



RIAZISARA

www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات
و...**

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)

<https://t.me/riazisara>



ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)

<https://www.instagram.com/riazisara.ir>



۸۱- مجموع تمام اعداد حسابی بین ۱۱۳ تا ۷۱۶ که بر ۶ بخش پذیرند، کدام است؟

- ۴۱۸۱ (۴) ۴۱۸۱۴ (۳) ۴۱۸۴۱ (۲) ۴۱۴۱۸ (۱)

۸۲- مجموع ده جمله اول از دنباله $2^{-n} - 2^n, \dots, 2^{-2} - 2^2, 2^{-1} - 2^1$ کدام است؟

- $2 \times \frac{1024}{1023}$ (۱) $\frac{2047}{1024}$ (۲)
 $\frac{2 \times 2047}{1024}$ (۳) $\frac{1023 \times 2047}{1024}$ (۴)

۸۳- در دنباله هندسی غیر ثابت $\dots, 6a, 3a$ مجموع n جمله اول برابر $765a$ است. n کدام است؟

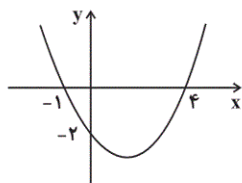
- ۱۰ (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴)

۸۴- اعداد فرد طبیعی را به طریقی دسته بندی می کنیم که عدد آخر هر دسته تنها مربع کامل آن دسته

باشد: $\dots, (25, 13, \dots, 11), (9, 7, 5, 3), (1)$ مجموع جملات دسته یازدهم کدام است؟

- ۸۰۶۰ (۱) ۱۶۱۲۰ (۲) ۸۰۴۰ (۳) ۱۶۰۸۰ (۴)

۸۵- نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به شکل زیر است. مقدار $f(-2)$ کدام است؟



- ۱ (۱)
 ۲ (۲)
 ۳ (۳)
 ۴ (۴)

۸۶- به ازای کدام مقدار k ریشه های معادله $2x^2 - kx + (k-1) = 0$ به صورت $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ هستند؟

- (۱) فقط صفر (۲) فقط ۴ (۳) صفر یا ۴ (۴) نشدنی

۸۷- علامت ریشه های معادله $x^2 - 3x - 10 = |x| - 2$ کدام است؟

- (۱) دو ریشه منفی (۲) دو ریشه مثبت
 (۳) دو ریشه غیر هم علامت (۴) ریشه ندارد.

۸۸- اگر $x = 2$ یکی از صفرهای تابع $y = x^3 - x^2 + kx + 4$ باشد، مجموع مربعات دو صفر دیگر تابع چقدر است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۸۹- به ازای چند مقدار صحیح m معادله $x^4 - 2\sqrt{3}x^2 + m^2 - 1 = 0$ دارای دو جواب حقیقی است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۹۰- معادله $\frac{3}{x+3} - \frac{2}{x} = \frac{12}{9-(x+3)^2}$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) بی شمار

۹۱- در یک مغازه زیتون فروشی، زیتون در محلول آب نمک با غلظت ۸ درصد نگهداری می شود. به علت تازه کار بودن کارگر مغازه، ۲۰۰

کیلوگرم محلول آب نمک با غلظت ۴ درصدی ساخته شده است. اگر فقط ۵ کیلوگرم نمک در دسترس باشد و کارگر همه ۵ کیلوگرم نمک را

به محلول بیفزاید، چند کیلوگرم از آب محلول باید تبخیر شود تا به غلظت ۸ درصد برسد؟

- (۱) ۴۲/۵ (۲) ۳۷/۵ (۳) ۲۹ (۴) ۲۴

۹۲- اگر $x = a$ جواب معادله $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} = 5$ باشد، جواب معادله $\sqrt{x+a} - x = 1$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۹۳- معادله $3\sqrt{x+|x|-1} + \sqrt{2x^3-x} = 0$ چند ریشه دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۹۴- به ازای چند مقدار m ، مجموعه جواب معادله $\frac{m}{2x} = \frac{3-x}{2x-x^2}$ برابر تهی می شود؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۹۵- اگر $a > 0 > b$ و $|b| > |a|$ باشد، آنگاه حاصل $|2a-b| + |b+a| - |b|$ همواره کدام است؟

- (۱) $a-b$ (۲) a (۳) b (۴) $b-a$

۹۶- حدود k چقدر باشد تا معادله $|6x - x^2| = k$ چهار جواب داشته باشد؟

(۲) $8 < k < 10$

(۱) $0 < k < 9$

(۴) $k > 9$

(۳) $k \geq 9$

۹۷- حاصل ضرب ریشه‌های معادله $\sqrt{36x^2 - 24x + 4} = 2x + 4$ کدام است؟

(۴) $-\frac{7}{8}$

(۳) $-\frac{5}{8}$

(۲) $-\frac{3}{8}$

(۱) $-\frac{1}{8}$

۹۸- دو عدد بر روی محور اعداد چنان واقع هستند که مجموع فواصل آن‌ها از اعداد -1 و 3 مساوی 6 است. مجموع این دو عدد کدام است؟

(۴) -4

(۳) 4

(۲) -2

(۱) 2

۹۹- مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 1$ و محور x ها و دو خط $x = 0$ و $x = \frac{3}{2}$ کدام است؟

(۴) $\frac{9}{2}$

(۳) $\frac{7}{2}$

(۲) $\frac{7}{4}$

(۱) $\frac{11}{4}$

۱۰۰- در یک دنباله حسابی که ۹ جمله دارد، مجموع سه جمله وسط ۲۱ است. مجموع تمام جملات این دنباله کدام است؟

(۴) 98

(۳) 189

(۲) 63

(۱) 126

هندسه ۲ - ۱۰ سوال

۱۰۱- دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ را با فرض $R > R'$ و $OO' = d$ در نظر می‌گیریم.

