سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درســـنامه ها و جـــزوه های ریاضـــی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)
https://t.me/riazisara

ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)
https://www.instagram.com/riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

هندسه ۱ - ۱۰ سوال

۱۳۱- کدام‌یک از قضیه‌های زیر را نمی‌توان به صورت قضیهٔ دو شرطی نوشت؟

۱) نقطهٔ همرسی عمود منصف‌های ضلع‌های مثلث، از سه رأس مثلث به یک فاصله است.

۲) در هر مستطیل، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.

۳) هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

۴) در هر مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع و میانهٔ نظیر یکی از اضلاع بر هم منطبق‌اند.

۱۳۲- کدام‌یک از چهارضلعی‌های زیر به طور منحصر به فرد رسم نمی‌شود؟

۱) متوازی‌الاضلاعی به طول قطرهای ۲ و ۳

۲) مثلثی به طول اضلاع ۵، ۴ و ۳

۳) لوزی به طول قطرهای ۶ و ۴

۴) لوزی به طول ضلع ۵ و قطر ۶

۱۳۳- در مثلث ABC نیمسازهای دو زاویهٔ A و B و عمودمنصف ضلع AC همرس‌اند. کدام نتیجه‌گیری الزاماً درست است؟

۱) $AB = AC$ ۲) $AB = BC$ ۳) $AC = BC$ ۴) هیچ‌کدام

۱۳۴- نقطهٔ A به فاصلهٔ ۸ واحد از خط d واقع است. برای رسم خطی عمود بر خط d از نقطهٔ A، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۱۰ واحد رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط B و C قطع کند و سپس از نقاط B و C دو کمان به شعاع R رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در دو نقطهٔ E و F قطع نمایند. R کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۱۳۵- کدام چهار ضلعی قابل رسم نیست؟

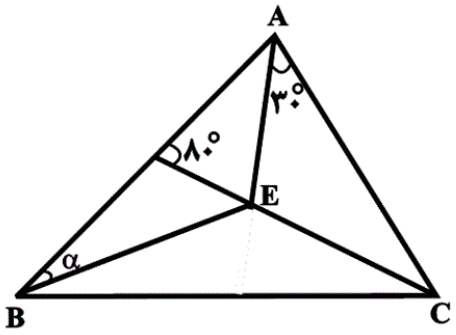
۱) مربعی که مجموع طول‌های یک ضلع و یک قطر آن ۲ باشد.

۲) لوزی‌ای که طول قطرهای آن ۳ و ۱۰ باشد.

۳) مستطیلی که طول یک ضلع آن ۲ و طول قطر آن ۱۵ باشد.

۴) متوازی‌الاضلاعی که طول‌های دو قطر آن ۷ و ۴ و طول یک ضلع آن ۶ باشد.

۱۳۶- در شکل زیر اگر E نقطهٔ همرسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث ABC باشد، زاویهٔ α چند درجه است؟



۱) ۱۵

۲) ۲۰

۳) ۳۰

۴) ۴۰

۱۳۷- دو خط d_1 و d_2 در نقطهٔ O بر هم عمودند. مساحت ناحیه‌ای که فاصلهٔ نقاط واقع در آن از هر یک از دو خط d_1 و d_2، کمتر از ۲ واحد و از نقطهٔ O بیشتر از ۲ واحد باشد، کدام است؟

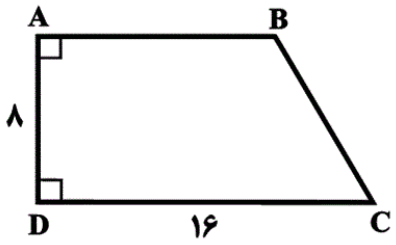
۱) 4π

۲) ۱۶

۳) $4(4-\pi)$

۴) $4(\pi-1)$

۱۳۸- در ذوزنقهٔ $ABCD$ شکل زیر، عمودمنصف قطر AC، قاعدهٔ DC را در نقطهٔ M قطع می‌کند. فاصلهٔ M تا رأس D کدام است؟



۱) ۶

۲) ۸

۳) ۴

۴) ۳

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۹- در مثلث $ABC(\hat{A} > \hat{C})$، نیمساز زاویهٔ $\hat{B}$، ضلع AC را در نقطهٔ D قطع می‌کند. اگر M و M' به ترتیب وسط اضلاع AB و BC باشند، نسبت مساحت $\overset{\Delta}{BDM'}$ به مساحت $\overset{\Delta}{BDM}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) بین $\frac{۱}{۲}$ و ۱ ۴) بزرگ‌تر از ۱

۱۴۰- دو خط متقاطع d و d' را در نظر گرفته و نقطهٔ تقاطع آن‌ها را O می‌نامیم. نقاطی که از دو خط d و d' به یک فاصله بوده و از نقطهٔ O به فاصلهٔ ۲ باشند، رئوس یک چهارضلعی هستند. مساحت این چهارضلعی کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶

۳) ۸ ۴) ۱۶

ریاضیات گسسته - ۱۰ سوال

۱۲۱- کدام‌یک از ترکیب‌های دو شرطی زیر درست است؟ $(a, b \in \mathbb{R})$

۱) $a = b \Leftrightarrow a^۳ = b^۳$

۲) $a = b \Leftrightarrow a^۲ = b^۲$

۳) $a < b \Leftrightarrow a^۲ < b^۲$

۴) $a < b \Leftrightarrow \frac{۱}{a} > \frac{۱}{b}$

۱۲۲- کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) با استفاده از مثال نقض می‌توان درستی گزارهٔ «مجموع دو عدد صحیح متوالی، فرد است» را رد کرد.

