\Rightarrow 12 = \frac{1}{2} \times \frac{a-b}{2} \times (a+b)$$



اما بنا به فرض $a - b = \frac{1}{6}(a+b)$ در نتیجه:

$$12 \times 4 = (a-b) \times 6 \times (a-b) \Rightarrow (a-b)^2 = \frac{48}{6} = 8$$

$$\Rightarrow a - b = 2\sqrt{2} \Rightarrow a + b = 12\sqrt{2}$$

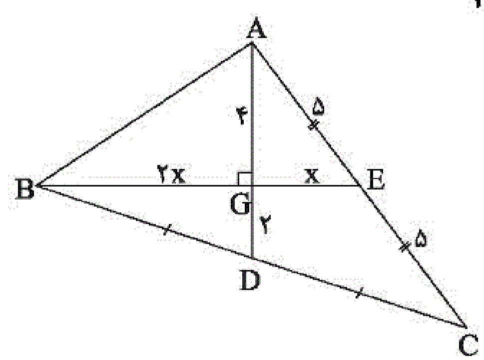
$$\begin{cases} a+b = 12\sqrt{2} \\ a-b = 2\sqrt{2} \end{cases} \xrightarrow{+} 2a = 14\sqrt{2} \Rightarrow a = 7\sqrt{2}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها، صفحه‌های ۶۱ تا ۶۳ و ۶۵)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۳۸- **گزینهٔ «۱»** (رضا عباسی‌اصل)

با توجه به این‌که میانه‌های هر مثلث همدیگر را به نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کنند، داریم:



$$AG = 2GD = 4$$

$$BG = 2GE = 2x$$

$$\overset{\Delta}{AGE}: GE^2 = AE^2 - AG^2 \Rightarrow x^2 = 25 - 16$$

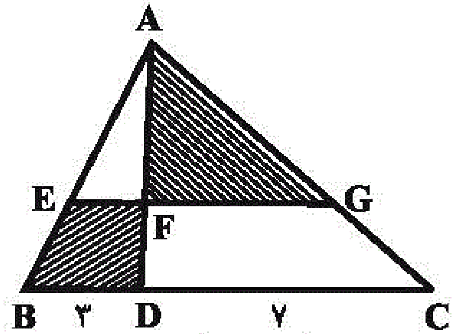
$$\Rightarrow x = 3 \Rightarrow BE = 3 \times 3 = 9$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها، صفحهٔ ۶۷)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۳۹- **گزینهٔ «۲»** *(سرژ یقیازاریان تبریزی)*

طبق قضیهٔ اساسی تشابه می‌توان نوشت،



$$EF \parallel BD \Rightarrow \overset{\Delta}{AEF} \sim \overset{\Delta}{ABD}$$

$$FG \parallel DC \Rightarrow \overset{\Delta}{AFG} \sim \overset{\Delta}{ADC}$$

$$\overset{\Delta}{AFG} \sim \overset{\Delta}{ADC} \Rightarrow \frac{S_{AFG}}{S_{ADC}} = \left(\frac{AF}{AD}\right)^{۲} = \frac{۹}{۱۶}$$

$$\overset{\Delta}{AEF} \sim \overset{\Delta}{ABD} \Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{ABD}} = \left(\frac{AF}{AD}\right)^{۲} = \frac{۹}{۱۶}$$

$$\frac{S_{AEF}}{S_{ABD}} = \frac{۹}{۱۶} \xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در صورت}} \frac{S_{BEFD}}{S_{ABD}} = \frac{۷}{۱۶} \Rightarrow S_{BEFD} = \frac{۷}{۱۶} S_{ABD}$$

دو مثلث ABD و ADC دارای ارتفاع مشترک هستند، بنابراین نسبت مساحت آن‌ها برابر است با نسبت قاعده‌های آن دو مثلث، بنابراین داریم،

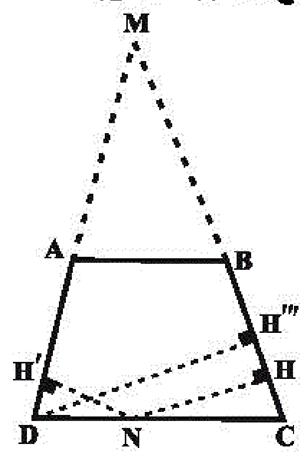
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{BD}{DC} = \frac{۳}{۷}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{BEFD}}{S_{AFG}} = \frac{\frac{۷}{۱۶} S_{ABD}}{\frac{۹}{۱۶} S_{ADC}} = \frac{۷}{۹} \times \frac{۳}{۷} = \frac{۱}{۳}$$

$\boxed{۱}$ $\boxed{۲}$✓ $\boxed{۳}$ $\boxed{۴}$

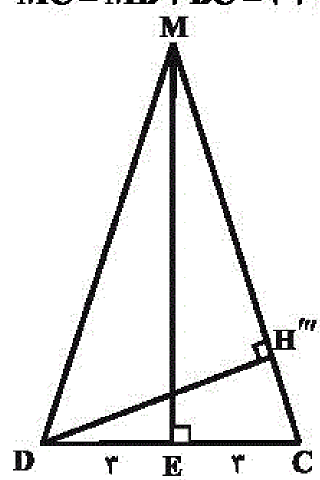
۱۴۰- **گزینهٔ «۲»** *(سرژ یقیازاریان تبریزی)*

طبق صورت سؤال، دو ساق AD و BC را امتداد می‌دهیم تا در نقطهٔ M همدیگر را قطع کنند. از نقطهٔ N واقع بر قاعدهٔ مثلث دو عمود NH و NH' را رسم می‌کنیم. به راحتی می‌توان متوجه شد که مثلث MDC متساوی‌الساقین است و مجموع طول دو عمود وارد بر ساق، برابر ارتفاع وارد بر ساق می‌باشد.