اگر $R - R' < d < R + R'$ باشد، آن‌گاه دو دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟

(۴) مماس درون

(۳) متداخل

(۲) متخارج

(۱) متقاطع

۱۰۲- در دایره $C(O, R)$ ، اندازه کمان AB برابر 60° و طول وتر AB برابر $2\sqrt{3}$ است. فاصله نقطه O از وتر AB کدام است؟

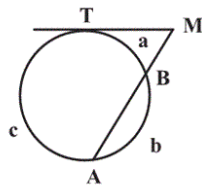
(۴) 2

(۳) $2\sqrt{2}$

(۲) $3\sqrt{2}$

(۱) 3

۱۰۳- در شکل مقابل اگر $\frac{a}{1} = \frac{b}{4} = \frac{c}{7}$ ، اندازه زاویه M کدام است؟ ($\widehat{TB} = a$ و $\widehat{AB} = b$ ، $\widehat{AT} = c$)



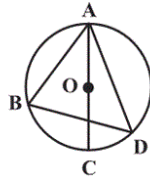
(۱) 30°

(۲) 45°

(۳) 90°

(۴) 60°

۱۰۴- در شکل زیر $AB = BD$ و $\widehat{CAD} = 28^\circ$ است. زاویه BAC چند درجه است؟ (O مرکز دایره است.)



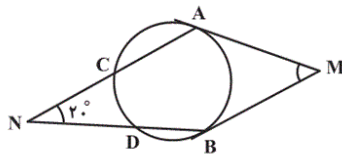
(۱) 30

(۲) 31

(۳) 24

(۴) 36

۱۰۵- در شکل زیر MA و MB بر دایره مماس‌اند و $\widehat{BD} = \widehat{AC} = 70^\circ$ است. اندازه زاویه M کدام است؟



(۱) 55°

(۲) 45°

(۳) 40°

(۴) 50°

۱۰۶- کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقطه M تا دایره‌ای به ترتیب ۲ و ۱۸ واحد است. اگر بتوانیم از این نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم، فاصله

دو نقطه تماس از یکدیگر کدام است؟

(۲) ۵

(۱) $4/18$

(۴) ۱۰

(۳) $9/6$

۱۰۷- در زاویه ظلّی $\widehat{BAC} = \alpha$ ، وترى از دایره و AC مماس بر دایره است. اگر AB قطر دایره نباشد، مقدار α کدام نمی‌تواند باشد؟

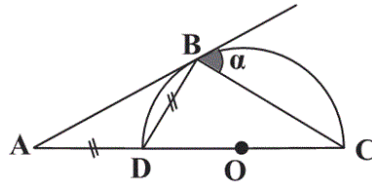
(۲) 70°

(۱) 50°

(۴) 110°

(۳) 90°

۱۰۸- مطابق شکل در نیم‌دایره‌ای به مرکز O ، زاویه α چند درجه است؟ (AB در B بر نیم‌دایره مماس است.)



(۱) ۴۵

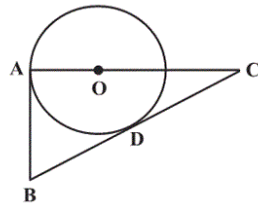
(۲) ۵۰

(۳) ۵۵

(۴) ۶۰

۱۰۹- در شکل زیر O ، مرکز دایره و اضلاع مثلث ABC در نقاط A و D بر دایره مماس‌اند. اگر $AB = CD$ و شعاع دایره برابر ۳ باشد،

اندازه BD کدام است؟



(۱) ۳

(۲) $3\sqrt{3}$

(۳) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

(۴) $2\sqrt{3}$

۱۱۰- دو دایره $C_1(O_1, ۴)$ و $C_2(O_2, ۳)$ مماس داخل هستند. قطر AB در دایره C_1 از نقطه O_2 می‌گذرد. اگر وتر AC از دایره C_1 در

نقطه D بر دایره C_2 مماس باشد، طول وتر AC کدام است؟

(۲) $9/6$

(۱) $7/2$

(۴) $6/4$

(۳) $4/8$

آمار و احتمال - ۱۰ سوال

۱۱۱- گزاره « $\exists x \in \mathbb{N} ; x \in P \wedge x \in E$ » چگونه بیان می‌شود؟ (P مجموعه اعداد اول و E مجموعه اعداد زوج است.)

(۱) همه اعداد طبیعی، هم اول و هم زوج هستند.

(۲) همه اعداد طبیعی، اول یا زوج هستند.

(۳) عددی طبیعی وجود دارد که هم اول و هم زوج باشد.

(۴) عددی طبیعی وجود دارد که اول یا زوج باشد.

۱۱۲- اگر $A = \{2\}$ ، $B = \{2, \{2\}\}$ و $C = \{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟

(۴) $A \subseteq B$

(۳) $A \in B$

(۲) $B \in C$

(۱) $B \subseteq C$

۱۱۳- اگر $A_1, A_2, \dots, A_k$ یک افزاز برای مجموعه غیر تهی A باشد، آن گاه چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟ ($i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$)
 الف) هیچ یک از A_i ها تهی نیست.

ب) به ازای هر i و j متمایز، $A_i \cap A_j = \emptyset$.