۲) با استفاده از استدلال استنتاجی می‌توان درستی گزارهٔ «مجموع دو عدد فرد، عددی فرد است» را اثبات کرد.

۳) با استفاده از برهان خلف می‌توان درستی گزارهٔ «مجموع هر سه عدد صحیح متوالی، مضرب ۳ است» را رد کرد.

۴) با استفاده از روش اثبات مستقیم می‌توان درستی گزارهٔ «حاصل‌ضرب هر دو عدد فرد، عددی فرد است» را اثبات کرد.

۱۲۳- اگر عدد طبیعی a، دو عدد $۳k + ۱$ و $۵k + ۴$ را عاد کند، آن‌گاه بیش‌ترین مقدار a کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

۱۲۴- روی نمودار تابع $y=\frac{۳x+۴}{x+۲}$، چند نقطه با مختصات طبیعی وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۴ ۴) صفر

۱۲۵- چه تعداد از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

الف) اگر n و m دو عدد صحیح متوالی باشند، عدد $mn+m$ مربع کامل است.

ب) اگر n و m دو عدد زوج متوالی باشند، عدد $mn+۱$ مربع کامل است.

پ) اگر n و m دو عدد فرد متوالی باشند، عدد $m^۲+m+n$ مربع کامل است

۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

۱۲۶- اگر x، y و z سه عدد حقیقی باشند، در اثبات درستی گزاره $x^۲+y^۲+z^۲\geq -xy+xz-yz$ به روش بازگشتی، به کدام رابطهٔ بدیهی می‌رسیم؟

۱) $(x-y)^۲+(x+z)^۲+(z-y)^۲\geq ۰$

۲) $(x+y)^۲+(x-z)^۲+(z+y)^۲\geq ۰$

۳) $(x+y)^۲+(x-z)^۲+(z-y)^۲\geq ۰$

۴) $(x+y)^۲+(x+z)^۲+(z+y)^۲\geq ۰$

۱۲۷- $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، $a_۴$ و $a_۵$، اعداد طبیعی متوالی‌اند. اگر میانگین آن‌ها عددی فرد باشد، حاصل $۴a_۳-a_۵$ را همواره به کدام صورت می‌توان نوشت؟ $(k\in\mathbb{N})$

۱) $۲k-۱$ ۲) $۲k-۲$

۳) $۳k-۳$ ۴) $۳k+۲$

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

۱۲۸- به ازای چند عدد اول مانند m، عددی طبیعی مانند n وجود دارد به گونه‌ای که m هر دو عدد $۲n+۶$ و $۳n^۲-۲n+۴$ را بشمارد؟

۱) ۸ ۲) ۴

۳) ۶ ۴) ۲

۱۲۹- $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ عددهایی صحیح و $b_۱$، $b_۲$، $b_۳$ همان اعداد ولی با ترتیب دیگری هستند. حاصل کدام عبارت زیر، ممکن است زوج نباشد؟

۱) $(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)(a_۳-b_۳)$ ۲) $(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۱)(a_۳-b_۱)$

۳) $a_۱b_۱+a_۳b_۱+a_۳b_۲$ ۴) $a_۱a_۲a_۳+b_۱b_۲b_۳$

۱۳۰- اگر a و b دو عدد صحیح باشند به گونه‌ای که $۷\mid ۲a+b+k$ و $۷\mid ۳a-۲b+۲$، آن‌گاه مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد طبیعی دو رقمی k کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶

۳) ۱۷ ۴) ۱۸

حسابان ۲ - ۲۰ سوال -

۸۱- نمودار کدام تابع از انقباض عمودی نمودار تابع f به دست می‌آید؟

۱) $y=f(\frac{x}{۳})$ ۲) $y=f(۳x)$ ۳) $y=۳f(x)$ ۴) $y=\frac{۱}{۳}f(x)$

۸۲- علی برای رسم نمودار تابع $y=f(\frac{۱}{۲}x-۴)$، به اشتباه ابتدا طول تمام نقاط روی نمودار تابع f را ۲ برابر می‌کند و سپس آن را ۴ واحد به سمت راست انتقال می‌دهد. او با کدام انتقال بر روی نمودار حاصل می‌تواند اشتباه خود را اصلاح کند؟

۱) ۲ واحد به سمت راست ۲) ۴ واحد به سمت راست

۳) ۸ واحد به سمت راست ۴) ۲ واحد به سمت چپ

۸۳- در تابع خطی f با دامنهٔ $[-۲۱,۴)$ و برد $(-۳,۷]$، مقدار $[۳f(۱)]$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۴- ۲) ۵-

۳) ۶- ۴) ۷-

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

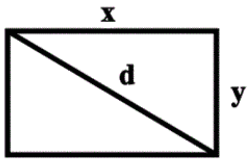
۸۴- توابع f و g با دامنهٔ $\mathbb{R}$ به ترتیب همانی و ثابت هستند. اگر $\frac{3f(g(2))-g(f(-1))}{f(3)-2g(0)}=2$ باشد، $g(0)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۴
۴) $\frac{2}{3}$