$$AB \parallel DC \Rightarrow \frac{MB}{MC}=\frac{AB}{DC} \Rightarrow \frac{MB}{MB+۳}=\frac{۲/۴}{۶} \Rightarrow MB=۲$$

$$MC=MB+BC=۳+۲=۵$$



$$ME=\sqrt{MC^۲-EC^۲}=\sqrt{۲۵-۹}=۴$$

$$ME \times DC = DH'' \times MC$$

$$\Rightarrow ۴\times۶=DH''\times۵ \Rightarrow DH''=۴/۸$$

$$\Rightarrow NH+NH'=۴/۸$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها : صفحهٔ ۶۸)

۴ ۳ ۲✓ ۱

۱۱۱- گزینهٔ «۲» *(مهدی نیک‌زاد)*

می‌دانیم عدد $۱۳!$ بر تمام اعداد کوچکتر یا مساوی ۱۳ بخش‌پذیر است. از طرفی ۱۲ بر اعداد یک رقمی ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۶ بخش‌پذیر است، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} ۱ | ۱۳! + ۱۲ \\ ۲ | ۱۳! + ۱۲ \\ ۳ | ۱۳! + ۱۲ \\ ۴ | ۱۳! + ۱۲ \\ ۶ | ۱۳! + ۱۲ \end{cases}$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۱ | ۲ ✓ | ۳ | ۴

۱۱۲- گزینهٔ «۳» *(منوچهر فاصی)*

$$۳^۳ \overset{۱۳}{\equiv} ۲۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{به توان} ۱۶} ۳^{۴۸} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۳^۲} ۳^{۵۰} \overset{۱۳}{\equiv} ۹$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۱ | ۲ | ۳ ✓ | ۴

۱۱۳- گزینهٔ «۱» *(نیلوفر مهروی)*

$$a = bq + r, ۰ \le r < b$$

$$۲۵۹ = bq + ۳۱ \Rightarrow bq = ۲۲۸ \xrightarrow{۰ \le r < b} b > ۳۱$$

بنابراین حالت‌های ممکن عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} b = ۳۸, q = ۶ \\ b = ۵۷, q = ۴ \\ b = ۷۶, q = ۳ \\ b = ۱۱۴, q = ۲ \\ b = ۲۲۸, q = ۱ \end{cases}$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۱ ✓ | ۲ | ۳ | ۴

۱۱۴- **گزینهٔ «۳»** (علی ایمانی)

$$\begin{cases}\forall a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a|0 & \text{همهٔ اعداد صحیح، صفر را می‌شمارند.}\\ 0|a \Rightarrow a=0 & \text{صفر، فقط خودش را می‌شمارد.}\end{cases}$$

$$0|x^2+3x+2 \Rightarrow x^2+3x+2=0 \Rightarrow \begin{cases}x=-1\\x=-2\end{cases}$$

برای هر عدد صحیح y رابطهٔ $y^2+2y+3|0$ برقرار است، پس بی‌شمار جواب صحیح برای y وجود دارد.

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$✓ $\boxed{4}$

۱۱۵- گزینهٔ «۳» *(نیلوفر مهروی)*

۱۱ عددی فرد و اول است که به صورت هیچ‌یک از فرم‌های 2^n-1 و 2^n+1 نوشته نمی‌شود، بنابراین گزینهٔ «۳» نادرست است. حال به اثبات دیگر گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ «۱»:

$$a=2k+1,(k\in\mathbb{Z})\Rightarrow a^2=(2k+1)^2\Rightarrow a^2=4k^2+4k+1$$

$$=4\underbrace{k(k+1)}_{2k'}+1=8k'+1$$

گزینهٔ «۲»:

$$a=k(k+1),(k\in\mathbb{N})\Rightarrow 4a+1=4k(k+1)+1$$

$$=4k^2+4k+1=(2k+1)^2$$

گزینه «۴»:

$$a=2k-1,(k\in\mathbb{Z})\Rightarrow a^2=(2k-1)^2=4k^2-4k+1$$

$$=2(\underbrace{2k^2-2k}_{k'})+1=2k'+1$$

$$a^3=(2k-1)^3=8k^3-12k^2+6k-1=2(\underbrace{4k^3-6k^2+3k}_{k''})-1=2k''-1$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۲، ۳ و ۸)

۱	۲	۳ ✓	۴

۱۱۶- **گزینهٔ «۲»** *(احمدرضا فلاح)*

$$a = bq + 23\ ,\ r < b \Rightarrow 23 < b \quad (1)$$

اگر طرفین رابطهٔ تقسیم را در ۳ ضرب کنیم، آنگاه داریم:

$$3a = 3bq + 69 \qquad (2)$$

از طرفی طبق فرض باقی‌مانده $3a$ بر b، عدد ۱۵ است، پس داریم:

$$3a = bq' + 15 \qquad (3)$$

$$(2),(3) \Rightarrow 3bq + 69 = bq' + 15 \Rightarrow b(\underbrace{q' - 3q}_{q''}) = 54$$

$$\Rightarrow bq'' = 54 \Rightarrow b \mid 54 \xrightarrow{(1)} b = 27, 54$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$✓ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$

۱۱۷- **گزینهٔ «۱»** *(علی ایمانی)*

$$3 \mid a + 2b \xrightarrow{\text{به توان}۲} 9 \mid a^2 + 4ab + 4b^2$$

از طرفی $9 \mid 9(ab + b^2)$ بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} 9 \mid a^2 + 4ab + 4b^2 \\ 9 \mid 9ab + 9b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 9 \mid a^2 - 5ab - 5b^2 \Rightarrow k = -5$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

$\boxed{1}$✓ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$

۱۱۸- **گزینهٔ «۲»** *(علی ایمانی)*

$$5^n + 12 \overset{13}{\equiv} 0 \Rightarrow 5^n \overset{13}{\equiv} -12 \overset{13}{\equiv} 1$$

$$5^2 \overset{13}{\equiv} 25 \overset{13}{\equiv} -1 \xrightarrow{\text{بتوان}\,2} 5^4 \overset{13}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{بتوان}\,k} 5^{4k} \overset{13}{\equiv} 1$$

$$\Rightarrow n = 4k\,(n < 20) \Rightarrow n = 4, 8, 12, 16$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۱   ۲ ✓   ۳   ۴

۱۱۹- **گزینهٔ «۴»** *(منوچهر خاصی)*

طبق ویژگی «۶» هم‌نهشتی، اگر $ac \overset{m}{\equiv} bc$ و $(m,c) = 1$، آنگاه $a \overset{m}{\equiv} b$ است.