پ) اجتماع همه A_i ها، برابر A است.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۱۴- گزاره $(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \Rightarrow q)$ هم‌ارز منطقی با کدام یک از گزاره‌های زیر است؟
 ۱) p ۲) $\sim p$ ۳) q ۴) $\sim q$

۱۱۵- نقیض گزاره « $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0$ » کدام است؟

۱) $\exists x \in \mathbb{R}; x^2 > 0 \wedge x \neq 0$ ۲) $\exists x \in \mathbb{R}; x^2 > 0 \wedge x = 0$

۳) $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0 \wedge x \neq 0$ ۴) $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0 \wedge x = 0$

۱۱۶- در کدام یک از حالت‌های زیر، ارزش گزاره $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ ، نادرست است؟
 ۱) p و q هر دو درست باشند. ۲) p درست و q نادرست باشد.
 ۳) p نادرست و q درست باشد. ۴) p و q هر دو نادرست باشند.

۱۱۷- اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، دامنۀ متغیر گزاره‌نما باشد، کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

۱) $\forall x \in A; \frac{x^2 - 4}{x + 2} = x - 2$ ۲) $\exists x \in A; x^2 + 5x - 6 = 0$

۳) $\forall x \in A; |3 - x| < 2$ ۴) $\exists x \in A; x^2 \leq x$

۱۱۸- اگر با افزودن ۲ عضو به یک مجموعه k عضوی، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۹۶ واحد افزایش یابد، آن گاه یک مجموعه $k + 1$ عضوی چند زیرمجموعه دو عضوی دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۱ ۴) ۲۸

۱۱۹- به ازای چند مقدار حقیقی a ، دو مجموعه $A = \{a^2 - 3\}$ و $B = \{2x - 1, x^2 - 4\}$ می‌توانند برابر یکدیگر باشند؟
 ۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۲۰- اگر ارزش گزاره $(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge q)$ نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش کدام یک از گزاره‌های زیر همواره درست است؟
 ۱) $(p \vee r) \Rightarrow (q \vee r)$ ۲) $(p \vee q) \wedge r$
 ۳) $(p \vee \sim q) \vee r$ ۴) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r$

۸۱- گزینه «۳»

(سازمان سلامیان)

عدد ۱۱۴ بر ۶ بخش پذیر و اولین جمله این دنباله است. جملات ۶ تا ۶ تا بالا می روند تا به ۷۱۴ برسند که آخرین عدد مورد نظر است. پس می توان نوشت:

۷۱۴, ..., ۱۲۰, ۱۱۴: جملات دنباله حسابی

$d = 6$: قدرنسبت

حال تعداد جملات را به دست می آوریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 714 = 114 + (n-1)6$$

$$\Rightarrow n = \frac{714 - 114}{6} + 1 = 101$$

مجموع جملات برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{101}{2}(114 + 714) = 41814$$

(مسابان ۱- صفحه های ۲ تا ۴)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

۸۲- گزینه «۴»

(سپروس نفیری)

جملات را به صورت زیر جدا می کنیم:

$$S_1 = 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{10} = 2 \times \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 2(2^{10} - 1) = 2 \times 1023$$

$$S_2 = 2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-10} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}$$

$$S_1 - S_2 = 2 \times 1023 - \frac{1023}{1024} = 1023(2 - \frac{1}{1024}) = 1023 \times \frac{2047}{1024}$$

(مسابان ۱- صفحه های ۴ تا ۶)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

۸۳- گزینه «۳»

(مسئله شفیع زاده)

نکته: $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$: مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی

در دنباله هندسی داده شده جمله اول برابر $3a$ و $q = 2$ است.

$$765a = \frac{3a(1-2^n)}{1-2} \Rightarrow 2^n - 1 = 255 \Rightarrow 2^n = 256 \Rightarrow n = 8$$

(مسئله ۱- صفحه های ۴ تا ۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

۸۴- گزینه «۴»

(میشم همزه لویی)

دنباله جملات انتهایی دسته ها به صورت $(2n-1)^2$ است. پس:

$$\begin{cases} \text{جمله آخر دسته یازدهم} = (22-1)^2 = 441 \\ \text{جمله اول دسته یازدهم} = (20-1)^2 = 361 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{اعداد دسته یازدهم: } 363, 365, \dots, 441$$

برای محاسبه مجموع جملات، ابتدا تعداد جملات را می یابیم:

$$n = \frac{\text{جمله اول} - \text{جمله آخر}}{\text{قدر نسبت}} + 1 = \frac{441 - 363}{2} + 1 = 40$$

$$\Rightarrow \text{مجموع جملات دسته یازدهم} = \frac{40}{2} [363 + 441] = 20(804) = 16080$$

(مسئله ۱- صفحه های ۴ تا ۶)

۴ ✓

۳

۲

۱

صفرهای تابع ۴ و ۱- هستند. بنابراین:

$$f(x) = a(x+1)(x-4)$$

مختصات نقطه $(0, -2)$ را در ضابطه تابع جای گذاری می کنیم:

$$f(0) = -2 \Rightarrow a(0+1)(0-4) = -2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x-4)$$

مقدار $f(-2)$ را محاسبه می کنیم:

$$f(-2) = \frac{1}{2}(-2+1)(-2-4) = 3$$

(مسابقه ۱- صفحه های ۷ تا ۱۳)

۴

۳✓

۲

۱

(سروش موثینی)

داریم:

$$x_1^2 + x_2^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow S^2 - 2P = 1$$

$$\Rightarrow \left(+\frac{k}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{k-1}{2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{k^2}{4} - k + 1 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{k^2}{4} - k = 0 \Rightarrow k = 0 \text{ یا } 4$$

به ازای $k = 4$ معادله $2x^2 - 4x + 3 = 0$ را داریم که ریشه حقیقی

ندارد. به ازای $k = 0$ معادله $2x^2 - 1 = 0$ را داریم که ریشه های $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

را دارد. پس فقط $k = 0$ درست است.