۸۵- مجموعهٔ برد تابع $f=\{(2,m-2),(m^2-2,1),(2,m^2-8),(-m,1)\}$ چند عضوی است؟

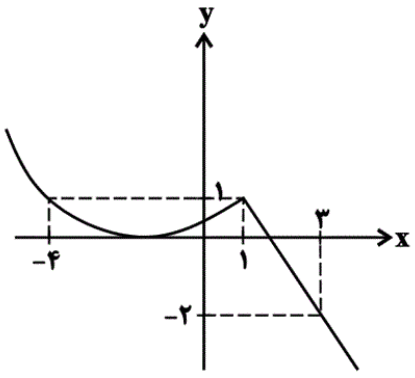
۱) ۴
۲) ۱
۳) ۳
۴) ۲

۸۶- محیط مستطیل زیر برابر ۱۲ است. در کدام گزینه قطر مستطیل به عنوان تابعی از طول آن (x) نوشته شده است؟



۱) $d=\sqrt{2x^2+12x+36}$
۲) $d=\sqrt{x^2-12x+36}$
۳) $d=\sqrt{2x^2-12x+36}$
۴) $d=\sqrt{-2x^2+12x-36}$

۸۷- اگر نمودار تابع f به صورت شکل زیر باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=\frac{1}{\sqrt{-(f(x))^2-f(x)+2}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۶
۲) ۵
۳) ۸
۴) ۷

۸۸- برد تابع $f(x)=\frac{|x|}{x}\sqrt{x+4}$ کدام است؟

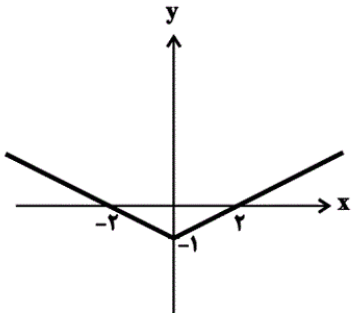
۱) $(-2,0]\cup(2,+\infty)$
۲) $(-2,+\infty)$
۳) $[-4,-2)\cup(2,+\infty)$
۴) $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۸۹- برد تابع $y = x\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ کدام است؟

۱) $[-1,1]$ ۲) $[0,\frac{1}{4}]$ ۳) $[0,1]$ ۴) $[0,\frac{1}{2}]$

۹۰- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است، مساحت سطح محدود بین نمودار تابع $y = ||f(x)|-1|$ و محور xها کدام است؟



۱) ۲

۲) ۴

۳) ۶

۴) ۸

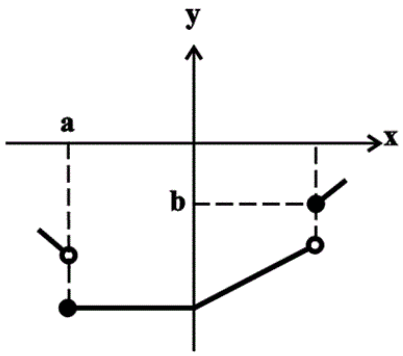
۹۱- توابع $f(x) = \frac{x[2x]}{\sqrt{x^2}}$ و $g(x) = 1$ با کدام دامنهٔ مشترک، مساوی هستند؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ ۲) $[-\frac{1}{2},1)-[0,\frac{1}{2})$ ۳) $[-\frac{1}{2},1)-(0,\frac{1}{2})$ ۴) $[-\frac{1}{2},1]-[0,\frac{1}{2})$

۹۲- تابع $f(x) = x-[2x]$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع f را یک بار k واحد به راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع g حاصل شود و بار دیگر k واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع h حاصل شود. به ازای کدام مقدار k نمودار تابع g بر نمودار تابع h منطبق نمی‌شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۹۳- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \frac{x-1}{[2x]x+1}$ در شکل زیر رسم شده است. حاصل ab کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)



۱) $\frac{1}{4}$

۲) $\frac{1}{8}$

۳) $\frac{1}{6}$

۴) $\frac{1}{12}$

۹۴- معادلهٔ $|x|-1 = x[x]$ چند جواب دارد؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

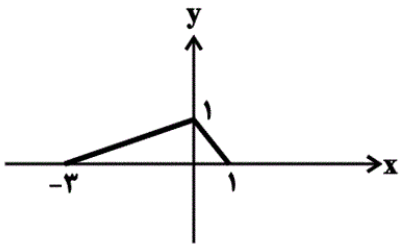
۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

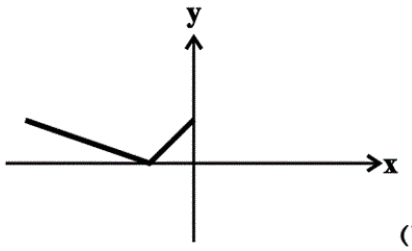
www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

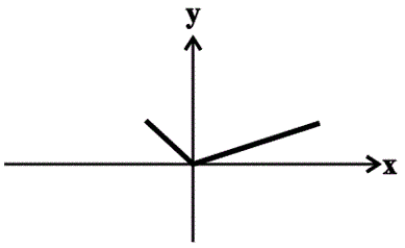
۹۵- نقطهٔ $A=(۲,-۱)$ روی نمودار تابع $y=-f(۲x)+۱$ متناظر با نقطهٔ A' روی نمودار تابع $y=۲f(۳x-۲)-۲$ است. مجمـوع طول و عرض نقطهٔ A' کدام است؟

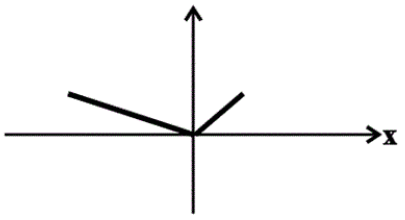
۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۴

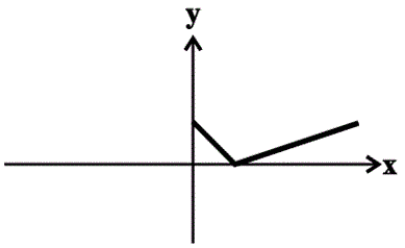
۹۶- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=۱-f(۱-۲x)$ کدام است؟