بنابراین داریم:

$$a^3 - 1 \overset{m}{\equiv} a^2 + a + 1 \Rightarrow (a-1)(a^2+a+1) \overset{m}{\equiv} a^2 + a + 1$$

$$\xrightarrow[(a^2+a+1,m)=1]{\div(a^2+a+1)} a - 1 \overset{m}{\equiv} 1 \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} 2$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۱   ۲   ۳   ۴ ✓

۱۲۰- گزینهٔ «۳» (افشین خاصه خان)

$$d|2a-5 \xrightarrow{\times 2} \left.\begin{array}{l} d|4a-10 \\ d|4a+4 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d|14$$

با توجه به اینکه $2a-5$ عددی فرد است، پس d قطعاً فرد بوده و چون

$d \neq 1$، پس $d=7$ است.

رقم یکان هر عدد طبیعی با خود عدد به پیمانهٔ ۱۰ هم‌نهشت است، پس داریم:

$$13 \overset{10}{\equiv} 3 \Rightarrow 13^7 \overset{10}{\equiv} 3^7$$

$$3^2 \overset{10}{\equiv} 9 \overset{10}{\equiv} -1 \xrightarrow{\text{به‌توان ۳}} 3^6 \overset{10}{\equiv} -1 \xrightarrow{\times 3} 3^7 \overset{10}{\equiv} -3 \overset{10}{\equiv} 7$$

$$\Rightarrow 13^7 \overset{10}{\equiv} 7$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۹ تا ۱۴ و ۱۸ تا ۲۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۲۱- گزینهٔ «۱» (کتاب آبی کنکور)

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b} \Rightarrow \frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a+b}$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 = ab \quad (*)$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+2ab=ab \Rightarrow a^2+b^2+ab=0$$

$$\xrightarrow{(*)} a^2+b^2+(a+b)^2=0$$

رابطهٔ اخیر به ازای هیچ زوج مرتبی مانند (a,b) که در آن a و b اعداد

صحیح و غیرصفر باشند، برقرار نیست.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۸)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۲۲- **گزینهٔ «۳»** (کتاب آبی کنکور)

گزینهٔ «۱»: $a^{۳}|b^{۲} \xrightarrow{b^{۲}|b^{۳}} a^{۳}|b^{۳} \Rightarrow a|b$

گزینه «۲»: $\left.\begin{matrix} a^{۳}|b^{۲} \\ a|b \end{matrix}\right\} \overset{\times}{\Rightarrow} a^{۴}|b^{۳}$

گزینهٔ «۴»: $\left.\begin{matrix} a^{۳}|b^{۲} \\ a^{۴}|b^{۳} \end{matrix}\right\} \overset{\times}{\Rightarrow} a^{۷}|b^{۵}$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۲۳- **گزینهٔ «۴»** (کتاب آبی کنکور)

$$(۴n+۷,۵n+۹)=d \Rightarrow \begin{cases} d\,|\,۴n+۷ \\ d\,|\,۵n+۹ \end{cases}$$

$$\Rightarrow d\,|\,۵(۴n+۷)-۴(۵n+۹) \Rightarrow d\,|-۱ \Rightarrow d=۱$$

پس به ازای تمامی مقادیر $۵۰ \le n \le ۱$، ب.م.م این دو عدد برابر ۱ است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۹ تا ۱۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۲۴- **گزینهٔ «۲»** (کتاب آبی کنکور)

$$۸۰۲ = ۱۴b + r \xrightarrow{۰ \le r < b} \begin{cases} r = ۸۰۲ - ۱۴b \ge ۰ \Rightarrow b \le ۵۷ \\ r = ۸۰۲ - ۱۴b < b \Rightarrow b \ge ۵۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۵۴ \le b \le ۵۷$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۲۵- **گزینهٔ «۲»** (کتاب آبی کنکور)

بر طبق قضیهٔ تقسیم (۱) $b < ۳۷ \leq ۰$ و $a = ۲۱b + ۳۷$ است.

$$۱۰۰ \leq ۲۱b + ۳۷ \leq ۹۹۹ \Rightarrow ۳ \leq b \leq ۴۵ \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow ۳۸ \leq b \leq ۴۵$$

$$۲۱ = ۵k_۱ + ۱ \quad , \quad ۳۷ = ۵k_۲ + ۲$$

$$\Rightarrow a = (۵k_۱ + ۱)b + ۵k_۲ + ۲$$

$$\Rightarrow a = ۵k' + b + ۲$$

اگر a مضرب ۵ باشد، آنگاه $b + ۲$ مضرب ۵ خواهد بود، یعنی $b = ۵k - ۲$ است و داریم:

$$۳۸ \leq ۵k - ۲ \leq ۴۵ \Rightarrow ۴۰ \leq ۵k \leq ۴۷ \Rightarrow ۸ \leq k \leq ۹$$

بنابراین فقط دوجواب برای a، مضرب ۵ است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۴ تا ۱۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۲۶- **گزینهٔ «۲»** (کتاب آبی کنکور)

$$۱۳^۲ \overset{۱۷}{\equiv} ۱۶۹ \overset{۱۷}{\equiv} -۱ \xrightarrow{\text{به‌توان } ۲۱} ۱۳^{۴۲} \overset{۱۷}{\equiv} -۱$$

$$\xrightarrow{\times ۱۳} ۱۳^{۴۳} \overset{۱۷}{\equiv} -۱۳ \Rightarrow ۱۳^{۴۳} \overset{۱۷}{\equiv} -۱۳ + ۱۷ \overset{۱۷}{\equiv} ۴$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۲۷- **گزینهٔ «۱»** (کتاب آبی کنکور)

گزینهٔ «۴»
$$۱۸a \overset{۹}{\equiv} ۱۲b \xrightarrow[(۹,۶)=۳]{\div ۶} ۳a \overset{\frac{۹}{۳}}{\equiv} ۲b \Rightarrow ۳a \overset{۳}{\equiv} ۲b$$