(مسابقه ۱- صفحه های ۷ تا ۹)

۴

۳

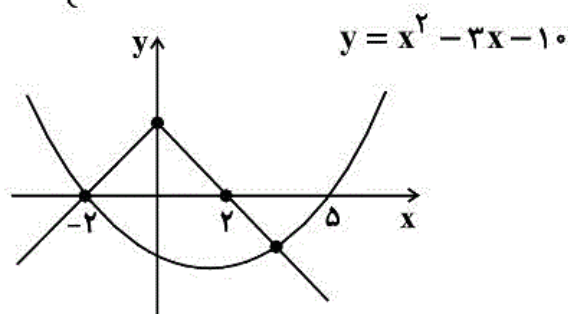
۲

۱✓

دو تابع $y = x^2 - 3x - 10$ و $y = 2 - |x|$ را در یک دستگاه مختصات

رسم می‌کنیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2) = 0 \\ \text{نقاط تلاقی با محور } x \text{ ها } x = 5, x = -2 \\ y = 2 - |x| = 0 \Rightarrow |x| = 2 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$



با توجه به شکل، معادله دو ریشه غیرهم‌علامت دارد.

(مسابقان ۱- صفحه‌های ۱۴ تا ۱۶)

۴

۳✓

۲

۱

چون $x = 2$ یکی از صفرهای تابع است پس به ازای آن مقدار تابع صفر می‌شود.

$$2^3 - 2^2 + k(2) + 4 = 0 \Rightarrow 8 + 2k = 0 \Rightarrow k = -4$$

برای یافتن صفرهای دیگر ضابطه تابع را بر $(x - 2)$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 4x + 4 \quad | \quad x - 2 \\ -(x^3 - 2x^2) \quad \quad x^2 + x - 2 \\ \hline x^2 - 4x + 4 \\ -(x^2 - 2x) \quad \quad \quad \\ \hline -2x + 4 \\ -(-2x + 4) \\ \hline 0 \end{array}$$

حال در معادله $x^2 + x - 2 = 0$ مجموع مربعات ریشه‌ها برابر است با:

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = (-1)^2 - 2(-2) = 5$$

۴

۳✓

۲

۱

با فرض $x^2 = t$ داریم: $t^2 - 2\sqrt{3}t + m^2 - 1 = 0$

اگر این معادله دارای دو جواب مختلف‌العلامت یا دارای ریشه مضاعف

مثبت باشد، معادله اصلی دارای دو جواب به صورت $x = \pm\sqrt{t}$ خواهد

بود.

دارای دو ریشه مختلف‌العلامت $\Rightarrow$ حالت اول

$$ac < 0 \Rightarrow m^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < m < 1$$

دارای ریشه مضاعف مثبت $\Rightarrow$ حالت دوم

$$\begin{cases} \Delta = 0 \Rightarrow (-2\sqrt{3})^2 - 4(1)(m^2 - 1) = 0 \\ 12 - 4m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2 \\ \frac{-b}{2a} > 0 : \text{برقرار است} \end{cases}$$

پس مجموعه جواب نهایی برای m برابر است با:

$$(-1, 1) \cup \{\pm 2\}$$

واضح است که سه مقدار صحیح $\pm 2, 0, m$ وجود دارد.

(مسابقه ۱- صفحه‌های ۷ تا ۱۳)

۴ ✓

۳

۲

۱

عبارت سمت چپ را مخرج مشترک می گیریم و عبارت سمت راست را به کمک اتحاد مزدوج ساده تر می کنیم:

$$\frac{3x-2x-6}{x(x+3)} = \frac{12}{(3-(x+3))(3+(x+3))}$$

$$\Rightarrow \frac{x-6}{x(x+3)} = \frac{12}{(-x)(x+6)}$$

x را با شرط $x \neq 0$ ، از مخرج ها ساده می کنیم:

$$\frac{x-6}{x+3} = \frac{12}{-(x+6)} \Rightarrow -(x^2-36) = 12x+36$$

$$\Rightarrow x^2+12x=0 \Rightarrow x(x+12)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{غ ق} \\ x=-12 \end{cases}$$

پس معادله فقط یک ریشه $x = -12$ دارد.

(مسایان ۱- صفحه های ۱۷ تا ۱۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

۹۱- گزینه «۱»

(امیر هوشنگ انصاری)

مقدار نمکی که کارگر استفاده کرده تا محلول ۴ درصدی تولید شود

$$200 \times \frac{4}{100} = 8 \text{ کیلوگرم برابر است با:}$$

حالا ۵ کیلوگرم نمک اضافه می کنیم اگر چه محلول غلیظ تر می شود اما به ۸ درصد نمی رسد پس مجبوریم آب را تبخیر کنیم. (y میزان تبخیر آب است.)

$$\frac{8+5}{200+5-y} = \frac{8}{100} \Rightarrow \frac{13}{205-y} = \frac{8}{100} \Rightarrow 1300 = 1640 - 8y$$

$$8y = 340 \Rightarrow y = 42.5 \text{ کیلوگرم}$$

(مسایان ۱- صفحه های ۱۷ تا ۱۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

۹۲- گزینه «۳»

(علی جهانگیری)

ابتدا جواب معادله اول را به دست می آوریم:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} = 5 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 5 - \sqrt{x+6}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x+1 = 25 + x+6 - 10\sqrt{x+6} \Rightarrow x=3=a$$

$$\sqrt{x+a} - x = 1 \xrightarrow{a=3} \sqrt{x+3} - x = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+3} = 1+x \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x+3 = x^2 + 2x+1$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 & \text{ق ق} \\ x=-2 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

(مسایان ۱- صفحه های ۲۰ تا ۲۲)

۴

۳✓

۲

۱

۹۳- گزینه «۱»

(ماهان متشن)

زمانی که مجموع دو عبارت نامنفی برابر صفر باشد، ریشه معادله عددی است که همزمان هر دو عبارت را صفر کند. پس:

$$3\sqrt{x+|x|} - 1 + \sqrt{2x^3 - x} = 0$$

$$2x^3 - x = 0 \Rightarrow x(2x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

که هیچ کدام عبارت زیر رادیکال دیگر را صفر نمی کنند، پس معادله داده شده ریشه ندارد.