۱)


۲)


۳)


۴)


۹۷- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها قرینه و یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم. در نمودار حاصل، قرینهٔ نقاط با عرض مثبت را نسبت به محور xها رسم می‌کنیم و سپس نمودار را یک واحد به راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع g حاصل شود. ضابطهٔ g کدام است؟

۱) $۱-\sqrt{۱-x}$ ۲) $-|\sqrt{-x-۱}-۱|$

۳) $-|\sqrt{۱-x}-۱|$ ۴) $|\sqrt{-x-۱}-۱|$

۹۸- اگر نمودار تابع $g(x)=f(\frac{۱}{۲}x-۲)+۱$ را ابتدا . . . واحد به سمت . . . و سپس . . . واحد به سمت . . . انتقال دهیم، بر نمودار تابع $h(x)=f(\frac{۱}{۲}x)-۲$ منطبق می‌شود.

۱) ۴- راست- ۳- پایین ۲) ۴- چپ- ۳- پایین

۳) ۴- راست- ۳- بالا ۴) ۲- چپ- ۳- پایین

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۹- طول نقاط نمودار تابع $f(x)=(x+1)^{2}$ را دو برابر می‌کنیم، سپس آن را یک واحد به چپ و یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع g حاصل شود. مجموع طول نقاط برخورد نمودارهای دو تابع f و g کدام است؟

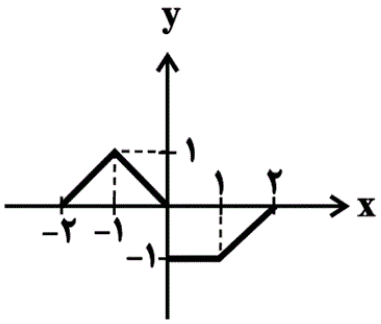
۱) $\frac{۲}{۳}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $-\frac{۲}{۳}$

۴) $-\frac{۱}{۳}$

۱۰۰- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. مساحت سطح محدود به نمودار تابع $g(x)=\begin{cases}-f(-x) & ;x<۰\\ f(-x-۱) & ;x\geq ۰\end{cases}$ و محور xها کدام است؟



۱) ۲

۲) $\frac{۷}{۲}$

۳) $\frac{۵}{۲}$

۴) $\frac{۳}{۲}$

حسابان ۲ - آشنا - ۱۰ سوال

۱۰۱- رابطهٔ $A=\{(۳\ ,\ m^{۲}),(۲\ ,\ ۱),(-۳\ ,\ m),(-۲\ ,\ m),(۳\ ,\ m+۲),(m\ ,\ ۴)\}$ به ازای کدام مقدار m، یک تابع است؟

۱) -۲

۲) -۱

۳) ۲

۴) صفر

۱۰۲- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=۲x-۱$، بازهٔ $[۳,+\infty)$ و دامنهٔ تابع $g(x)=\frac{۱}{۳}x+۳$ بازهٔ $(-\infty,۳]$ باشد، اجتماع برد توابع f و g کدام است؟

۱) $\mathbb{Z}$

۲) $\mathbb{R}$

۳) $\mathbb{R}-\{۵\}$

۴) $\mathbb{R}-(۴,۵)$

۱۰۳- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x+۴}{۲x^{۲}-ax+b-۵}$ برابر $\mathbb{R}-\{۲\}$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۵

۲) ۲۱

۳) -۵

۴) ۱۳

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

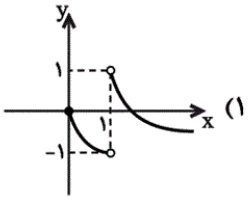
۱۰۴- اگر $x^۲ + x < ۰$ باشد، حاصل $[x^۴]+[x^۳]+[x^۲]+[x]$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

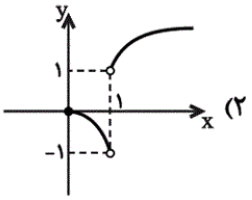
۱) ۲-
۲) ۱-
۳) صفر
۴) ۱

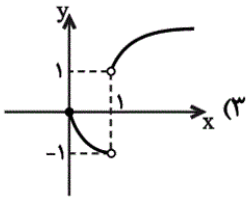
۱۰۵- مساحت سطح بین نمودار تابع $y=[x+۲]$ و محور xها در فاصلهٔ $[-۱,۳)$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

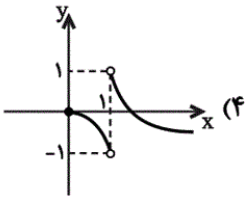
۱) ۶
۲) ۷
۳) ۹
۴) ۱۰

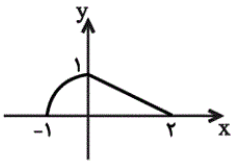
۱۰۶- نمودار تابع $f(x)=\frac{|x-۱|\sqrt{x}}{x-۱}$ کدام است؟

۱)


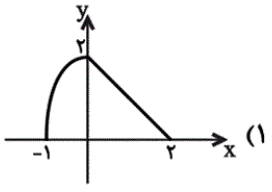
۲)


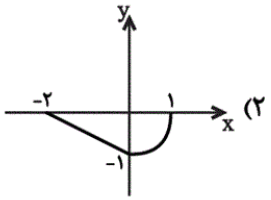
۳)