گزینهٔ «۲»
$$۳a \overset{۳}{\equiv} ۲b \Rightarrow ۰ \overset{۳}{\equiv} ۲b \xrightarrow[(۲,۳)=۱]{\div ۲} b \overset{۳}{\equiv} ۰$$

گزینهٔ «۳»
$$\left.\begin{array}{l} ۳a \overset{۳}{\equiv} ۲b \\ ۰ \overset{۳}{\equiv} b \end{array}\right\} \Rightarrow ۳a - ۰ \overset{۳}{\equiv} ۲b - b \Rightarrow ۳a \overset{۳}{\equiv} b$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۲۸- **گزینهٔ «۲»** (کتاب آبی کنکور)

چون دو عدد ۶۸ و ۱۴۵ بر m باقی‌ماندهٔ مساوی دارند. پس،

$$۱۴۵ \overset{m}{\equiv} ۶۸$$

از طرفین ۶۸ را کم می‌کنیم تا طرف دوم صفر شود.

$$۱۴۵ - ۶۸ \overset{m}{\equiv} ۶۸ - ۶۸$$

$$۷۷ \overset{m}{\equiv} ۰ \xrightarrow{\text{طرفین}\times ۲} ۱۵۴ \overset{m}{\equiv} ۰$$

اگر به طرفین ۶ واحد اضافه کنیم، آن‌گاه به ۱۶۰ می‌رسیم.

$$۱۵۴ + ۶ \overset{m}{\equiv} ۰ + ۶ \Rightarrow ۱۶۰ \overset{m}{\equiv} ۶ \Rightarrow r = ۶$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۲۹- **گزینهٔ «۴»** (کتاب آبی کنکور)

$$11^2 \overset{19}{\equiv} 121 \overset{19}{\equiv} 7 \xrightarrow{\times 11} 11^3 \overset{19}{\equiv} 77 \overset{19}{\equiv} 77 - 4\times 19 \overset{19}{\equiv} 1$$

$$\xrightarrow{\text{به‌توان } k} 11^{3k} \overset{19}{\equiv} 1$$

پس a باید مضرب ۳ باشد، بنابراین داریم:

$$9 < a \le 99 \Rightarrow 9 < 3k \le 99 \Rightarrow 3 < k \le 33$$

$$\Rightarrow n(k) = 33 - 3 = 30$$

پس ۳۰ مقدار برای k و به‌همین ترتیب برای a وجود دارد تا رابطهٔ فوق برقرار باشد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۳۰- **گزینهٔ «۲»** (کتاب آبی کنکور)

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{5}{\equiv} 1 \Rightarrow a = 5t+1 \\ a \overset{4}{\equiv} 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 5t+1 \overset{4}{\equiv} 1 \Rightarrow t \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow t = 4q$$

$$a = 5t+1 = 5\times 4q + 1 \Rightarrow a = 20q+1$$

از طرفی درصورت سؤال ذکر شده که، عدد a مضرب ۱۱ است، بنابراین داریم:

$$20q+1 \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow 20q \overset{11}{\equiv} -1 \overset{11}{\equiv} -1+11 \overset{11}{\equiv} 10$$

$$\xrightarrow[(11,10)=1]{\div 10} 2q \overset{11}{\equiv} 1 \overset{11}{\equiv} 1+11 \overset{11}{\equiv} 12$$

$$\xrightarrow[(11,2)=1]{\div 2} q \overset{11}{\equiv} 6 \Rightarrow q = 11k+6$$

$$\Rightarrow a = 20(11k+6)+1 \Rightarrow a = 220k+121$$

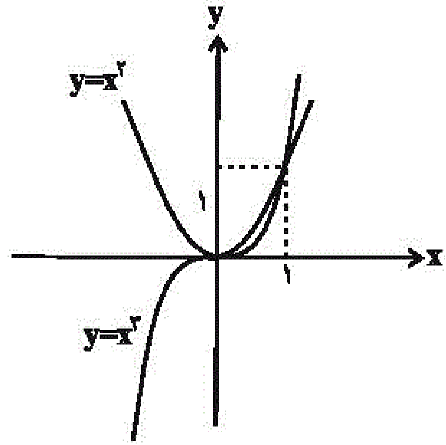
که به ازای $k = 0,1,2,3$ عددی سه‌رقمی برای a به‌دست می‌آید.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۸۱- **گزینهٔ «۲»** *(سیروس نصیری)*

نمودارهای دو تابع را در یک دستگاه مختصات مطابق شکل زیر رسم می‌کنیم. دقت کنید که $x=0$ و $x=1$ طول نقاط مشترک دو نمودار است.



با توجه به نمودارها، مشخص است که مجموعهٔ موردنظر به صورت $(-\infty,1)-\{0\}$ است.

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow a+b=1$$

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۱ | ۲✓ | ۳ | ۴

۸۲- **گزینهٔ «۲»** *(عرفان صادقی)*

باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x+1$ برابر $f(-1)$ است.

$$\Rightarrow f(-1)=1-m-2=2 \Rightarrow m=-3$$

$$\Rightarrow f(x)=x^2-3x-2$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-1$ برابر $f(1)$ است،

$$f(1)=1-3-2=-4$$

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۱ | ۲✓ | ۳ | ۴

۸۳- **گزینهٔ «۳»** *(سروش موئینی)*

می‌دانیم a^5+b^5 بر $a+b$ بخش‌پذیر است. پس داریم،

$$x^{10}+32=(x^2)^5+2^5=(x^2+2)Q(x)$$

پس $x^{10}+32$ بر x^2+2 بخش‌پذیر است.