(مسایان ۱- صفحه های ۲۰ تا ۲۲)

۴

۳

۲

۱✓

$$\frac{m}{2x} = \frac{3-x}{2x-x^2} \Rightarrow \frac{m}{2x} = \frac{3-x}{x(2-x)}$$

$$\frac{\times 2x(2-x)}{x \neq 0, x \neq 2} \rightarrow m(2-x) = (3-x) \times 2$$

$$2m - mx = 6 - 2x \Rightarrow 2m - 6 = mx - 2x$$

$$\Rightarrow 2m - 6 = x(m - 2) \Rightarrow x = \frac{2m - 6}{m - 2}$$

از آنجایی که $x = 0$ و $x = 2$ مخرج معادله را صفر می کنند، اگر جواب به دست آمده یکی از این اعداد باشد، معادله جواب ندارد. پس داریم:

$$x = 0 \Rightarrow \frac{2m - 6}{m - 2} = 0 \Rightarrow 2m - 6 = 0 \Rightarrow 2m = 6 \Rightarrow m = 3$$

$$x = 2 \Rightarrow \frac{2m - 6}{m - 2} = 2 \Rightarrow 2m - 6 = 2m - 4 \Rightarrow -6 = -4 \text{ غیرممکن}$$

$$m - 2 \text{ یعنی } x = \frac{2m - 6}{m - 2} \text{ کسر}$$

برابر صفر باشد معادله ریشه ندارد، در نتیجه $m = 2$.

بنابراین به ازای دو مقدار ۳، ۲ m معادله جواب ندارد.

(مسایان ۱- صفحه های ۱۷ تا ۱۹)

۴

۳

۲✓

۱

چون a مثبت و b منفی است، $|2a - b| = 2a - b$ و $|b| = -b$.

$$|b| > |a| \xrightarrow[b < 0]{a > 0} -b > a \Rightarrow a + b < 0 \Rightarrow |b + a| = -(a + b)$$

پس:

$$|2a - b| + |b + a| - |b| = 2a - b - (a + b) - (-b)$$

$$= 2a - b - a - b + b = a - b$$

(مسایان ۱- صفحه های ۲۳ تا ۲۵)

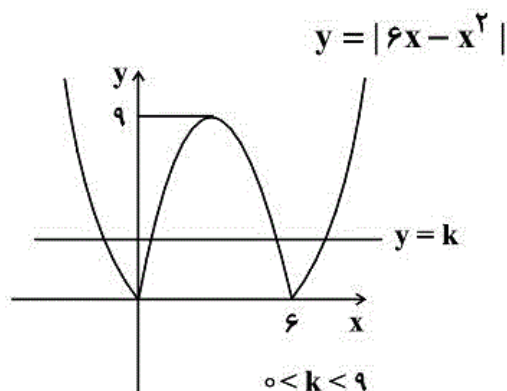
۴

۳

۲

۱✓

ابتدا نمودار تابع $y = |6x - x^2|$ را رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودار برای این که معادله $|6x - x^2| = k$ چهار جواب داشته باشد باید $0 < k < 9$ باشد.

(مسابقه ۱- صفحه‌های ۱۴ تا ۱۶ و ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

(سالار عموزاده)

$$\sqrt{36x^2 - 24x + 4} = 2x + 4 \Rightarrow \sqrt{4(9x^2 - 6x + 1)} = 2x + 4$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{(3x-1)^2} = 2(x+2) \Rightarrow |3x-1| = x+2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-1 = x+2 \\ 3x-1 = -(x+2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 3 \\ 4x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 \cdot x_2 = -\frac{3}{8}$$

(مسابقه ۱- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۸)

۴

۳

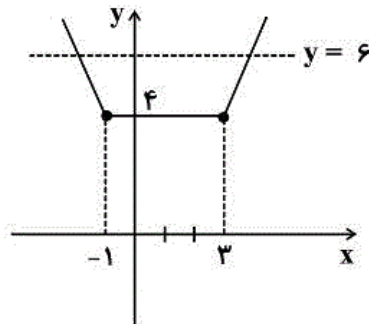
۲ ✓

۱

می‌دانیم فاصله x تا a را به صورت $|x - a|$ نمایش می‌دهیم. بنابراین:

$$|x - 3| + |x + 1| = 6$$

نمودار دو تابع $y = 6$ و $y = |x - 3| + |x + 1|$ را رسم می‌کنیم:



از روی نمودار واضح است که معادله فوق دارای ۲ جواب است. این جواب‌ها عبارتند از:

$$\begin{cases} x > 3 \Rightarrow x - 3 + x + 1 = 6 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x_1 = 4 \\ x < -1 \Rightarrow -x + 3 - x - 1 = 6 \Rightarrow -2x = 4 \Rightarrow x_2 = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = 2$$

روش تستی:

نکته: در معادله $|x - a| + |x - b| = k$ اگر $k > |a - b|$ باشد معادله

۲ جواب دارد که مجموع ریشه‌های آن از رابطه $x_1 + x_2 = a + b$ به

دست می‌آید.