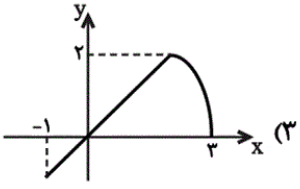
۴)


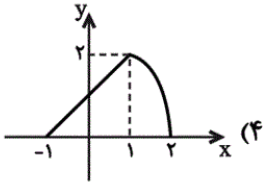
۱۰۷- اگر نمودار تابع f به‌صورت


باشد، نمودار تابع $g(x)=۲f(۱-x)$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


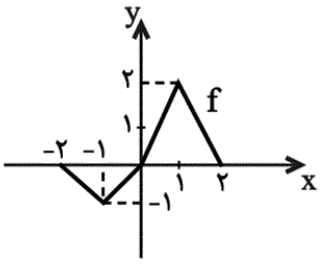
۴)


www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۸- اگر دامنهٔ تابع f بازهٔ $D_f = [-۱, ۴]$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x) = -۳f(-\frac{x}{۲} + ۲)$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) ۱۱
۲) ۱۰
۳) ۵
۴) ۶

۱۰۹- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، برای کدام مقدار k، معادلهٔ $۲f(۲x) - ۱ = k$ بیشترین تعداد جواب را دارد؟



۱) ۰/۵
۲) ۱
۳) ۱/۵
۴) -۱

۱۱۰- طول نقاط برخورد نمودار تابع $f(x) = \sin ax$ با محور xها، $\frac{۱}{۲}$ برابر طول نقاط برخورد نمودار تابع $g(x) = \sin x$ با محور xهاست. در بازهٔ $[-۲\pi, ۲\pi]$، نمودار دو تابع f و g در چند نقطه مشترک‌اند؟

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۷

هندسه ۳ - ۱۰ سوال

۱۱۱- در ضرب ماتریس‌های مربعی کدام ویژگی در حالت کلی برقرار نیست؟

۱) توزیع‌پذیری نسبت به جمع
۲) شرکت‌پذیری
۳) جابه‌جایی
۴) داشتن عضو خنثی

۱۱۲- اگر $۴I + \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix} = ۳X + \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل‌ضرب درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی ماتریس X کدام است؟

۱) ۱
۲) ۴
۳) صفر
۴) ۵

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۳- اگر $A=\begin{bmatrix} a-1 & m^2 \\ 3 & -1 \\ 2 & m \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} -a & m+1 \\ a & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$، $C=2A-B$، $c_{21}=2c_{32}$ و $c_{11}=-c_{22}$ باشد، آنگاه مقدار $a-2m$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$

۲) ۱

۳) -1

۴) $\frac{2}{3}$

۱۱۴- حاصل عبارت $\begin{bmatrix} \sin 15^\circ & -\cos 15^\circ \\ \cos 15^\circ & \sin 15^\circ \end{bmatrix} + \sin 15^\circ \begin{bmatrix} \cos 15^\circ & \sin 15^\circ \\ -\sin 15^\circ & \cos 15^\circ \end{bmatrix}$ $\cos 15^\circ$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

۱۱۵- اگر $A=[i+j]_{2\times 2}$، $B=\begin{bmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{bmatrix}$ و $A+B$ ماتریسی اسکالر باشد، جمع درایه‌های ماتریس $A+B$ کدام است؟

۱) -4

۲) -1

۳) ۲

۴) ۳

۱۱۶- اگر $A^2=\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$، $B^2=\begin{bmatrix} 1 & -16 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ و $A+B=\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $AB+BA$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -16 & -6 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} 6 & -16 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 16 & -6 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} 6 & 16 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$

۱۱۷- اگر $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون دوم ماتریس A^4 کدام است؟

۱) ۲۴

۲) ۲۷

۳) ۳۴

۴) ۳۷

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۸- اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & a\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$ و برای هر $n\in\mathbb{N}$، مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۲n}+A^{۲n-۱}$ برابر ۱۱ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۳

۱۱۹- اگر $A=BA$ و $B=AB$ باشد، حاصل $(A+B)(A-B)$ همواره کدام است؟

۱) $A-B$
۲) $۲(A-B)$
۳) $A+B$
۴) $\bar{O}$

۱۲۰- اگر $A=\begin{bmatrix}a & -۲\\ b & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ -۳ & ۵\end{bmatrix}$ باشند به طوری که $(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$، آنگاه حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۵
۳) ۸
۴) ۱۱

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۱۳۱- **گزینهٔ «۲»** *(مهدی نیک‌زاد)*

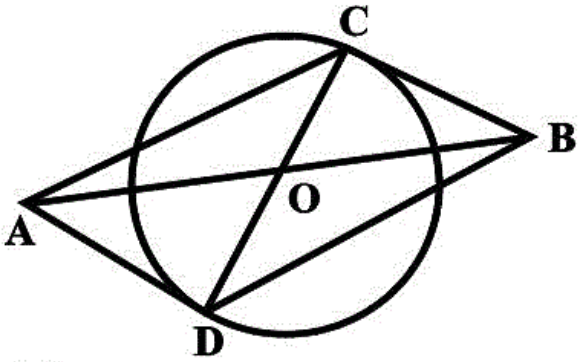
عکس قضیهٔ گزینهٔ «۲» برقرار نیست چون اگر در یک چهارضلعی، قطرها یکدیگر را نصف کنند، آن‌گاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است و الزاماً مستطیل نمی‌باشد.