۱ | ۲ | ۳✓ | ۴

۸۴- گزینهٔ «۱» (طاهر دارستانی)

دامنهٔ تابع $\frac{g}{f}$ اشتراک دامنه‌های دو تابع است که صفرهای تابع f از آن حذف می‌شود.

$$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g - \{x \in D_f \mid f(x) = ۰\}$$

اشتراک دامنه‌های دو تابع، مجموعهٔ $\{۱,۲,۳\}$ و صفر تابع f نیز $x = ۳$ می‌باشد. پس داریم:

$$D_{\frac{g}{f}} = \{۱,۲,۳\} - \{۳\} = \{۱,۲\}$$

$$\Rightarrow \frac{g}{f} = \{(۱,-\frac{۱}{۳}),(۲,۱)\} \Rightarrow \text{مجموع اعضای برد} = ۱ - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

(حسابان ۱- تابع، صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۸۵- گزینهٔ «۲» (طاهر دارستانی)

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \{-۲ \le x \le ۵ \mid -۲ \le g(x) \le ۴\} \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} \{-۲,-۱,۲,۳,۴,۵\}$$

دقت کنید که ضابطهٔ تابع g به صورت زیر است و $g(۰)$ و $g(۱)$ در بازهٔ $[-۲,۴]$ قرار ندارند.

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{۵}{۲}x - ۴ & ; -۲ \le x \le ۰ \\ \frac{۷}{۵}x - ۴ & ; ۰ \le x \le ۵ \end{cases} \Rightarrow g(۰) = -۴, g(۱) = -\frac{۱۳}{۵} \notin [-۲,۴]$$

(حسابان ۱- تابع، صفحه‌های ۶۶ تا ۷۰)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

۸۶- **گزینهٔ «۱»** (کاظم اجلالی)

دامنهٔ تابع fof به صورت زیر است:

$$D_{fof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_f\}=\{-1\le x\le 2 \mid -1\le \frac{2}{3}x-k\le 2\}$$

نامعادلهٔ دوم در تعریف بالا به صورت زیر است:

$$-1\le \frac{2}{3}x-k\le 2 \Rightarrow k-1\le \frac{2}{3}x\le k+2 \Rightarrow \frac{3k-3}{2}\le x\le \frac{3k+6}{2}$$

$$\Rightarrow D_{fof}=[-1,2]\cap\left[\frac{3k-3}{2},\frac{3k+6}{2}\right]=[-1,2]$$

بنابراین بازهٔ $[-1,2]$ باید زیرمجموعهٔ بازهٔ $\left[\frac{3k-3}{2},\frac{3k+6}{2}\right]$ باشد:

$$[-1,2]\subseteq\left[\frac{3k-3}{2},\frac{3k+6}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-1\ge \frac{3k-3}{2}\Rightarrow 3k\le 1\Rightarrow k\le \frac{1}{3}\\ 2\le \frac{3k+6}{2}\Rightarrow 3k\ge -2\Rightarrow k\ge -\frac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow -\frac{2}{3}\le k\le \frac{1}{3}$$

(حسابان ۱- تابع، صفحه‌های ۶۶ تا ۷۰)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۸۷- **گزینهٔ «۳»** (حمید مام قادری)

ابتدا برد تابع g را به دست می‌آوریم.

$$g(x)=-\frac{1}{3}(3x-[3x])+\frac{1}{3}$$

از طرفی می‌دانیم که $0\le x-[x]<1$، پس داریم:

$$0\le 3x-[3x]<1\Rightarrow -\frac{1}{3}<-\frac{1}{3}(3x-[3x])\le 0$$

$$\Rightarrow 0<-\frac{1}{3}(3x-[3x])+\frac{1}{3}\le \frac{1}{3}$$

چون f اکیداً صعودی است، پس:

$$0<g(x)\le \frac{1}{3}\Rightarrow f(0)<f(g(x))\le f(\frac{1}{3})$$

$$\Rightarrow R_{fog}=(1,2]$$

(حسابان ۱- تابع، صفحه‌های ۶۶ تا ۷۰)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

۸۸- **گزینهٔ «۱»** (حمیدرضا نوش‌کاران)

$$۳\le \frac{۳x}{۲}\le ۶\Rightarrow ۲\le x\le ۴\Rightarrow D_{y=f(\frac{۳x}{۲})}=[۲,۴]$$

$$-۲\le x-۳\le ۱\Rightarrow ۱\le x\le ۴\Rightarrow D_{y=g(x-۳)}=[۱,۴]$$

پس دامنهٔ تابع h، اشتراک دامنه‌های توابع $f(\frac{۳x}{۲})$ و $g(x-۳)$ است.

یعنی: $D_h=[۲,۴]\bigcap[۱,۴]=[۲,۴]$

(حسابان ۱- تابع، صفحه‌های ۶۳ تا ۷۰)

✓ ۱ | ۲ | ۳ | ۴

۸۹- **گزینهٔ «۲»** (علی شورابی)

$$f^{-1}(g^{-1}(a))=۹\Rightarrow f(۹)=g^{-1}(a)\Rightarrow ۲۱=g^{-1}(a)$$

$$\Rightarrow g(۲۱)=a\Rightarrow \frac{۲۱+۳}{۲۱-۱}=a\Rightarrow a=\frac{۲۴}{۲۰}=۱/۲$$

(حسابان ۱- تابع، صفحه‌های ۶۶ تا ۷۰)

۱ | ✓ ۲ | ۳ | ۴

۹۰- **گزینهٔ «۱»** (عرفان صادقی)

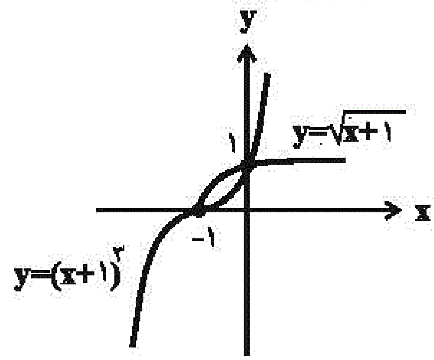
نمودار تابع f بالاتر از g است، بنابراین داریم:

$$f(x) > g(x) \Rightarrow -1 + \sqrt{x+1} > x^3 + 3x^2 + 3x$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} > x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} > (x+1)^3$$

با رسم نمودارهای دو تابع $y = \sqrt{x+1}$ و $y = (x+1)^3$ در یک دستگاه، می‌توانیم جواب نامعادلهٔ بالا را بیابیم:



با توجه به نمودارها، بازهٔ موردنظر $(-1,0)$ می‌باشد.