$$\Rightarrow |x + 1| + |x - 3| = 6 \Rightarrow x_1 + x_2 = -1 + 3 = 2$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $a = -1$ $b = 3$

(مسابان ۱- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶ و ۲۳ تا ۲۸)

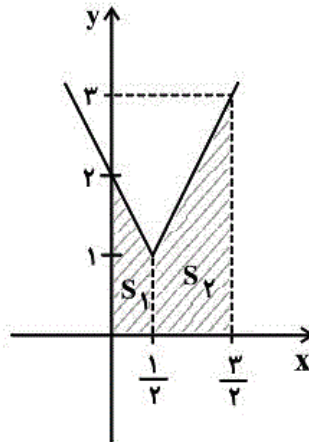
۴

۳

۲

۱✓

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 1 = |2x - 1| + 1$$



مطابق شکل، ناحیه مورد نظر از دو ذوزنقه تشکیل شده است که مساحت‌های آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} S_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1+2}{2} \right) = \frac{3}{4} \\ S_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1+3}{2} \right) = 2 \end{cases} \Rightarrow S_1 + S_2 = \frac{11}{4}$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

۱۰۰- گزینه «۲»

(میثم بهرامی بویا)

در بین سه جمله وسط، جمله پنجم واسطه حسابی جملات چهارم و ششم است، پس:

$$a_4 + a_6 + a_8 = 2a_5 + a_5 = 3a_5$$

$$\Rightarrow a_5 = \frac{\text{مجموع سه جمله وسط}}{3}$$

$$\text{جمله پنجم} = \frac{21}{3} = 7$$

از طرفی جمله پنجم، میانگین جمله‌های اول و نهم نیز هست، پس:

$$\frac{a_1 + a_9}{2} = 7 \Rightarrow S_9 = \frac{9}{2}(a_1 + a_9) = \frac{9}{2} \times 14 = 63$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۲ تا ۴)

۴

۳

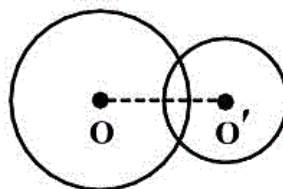
۲ ✓

۱

۱۰۱- گزینه «۱»

(امیرحسین ابومحبوب)

مطابق شکل اگر $R - R' < d < R + R'$ باشد، آن گاه دو دایره در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند و نسبت به هم متقاطع‌اند.



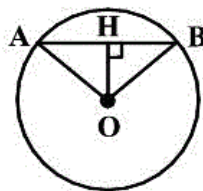
(هنر سه ۲- صفحه ۲۰)

۴

۳

۲

۱ ✓



$$\left. \begin{array}{l} OA = OB = R \\ \widehat{AOB} = \widehat{AB} = 60^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta AOB \text{ متساوی الاضلاع است}$$

فاصله مرکز دایره از وتر AB، برابر طول ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع AOB است، بنابراین داریم:

$$OH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3} = 3$$

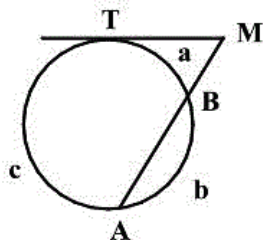
(هندسه ۲- مشابه تمرین ۷ صفحه ۱۷)

۴

۳

۲

۱✓



$$\frac{\widehat{BT}}{1} = \frac{\widehat{AB}}{4} = \frac{\widehat{AT}}{7} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{AB} = 4\widehat{BT} \\ \widehat{AT} = 7\widehat{BT} \end{cases}$$

$$\widehat{BT} + \widehat{AB} + \widehat{AT} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{BT} + 4\widehat{BT} + 7\widehat{BT} = 360^\circ$$

$$12\widehat{BT} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{BT} = 30^\circ \Rightarrow \begin{cases} \widehat{AB} = 120^\circ \\ \widehat{AT} = 210^\circ \end{cases}$$

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AT} - \widehat{BT}}{2} = \frac{210^\circ - 30^\circ}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

(هندسه ۲- صفحه ۱۶)

۴

۳✓

۲

۱

$$\widehat{CAD} = 28^\circ \Rightarrow \widehat{CD} = 2 \times 28^\circ = 56^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AD} = 180^\circ - 56^\circ = 124^\circ$$

$$\hat{B} = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{124^\circ}{2} = 62^\circ$$

$$AB = BD \Rightarrow \hat{A} = \hat{D} = \frac{180^\circ - 62^\circ}{2} = 59^\circ$$

$$\hat{BAC} = 59^\circ - 28^\circ = 31^\circ$$

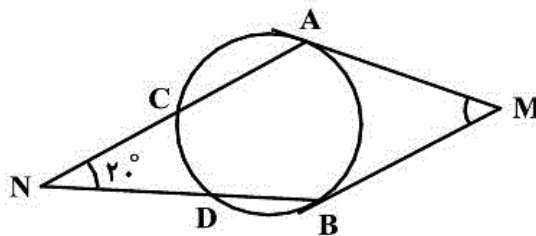
(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۴

۳

۲✓

۱

فرض کنید $\widehat{AB} = x$ و $\widehat{CD} = y$ باشد. داریم:

$$x + y = 360^\circ - 2 \times 70^\circ = 220^\circ$$

$$\frac{x - y}{2} = 20^\circ \Rightarrow x - y = 40^\circ$$

$$\begin{cases} x + y = 220^\circ \\ x - y = 40^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 130^\circ \\ y = 90^\circ \end{cases}$$

$$\hat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{AB}}{2} = \frac{230^\circ - 130^\circ}{2} = 50^\circ$$