(هندسه ۱: ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ صفحهٔ ۲۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۳۲- **گزینهٔ «۱»** *(علی ایمانی)*

برای رسم یک متوازی‌الاضلاع به طول قطرهای ۲ و ۳، کافی است پاره‌خطی به طول ۳ رسم کنیم و سپس به مرکز وسط این پاره‌خط و شعاع ۱، دایره‌ای رسم نماییم.



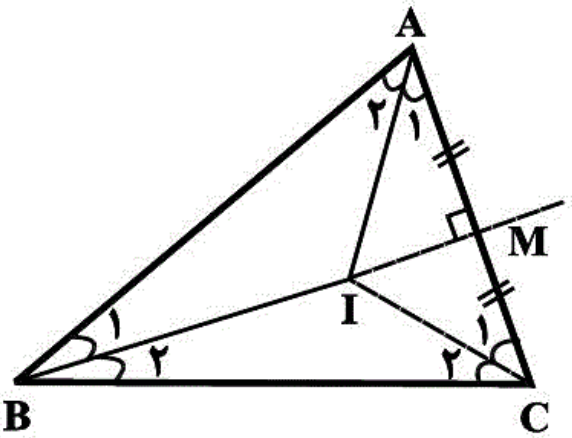
دو سر هر یک از قطرهای دایره (به جز قطری که در راستای پاره‌خط AB است) به همراه نقاط A و B، متوازی‌الاضلاعی به طول قطرهای ۲ و ۳ ایجاد می‌کنند.

(هندسه ۱: ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۳۳- **گزینهٔ «۲»** *(سید محمدرضا حسینی‌فرد)*

می‌دانیم سه نیمساز داخلی در هر مثلث همرس‌اند، پس مطابق شکل نقطهٔ همرسی نیمسازهای زوایای داخلی مثلث ABC روی نیمساز زاویهٔ C نیز قرار دارد.



مطابق شکل اگر I نقطهٔ همرسی نیمسازهای زوایای داخلی مثلث ABC باشد، آن‌گاه MI عمودمنصف ضلع AC است و در نتیجه دو مثلث AMI و CMI به حالت (ض ز ض) هم‌نهشت هستند و داریم:

$$\hat{A}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{C}}{2} \Rightarrow \hat{A} = C$$

$$\xrightarrow[ABC]{\Delta} AB = BC$$

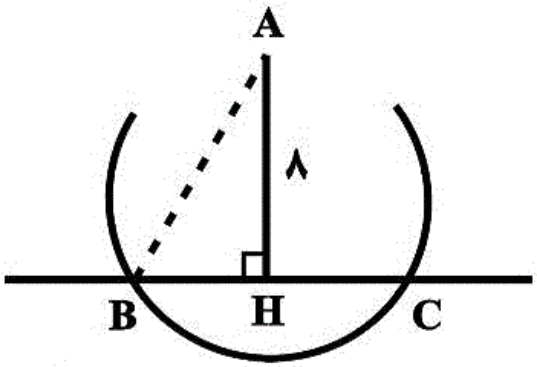
(هندسه ۱: ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳، ۱۹ و ۲۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۴- **گزینهٔ «۴»** *(امیر وفائی)*

نقطهٔ A از نقاط B و C به یک فاصله است، بنابراین روی عمودمنصف پاره‌خط BC واقع است. داریم:



$$\overset{\Delta}{AHB}: AB^{۲} = AH^{۲} + BH^{۲}$$

$$\Rightarrow ۱۰^{۲} = ۸^{۲} + BH^{۲} \Rightarrow BH^{۲} = ۳۶ \Rightarrow BH = ۶$$

برای این که دو کمان به مراکز B و C و به شعاع برابر R، یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند، کافی است R بزرگتر از نصف طول پاره‌خط BC، یعنی $R > ۶$ باشد.

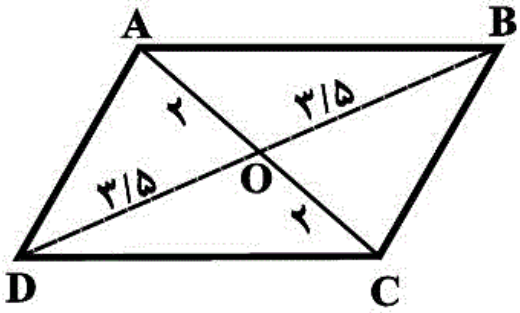
(هندسه ۱: ترسیم‌های هندسی و استدلال: صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۵- **گزینهٔ «۴»** *(سید محمدرضا حسینی‌فرد)*

اگر شکل زیر یک متوازی‌الاضلاع با قطرهای ۴ و ۷ باشد، با استفاده از نامساوی مثلثی در مثلث AOB داریم:



$$۳/۵-۲<AB<۳/۵+۲\Rightarrow ۱/۵<AB<۵/۵$$

پس طول ضلع این متوازی‌الاضلاع نمی‌تواند برابر ۶ باشد. در گزینهٔ «۱» اگر ضلع مربع a باشد قطر آن $a\sqrt{۲}$ است و $a=\frac{۲}{\sqrt{۲}+۱}$ بدست می‌آید که مربع قابل رسم است.

در گزینهٔ «۲» طول قطرهای لوزی هر عدد مثبتی می‌تواند باشد و محدودیتی ندارد. در گزینهٔ «۳» با کمک قضیهٔ فیثاغورس، طول ضلع دیگر مستطیل $\sqrt{۲۲۱}$ به‌دست می‌آید و مستطیل قابل رسم است.