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow b - a = 1$$

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۴)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۹۱- **گزینهٔ «۲»** (علی سلامت)

برای تبدیل نمودار تابع g به نمودار h ابتدا لازم است آن را ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم. پس مختصات نقطهٔ A پس از این انتقال به صورت $A'(a,1)$ خواهد بود.

در ضمن می‌دانیم نقطهٔ A بر روی تابع $g(x)$ قرار دارد، پس داریم:

$$g(2) = -1 \Rightarrow f(4-1) - 1 = -1 \Rightarrow f(3) = 0$$

حال ورودی تابع $y = f(3x+4)+1$ را برابر ۳ قرار می‌دهیم تا طول نقطه جدید به دست آید.

$$3a + 4 = 3 \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \Rightarrow A'(-\frac{1}{3},1)$$

بنابراین نقطهٔ جدید در ربع دوم قرار دارد.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۹۲- **گزینهٔ «۲»** (میلاد هاشمی)

با توجه به آنکه برد تابع $y=f(x)$ با $y=f(3x+1)$ برابر است داریم:

$$R_f=[-4,4]\Rightarrow R_{y=2f(3x+1)}=[-8,8]$$

$$\Rightarrow R_{y=2f(3x+1)-2}=[-10,6]\Rightarrow R_{y=|2f(3x+1)-2|}=[0,10]$$

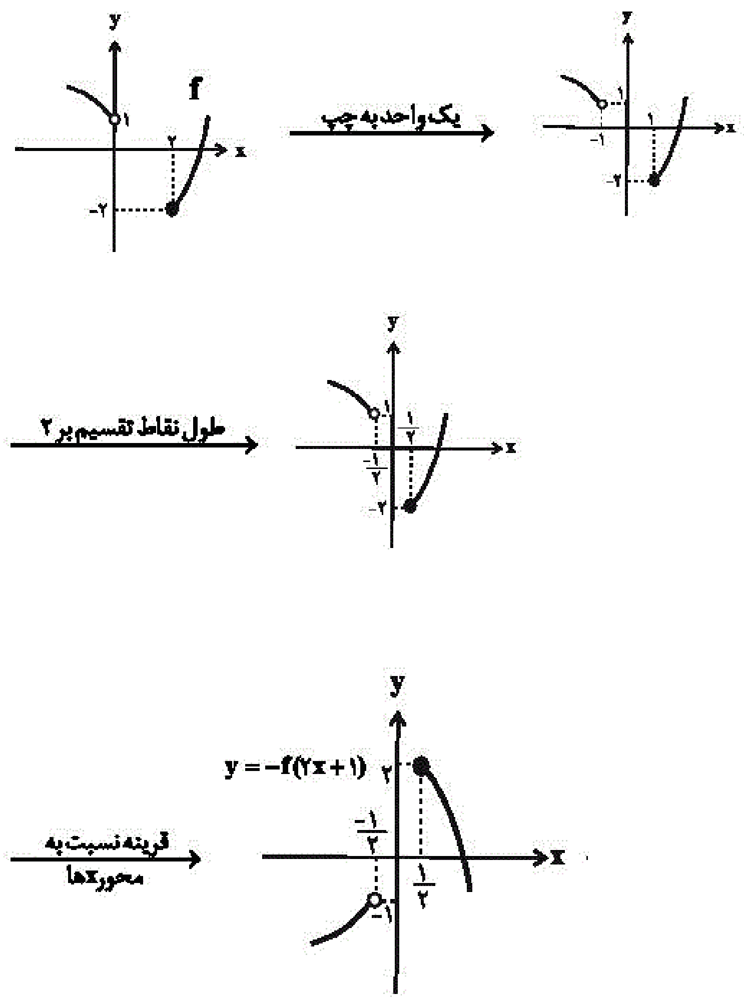
بیشترین مقدار تابع برابر ۱۰ است.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۹۳- **گزینهٔ «۲»** (سعید علم‌پور)

نمودار تابع $y=-f(2x+1)$ از روی f چنین است:



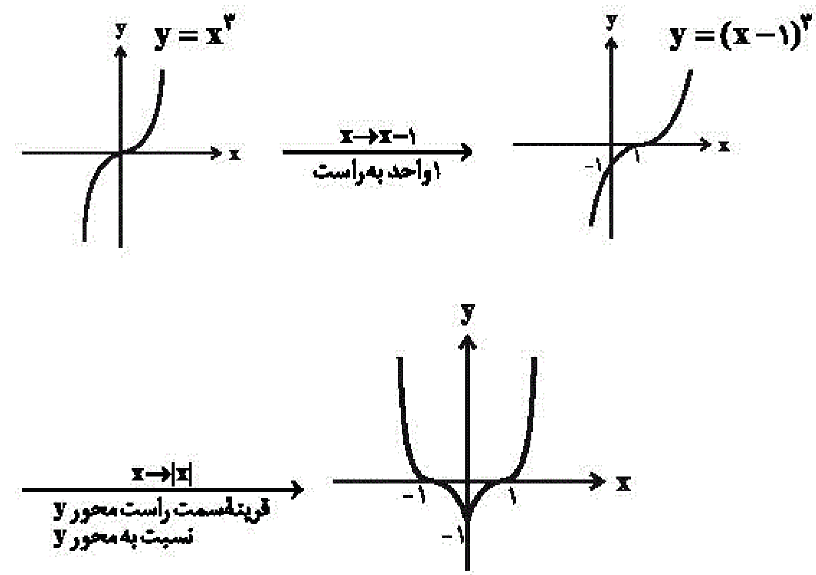
پس نمودار تابع خواسته شده فقط از ناحیهٔ دوم نمی‌گذرد.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۹۴- گزینهٔ «۳» (علی شورایی)

نمودار f را رسم می‌کنیم:



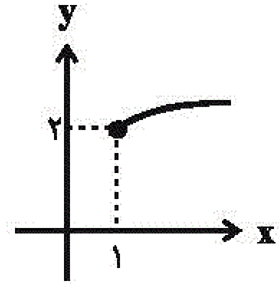
تابع نهایی، در بازهٔ $[0,+\infty)$ صعودی اکید است، پس حداقل مقدار a برابر صفر است.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۹۵- گزینهٔ «۴» (وحید ون‌آبادی)