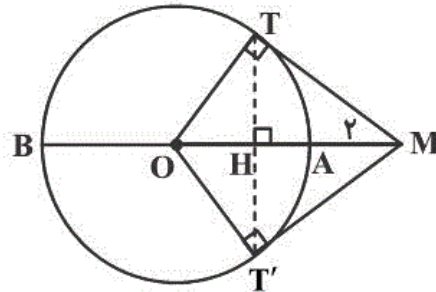
(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

۴✓

۳

۲

۱



$$MT^2 = MA \times MB = 2 \times 18 = 36 \Rightarrow MT = 6$$

$$r = OT = OA = 8 \Rightarrow \text{شعاع دایره} = 18 - 2 = 16 \Rightarrow \text{قطر دایره}$$

در مثلث قائم الزاویه ΔOTM :

$$OM = OA + AM = 10$$

$$TH \times OM = OT \times MT \Rightarrow TH = \frac{OT \times MT}{OM}$$

$$\Rightarrow TH = \frac{8 \times 6}{10} = 4.8$$

$$\Rightarrow TT' = 2TH = 2 \times 4.8 = 9.6$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

۴

۳✓

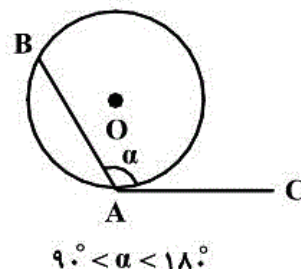
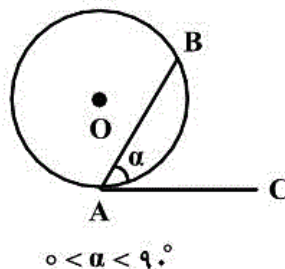
۲

۱

۱۰۷- گزینه «۳»

(شایان عباپی)

اگر AB قطر دایره نباشد، زاویه ظلی BAC به یکی از دو صورت زیر است.



یعنی اندازه زاویه α نمی‌تواند برابر 90° باشد.

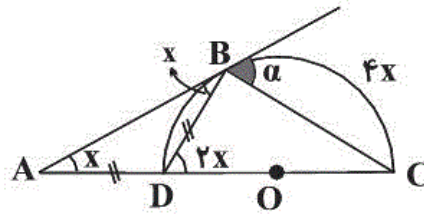
(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۴

۳✓

۲

۱



با فرض $\hat{A} = \hat{A} \hat{B} \hat{D} = x$ داریم:

$$\mathbf{B}\hat{\mathbf{D}}\mathbf{C} = \hat{\mathbf{A}} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}}\mathbf{C} = \mathbf{r}_x \Rightarrow \widehat{\mathbf{BC}} = \mathbf{r}_x$$

$$\hat{A}B D = x \Rightarrow \widehat{BD} = \sqrt{x}$$

حال:

$$\overline{\text{DBC}} = 1\lambda^{\circ} \Rightarrow 2x + 6x = 1\lambda^{\circ} \Rightarrow x = 3^{\circ}$$

در نتیجه:

$$\alpha = \frac{\widehat{BC}}{r} = \frac{r_X}{r} = r_X = 60^\circ$$

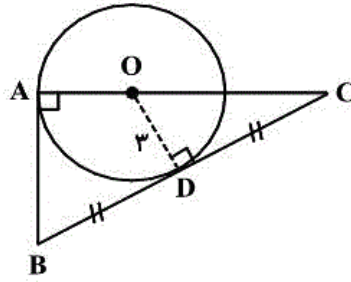
(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۳ تا ۱۷)

☒ ✓

3

2

1



طول مماس‌های رسم شده از یک نقطه خارج دایره بر دایره، برابر یکدیگر است، بنابراین داریم:

$$BA = BD \xrightarrow{BA=CD} BD = CD = AB$$

در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$AB = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \hat{C} = 30^\circ$$

$$\Delta ODC : \hat{C} = 30^\circ \Rightarrow OD = \frac{1}{2}OC \xrightarrow{OD=R=3} OC = 6$$

$$CD^2 = OC^2 - OD^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow CD = 3\sqrt{3} \\ \Rightarrow BD = 3\sqrt{3}$$

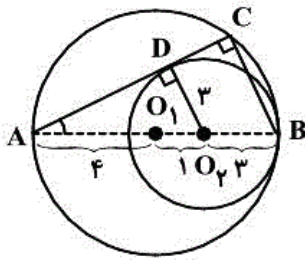
(هنر سه ۲- صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۴

۳

۲✓

۱



$$\widehat{ACB} = \frac{\widehat{AB}}{2} = 90^\circ \text{ (زاویہ محاطی)}$$

$$\Delta ADO_2 : AD^2 + DO_2^2 = AO_2^2$$

$$\Rightarrow AD^2 + 9 = 25 \Rightarrow AD^2 = 16 \Rightarrow AD = 4$$

$$OD \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیہ تالس}} \frac{AO_2}{AB} = \frac{AD}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{8} = \frac{4}{AC} \Rightarrow AC = 6 \frac{2}{3}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۳ و ۲۰)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

۱۱۱- گزینه «۳»

(عارل مسینی)

با توجه به سور وجودی و ترکیب عطفی، گزاره صورت سؤال به صورت «عددی طبیعی وجود دارد که هم اول و هم زوج باشد» بیان می‌گردد.

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

۱۱۲- گزینه «۱»

(مرتضی فطیم‌علوی)

با توجه به این که $2 \in B$ ولی $2 \notin C$ ، پس $B \not\subseteq C$.