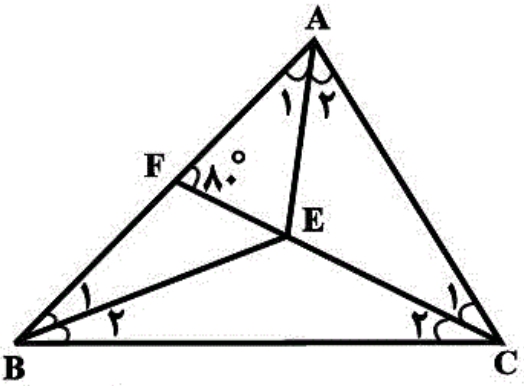
(هندسه ۱: ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۶- **گزینهٔ «۲»** (مهدی نیک‌زاد)

با توجه به شکل AE، BE و CE نیمساز زوایای داخلی مثلث ABC هستند. داریم:



$$\hat{A} = ۲\hat{A}_۲ = ۲\times ۳۰^\circ = ۶۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{ACF}: \hat{C}_۱ + ۶۰^\circ + ۸۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C}_۱ = ۴۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{C} = ۲\hat{C}_۱ = ۸۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: \hat{B} = ۱۸۰^\circ - (۶۰^\circ + ۸۰^\circ) = ۴۰^\circ \Rightarrow \hat{B}_۱ = \alpha = ۲۰^\circ$$

(هندسه ۱: ترسیم‌های هندسی و استدلال: صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

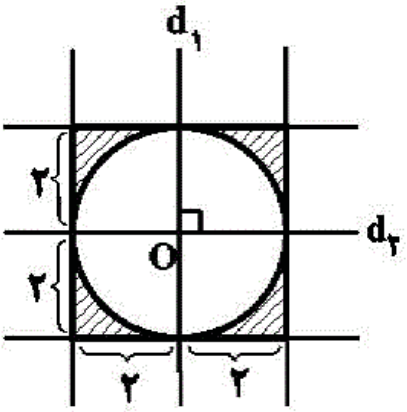
۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۷- **گزینهٔ «۳»** *(فرشاد فرامرزی)*

نقاطی که از یک خط داده شده به فاصلهٔ ۲ واحد باشند، دو خط به موازات آن و به فاصلهٔ ۲ واحد در دو طرف آن می‌باشند؛ بنابراین نقاط واقع در بین این دو خط فاصله‌ای کمتر از دو واحد تا خط اولیه دارند. از طرفی، مجموعهٔ نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها تا نقطهٔ O، بیشتر از دو واحد باشد، نقاط خارج دایره‌ای به مرکز O و شعاع دو واحد هستند. دو خط به موازات هر یک از خطوط d_1 و d_2 و به فاصلهٔ ۲ واحد از آن‌ها و همچنین دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۲ واحد رسم می‌کنیم. نقاط واقع در ناحیهٔ بین آن‌ها، جواب مسئله هستند. داریم:

$$S_{\text{هاشورخورده}} = S_{\text{مربع}} - S_{\text{دایره}} = ۴^۲ - \pi \times ۲^۲ = ۱۶ - ۴\pi = ۴(۴ - \pi)$$



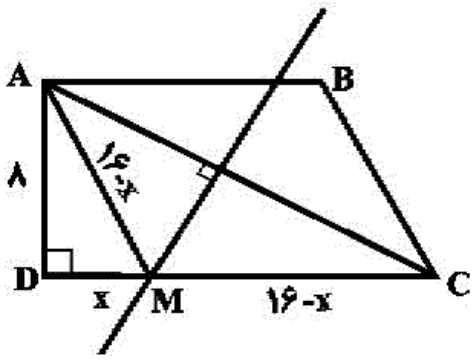
(هندسه ۱: ترسیم‌های هندسی و استدلال: صفحه‌های ۱۰ و ۱۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۸- **گزینهٔ «۱»** *(جواد حاتمی)*

چون M روی عمودمنصف AC قرار دارد، پس از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است $(MA = MC)$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADM داریم:



$$AM^۲ = AD^۲ + DM^۲ \Rightarrow (۱۶-x)^۲ = ۶۴ + x^۲$$

$$\Rightarrow ۲۵۶ - ۳۲x + x^۲ = ۶۴ + x^۲ \Rightarrow x = ۶$$

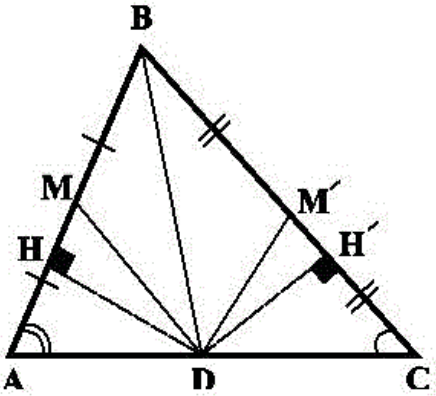
(هندسه ۱: ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۹- **گزینهٔ «۴»**

مثلث ABC را رسم می‌کنیم.