نمودار تابع f برای $x \geq 1$ در شکل زیر رسم شده است:



برای اینکه تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً یکنوا باشد، لازم است خط $y = ax - 2$ اکیداً صعودی باشد، با این شرط که در $x = 1$، مقدار آن بیشتر از ۲ نباشد:

$$y = ax - 2 \Rightarrow \begin{cases} \text{صعودی}: a > 0 \\ x = 1 : y = a - 2 \leq 2 \Rightarrow a \leq 4 \end{cases} \Rightarrow 0 < a \leq 4$$

اعداد صحیح این بازه، ۱، ۲، ۳ و ۴ هستند.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۹۶- گزینهٔ «۳» (حسین شفیع‌زاده)

تابع f روی هر کدام از بازه‌های $(-\infty, -1]$ و $[0, +\infty)$ صعودی و در بازهٔ $[-1, 0]$ نزولی است. بنابراین برای آن‌که تابع $f+g$ صعودی باشد، لازم است g نیز صعودی باشد، تا قسمت نزولی نمودار f را خنثی کند.

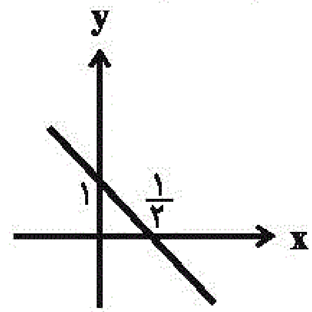
ضابطهٔ تابع در بازهٔ $[-1, 0]$ به صورت $f(x) = -2x$ است، پس اگر $g(x) = 2x$ باشد، تابع $f+g$ در این بازه تابع ثابت صفر است و شرط صعودی بودن $f+g$ برقرار می‌شود. واضح است که برای $a > 2$ نیز این شرط برقرار است. در نتیجه کم‌ترین مقدار a برابر ۲ است.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۹۷- گزینهٔ «۳» (حبیب شفیعی)

اگر $x<1$ باشد، برای تعیین ضابطهٔ $y=f(f(x))=f(-2x+1)$، ابتدا نمودار $y=-2x+1$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، اگر $x>0$ باشد، $-2x+1<1$ و اگر $x<0$ باشد، $-2x+1>1$ است. بنابراین:

$$y=f(-2x+1)=\begin{cases}-2(-2x+1)+1 & ;0<x<1\\(-2x+1)+2 & ;x<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow y=\begin{cases}4x-1 & ;0<x<1\\-2x+3 & ;x<0\end{cases}$$

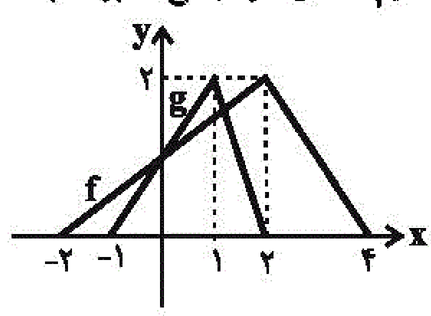
می‌دانیم نمودار $y=4x-1$ اکیداً صعودی و نمودار تابع $y=-2x+3$ اکیداً نزولی است. پس نمودار f روی $(-\infty,1)$ غیریکنوا است.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۹۸- گزینهٔ «۱» (جوانبخش نیکنام)

نمودار تابع g از تقسیم x های نمودار تابع f بر ۲ بدست می‌آید.



تابع fog هنگامی اکیداً نزولی است که یکی از توابع f یا g نزولی و دیگری صعودی باشد.

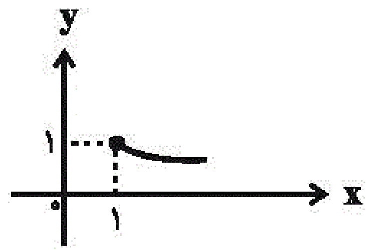
تابع g در فاصلهٔ $[1,2]$ نزولی اکید و تابع f در همین فاصله صعودی اکید است، پس fog در این بازه نزولی اکید است و بیشترین مقدار $b-a$ برابر ۱ خواهد بود.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۸)

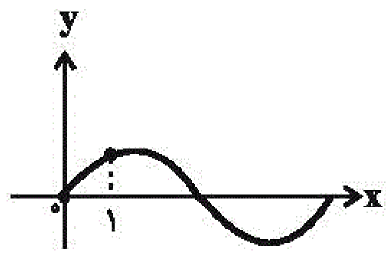
۱✓ ۲ ۳ ۴

۹۹- گزینهٔ «۲» (علی شهرابی)

تابع $h(x)=\frac{1}{x}$ با دامنهٔ $x\geq 1$ یک تابع نزولی است.



تابع $g(x)=\sin x$ با دامنهٔ $[0,1]$، یک تابع صعودی است،



تابع f، همان goh است. ترکیب یک تابع صعودی و یک تابع نزولی، یک تابع نزولی است، پس f نزولی است.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۰۰- گزینهٔ «۳» (سعید علم‌پور)

تابع f روی $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$ اکیداً نزولی است.

$$f(x+1)\leq f(2x-3)\Rightarrow x+1\geq 2x-3\Rightarrow x\leq 4 \quad (1)$$

هم‌چنین مقدار ورودی تابع f نباید برابر ۱ باشد، پس داریم،

$$(x+1)\in\mathbb{R}-\{1\}\Rightarrow x\neq 0 \qquad (2)$$

$$(2x-3)\in\mathbb{R}-\{1\}\Rightarrow x\neq 2 \qquad (3)$$

$\xrightarrow{(1),(2),(3)}$ مجموعه جواب نامعادله $=(-\infty,4]-\{0,2\}$

این بازه سه عدد طبیعی ۱، ۳ و ۴ را شامل می‌شود.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۱- گزینهٔ «۴» *(مهدی نیک‌زاد)*

وارون وارون هر ماتریس، برابر خود آن ماتریس است، پس داریم:

$$A=(A^{-1})^{-1}=\frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix}-۱ & -۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^{۲}=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۲}$، برابر ۲ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

۱۰۲- گزینهٔ «۴» *(علی ایمانی)*

دستگاه $\begin{cases}ax+۳y=۵\\ ۲x+y=۷\end{cases}$ جواب ندارد، بنابراین $\frac{a}{۲}=\frac{۳}{۱}\neq\frac{۵}{۷}$، در نتیجه $a=۶$ است.