(آمار و احتمال- صفحه ۱۹)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

۱۱۳- گزینه «۴»

(معمدرضا دلاورنژاد)

طبق تعریف افراز یک مجموعه، هر سه گزاره «الف»، «ب» و «پ» درست هستند.

(آمار و احتمال - صفحه ۲۱)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

۱۱۴- گزینه «۱»

(حسین فزایی)

طبق قوانین گزاره‌ها داریم:

$$(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \Rightarrow q) \equiv (p \vee \sim q) \wedge (\sim(\sim p) \vee q)$$

$$\equiv (p \vee \sim q) \wedge (p \vee q) \equiv p \vee (\sim q \wedge q) \equiv p \vee F \equiv p$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۶ تا ۱۱)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

۱۱۵- گزینه «۲»

(مرتضی فویم‌علوی)

نقیض گزاره « $\forall x \in A ; P(x)$ » به صورت « $\exists x \in A ; \sim P(x)$ » و نقیض گزاره « $p \Rightarrow q$ » به صورت « $p \wedge \sim q$ » است. در نتیجه داریم:

$$\sim (\forall x \in \mathbb{R} ; x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0) \equiv \exists x \in \mathbb{R} ; x^2 > 0 \wedge x = 0$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

☐ ۴

☐ ۳

☒ ۲

☐ ۱

۱۱۶- گزینه «۴»

(امیرحسین ابومحبوب)

گزاره « $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ » زمانی نادرست است که مقدم آن یعنی « $p \Rightarrow q$ » درست و تالی آن یعنی « q » نادرست باشد. چون « q » نادرست است، پس ارزش گزاره « $(p \Rightarrow q)$ » تنها در صورتی درست است که « p » نادرست باشد، بنابراین ارزش هر دو گزاره « p » و « q » نادرست است.

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۹ تا ۱۱)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

گزینه «۱»: معادله $\frac{x^2 - 4}{x + 2} = x - 2$ به ازای $x \neq -2$ و در نتیجه برای

همه اعضای مجموعه A صحیح است، پس این گزاره سوری درست است.

گزینه «۲»:

$$x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow (x + 6)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = 1 \in A \end{cases}$$

معادله $x^2 + 5x - 6 = 0$ به ازای یکی از اعضای مجموعه A برقرار است، پس این گزاره سوری درست است.

گزینه «۳»:

$$|3 - x| < 2 \Rightarrow |x - 3| < 2 \Rightarrow -2 < x - 3 < 2 \Rightarrow 1 < x < 5$$

نامساوی به ازای دو عضو مجموعه A یعنی $x = 1$ و $x = 5$ برقرار نیست، پس این گزاره سوری نادرست است.

گزینه «۴»:

$$x^2 \leq x \Rightarrow x^2 - x \leq 0 \Rightarrow x(x - 1) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

نامساوی به ازای یکی از اعضای مجموعه A یعنی $x = 1$ برقرار است، پس این گزاره سوری درست است.

(آمار و احتمال - صفحه ۱۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

یک مجموعه k عضوی دارای 2^k زیرمجموعه است، بنابراین داریم:

$$2^{k+2} - 2^k = 96 \Rightarrow 2^k \times 2^2 - 2^k = 96 \Rightarrow 3 \times 2^k = 96$$

$$\Rightarrow 2^k = 32 = 2^5 \Rightarrow k = 5$$

بنابراین $k + 1 = 6$ است. تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی یک مجموعه

$$6 \text{ عضوی برابر است با: } \binom{6}{2} = 15$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۴

۳

۲ ✓

۱

۱۱۹- گزینه «۴»

(علیرضا شریف‌فطیپی)

دو مجموعه A و B مساوی یکدیگرند، پس تعداد اعضای این دو مجموعه برابر است، یعنی مجموعه B تنها یک عضو دارد. داریم:

$$x^2 - 4 = 2x - 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$x = 3 \Rightarrow B = \{5\} \Rightarrow a^2 - 3 = 5 \Rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{2}$$

$$x = -1 \Rightarrow B = \{-3\} \Rightarrow a^2 - 3 = -3 \Rightarrow a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$$

بنابراین به ازای ۳ عدد حقیقی a ، دو مجموعه A و B می‌توانند برابر یکدیگر باشند.

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۲۳ و ۲۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

چون ارزش گزاره $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$ نادرست است، پس ارزش دو گزاره $(p \wedge q)$ و $(p \vee q)$ مخالف یکدیگر است. اگر گزاره $(p \wedge q)$ درست باشد، آن گاه گزاره $(p \vee q)$ قطعاً درست است، بنابراین لزوماً باید $(p \wedge q)$ نادرست و $(p \vee q)$ درست باشد که در این صورت ارزش یکی از دو گزاره p و q درست و دیگری نادرست است.

گزینه «۱»: اگر p درست و q و r نادرست باشند، داریم:

$$(p \vee r) \Rightarrow (q \vee r) \equiv T \Rightarrow F \equiv F$$

گزینه «۲»: اگر r نادرست باشد، داریم:

$$(p \vee q) \wedge r \equiv T \wedge F \equiv F$$

گزینه «۳»: اگر p و r نادرست و q درست باشد، داریم:

$$(p \vee \sim q) \vee r \equiv (F \vee F) \vee F \equiv F$$

گزینه «۴»: ارزش دو گزاره p و q مخالف یکدیگر است، بنابراین

گزاره $(p \Leftrightarrow q)$ قطعاً نادرست است و در نتیجه گزاره $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r$

به انتفای مقدم درست می باشد.

(آمار و احتمال - صفحه های ۶ تا ۱۲)

۴ ✓

۳

۲

۱