با جایگذاری در دستگاه معادلات خطی دوم خواهیم داشت:

$$\begin{cases}۲x-ay=-۲a\\ -x+۳y=a\end{cases}\xrightarrow{a=۶}\begin{cases}۲x-۶y=-۱۲\\ -x+۳y=۶\end{cases}\Rightarrow\frac{۲}{-۱}=\frac{-۶}{۳}=\frac{-۱۲}{۶}$$

پس این دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحهٔ ۲۶)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

۱۰۳- گزینهٔ «۳» *(جواد حاتمی)*

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۲ & ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۲ & ۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶ & ۳ & ۳\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۶ & ۳ & ۳\end{bmatrix}=۳A$$

$$\Rightarrow A^{۳}=A^{۲}\times A=۳A\times A=۳A^{۲}=۳(۳A)=۹A$$

$$\Rightarrow A^{۶}=(A^{۳})^{۲}=(۹A)^{۲}=۸۱A^{۲}=۸۱(۳A)=۲۴۳A$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

۱۰۴- گزینهٔ «۲» *(سهام حمیدی‌پور)*

$$\begin{bmatrix}a & b\\ a' & b'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\\ ۲\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\ ۲\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳c+۴\\ -c+۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x+y=۳c+۴-c+۲=۲c+۶=۱۲\Rightarrow ۲c=۶\Rightarrow c=۳$$

بنابراین داریم: $y=-c+۲=-۳+۲=-۱$

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

۱۰۵- **گزینهٔ «۱»** (سوام میدی‌پور)

$$\mathbf{BA - I = C \Rightarrow BA = I + C \Rightarrow A = B^{-1}(I + C)} \quad (۱)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}^{-۱} = \frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \mathbf{A} = \frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} -۴ & ۸ \\ -۵ & ۷ \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس $\mathbf{A}$ برابر است با:

$$\frac{۱}{۴}(-۴ + ۸ - ۵ + ۷) = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۰۶- **گزینهٔ «۱»** (امیرحسین ابومحبوب)

$$\mathbf{A}^۲ = \begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

برای به دست آوردن ستون سوم ماتریس $\mathbf{A}^۴$، کافی است ماتریس $\mathbf{A}^۲$ را در ستون سوم همین ماتریس ضرب کنیم:

$$\text{ستون سوم } \mathbf{A}^۴ = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ \\ ۰ \\ -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۰۷- **گزینهٔ «۳»** (جواد حاتمی)

با توجه به گزینه‌ها، وارون $\mathbf{I + ۲A}$ به صورت ماتریس $\mathbf{I + \alpha A}$ خواهد بود. داریم:

$$\mathbf{(I + ۲A)(I + \alpha A) = I \Rightarrow I + \alpha A + ۲A + \underbrace{۲\alpha A^۲}_{\bar{O}} = I}$$

$$\Rightarrow \mathbf{\alpha A + ۲A = \bar{O} \Rightarrow (\alpha + ۲)A = \bar{O} \Rightarrow \alpha = -۲}$$

$$\Rightarrow \mathbf{(I + ۲A)^{-۱} = I - ۲A}$$

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

۱۰۸- گزینهٔ «۳» (افشین خاصه‌خان)

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ 3 & -5\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{17}\begin{bmatrix}-5 & -b\\ -3 & a\end{bmatrix}$$

$$AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B\Rightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{17}\begin{bmatrix}-5 & -b\\ -3 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ 3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{17}(-25-3b)\xrightarrow{x=-2}-2=\frac{1}{17}(-25-3b)$$

$$\Rightarrow -25-3b=-34\Rightarrow b=3$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۳ تا ۲۵)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۹- گزینهٔ «۲» (احمدرضا فلاح)

دستگاه $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$ با شرط $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ بی‌شمار جواب و با شرط $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ جواب منحصر به فرد دارد و در حالت $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ جواب ندارد.

$$\begin{cases}mx+2y=-4\\ 3x+(m-1)y=6\end{cases}\xrightarrow{\text{دستگاه بی‌شمار جواب دارد}}\frac{m}{3}=\frac{2}{m-1}=\frac{-4}{6}\quad(1)$$

$$\frac{m}{3}=\frac{2}{m-1}\Rightarrow m^2-m=6\Rightarrow m^2-m-6=0\Rightarrow\begin{cases}m=3\\ m=-2\end{cases}$$

که فقط $m=-2$ در رابطهٔ (۱) صدق می‌کند.

الف) $\begin{cases}mx+3y=4\\ 3x-my=5\end{cases}\xrightarrow{m=-2}\frac{-2}{3}\neq\frac{3}{2}\Rightarrow$ دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.

ب) $\begin{cases}4mx+4y=m-1\\ 2x-y=4\end{cases}\xrightarrow{m=-2}\frac{-8}{2}=\frac{4}{-1}\neq\frac{-3}{4}$ دستگاه جواب ندارد.

پ) $\begin{cases}3mx-y=4\\ 6x+y=m-2\end{cases}\xrightarrow{m=-2}\frac{-6}{6}=\frac{-1}{1}=\frac{4}{-4}\Rightarrow$ دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحهٔ ۲۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۱۰- گزینهٔ «۴» (احمدرضا فلاح)

ماتریس مربعی B هم مرتبه با A را وارون A می‌نامند، هرگاه $AB=BA=I$ باشد و می‌نویسیم $A^{-1}=B$ داریم:

$$(A+I)^3=\bar{O}\Rightarrow A^3+3A^2+3A+I=\bar{O}$$

$$\Rightarrow A(A^2+3A+3I)=-I\Rightarrow A(-A^2-3A-3I)=I$$

$$\Rightarrow A^{-1}=-A^2-3A-3I$$

$$\Rightarrow A^{-1}+I=(-A^2-3A-3I)+I$$

$$=-A^2-3A-2I=-(A^2+3A+2I)$$

$$=-(A+I)(A+2I)$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