هر نقطهٔ روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. بنابراین $DH = DH'$ است. طبق فرض $\hat{A} > \hat{C}$، بنابراین ضلع روبه‌رو به زاویهٔ $\hat{A}$ بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ $\hat{C}$، یعنی $BC > AB$ می‌باشد.

$$BC > AB \Rightarrow \frac{BC}{۲} > \frac{AB}{۲} \Rightarrow BM' > BM$$

$$\frac{S_{BDM'}}{S_{BDM}} = \frac{\frac{۱}{۲}BM' \times DH'}{\frac{۱}{۲}BM \times DH} = \frac{BM'}{BM} > ۱$$

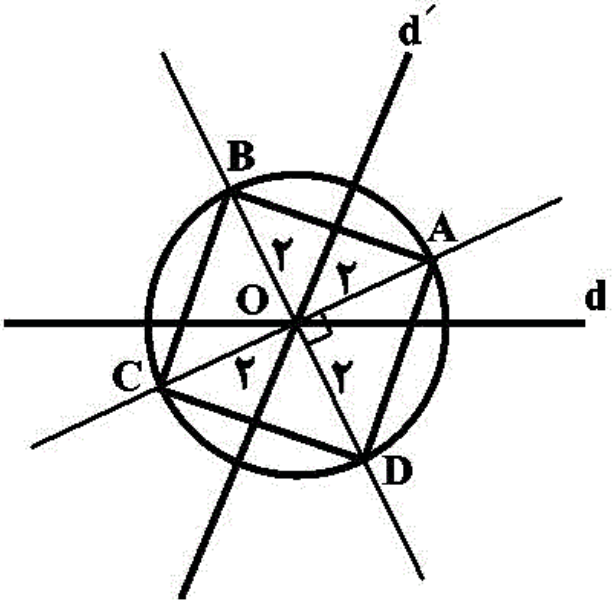
(هندسه ۱: ترسیم‌های هندسی و استدلال: صفحه‌های ۱۱، ۱۲ و ۲۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۴۰- **گزینهٔ «۳»** *(فرشاد فرامرزی)*

نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله باشند، نیمسازهای چهار زاویهٔ تشکیل شده توسط دو خط هستند که دو خط عمود بر هم می باشند. (نیمسازهای زوایای مکمل و مجاور، بر هم عمودند.)



از طرفی نقاطی که از نقطهٔ O به فاصلهٔ ۲ می‌باشند، بر یک دایره به مرکز O و شعاع ۲ واقع‌اند. نقاط برخورد این دایره با نیمسازها، جواب مسئله می‌باشند.

در چهارضلعی $ABCD$، قطرها عمودمنصف هم و هم‌اندازه بوده و بنابراین چهارضلعی مربع است. در نتیجه داریم:

$$S_{ABCD} = \frac{۴^۲}{۲} = ۸$$

(هندسه ۱: ترسیم‌های هندسی و استدلال: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۱- **گزینهٔ «۱»** *(سید وحید ذوالفقاری)*

مثال نقض برای گزینه‌های «۲»، «۳» و «۴» عبارت‌اند از:

گزینهٔ «۲»: $(-۱)^۲ = (۱)^۲$ **ولی** $-۱ \neq ۱$

گزینهٔ «۳»: $(-۳)^۲ > ۲^۲$ **ولی** $-۳ < ۲$

گزینهٔ «۴»: $-۲ < ۲$ **ولی** $-\frac{۱}{۲} < \frac{۱}{۲}$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: مشابه کار در کلاس، صفحهٔ ۷)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۲۲- **گزینهٔ «۴»** *(سید محمدرضا حسینی‌فرد)*

گزارهٔ گزینهٔ «۱» درست است و قابل رد کردن نیست.

گزارهٔ گزینهٔ «۲» نادرست است و قابل اثبات نیست.

گزارهٔ گزینهٔ «۳» درست است و قابل رد کردن نیست. همچنین برهان خلف برای اثبات درستی یک حکم استفاده می‌شود.

اثبات درستی گزارهٔ گزینهٔ «۴» به صورت زیر است:

$$a = ۲k + ۱, b = ۲q + ۱$$

$$\Rightarrow ab = (۲k + ۱)(۲q + ۱) = ۴kq + ۲k + ۲q + ۱$$

$$= ۲(۲kq + k + q) + ۱ = ۲q' + ۱$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۲ تا ۶)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۳- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا طایفه تبریزی)*

$$\left.\begin{array}{l} a \mid 3k+1 \xrightarrow{\times 5} a \mid 15k+5 \\ a \mid 5k+4 \xrightarrow{\times 3} a \mid 15k+12 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} a \mid 7$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 7 \end{cases}$$

بنابراین بیش‌ترین مقدار a ، برابر ۷ است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۲۴- **گزینهٔ «۴»** *(مهدی نیک‌زاد)*

$$\left.\begin{array}{l} x+2 \mid x+2 \xrightarrow{\times 3} x+2 \mid 3x+6 \\ x+2 \mid 3x+4 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} x+2 \mid 2$$

$$\begin{cases} x+2=2 \Rightarrow x=0 & \text{غ‌ق‌ق} \\ x+2=-2 \Rightarrow x=-4 & \text{غ‌ق‌ق} \\ x+2=1 \Rightarrow x=-1 & \text{غ‌ق‌ق} \\ x+2=-1 \Rightarrow x=-3 & \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

بنابراین هیچ نقطه‌ای با مختصات طبیعی روی نمودار این تابع وجود ندارد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۵- **گزینهٔ «۲»** *(سهام مجیدی‌پور)*

درستی گزارهٔ «الف» با فرض $m=۲$ و $n=۳$، رد می‌شود.

(این گزاره با فرض $m>n$ درست است.)

درستی گزارهٔ «پ»، با فرض $m=۳$ و $n=۱$ رد می‌شود.

گزارهٔ «ب» درست است. زیرا فرض کنید $m=۲k$ و $n=۲k+۲$، در این صورت $mn+۱=۲k(۲k+۲)+۱=۴k^۲+۴k+۱=(۲k+۱)^۲$ که مربع کامل است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۲ تا ۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۲۶- **گزینهٔ «۲»** *(نیلوفر مهدوی)*

$$x^۲+y^۲+z^۲\geq -xy+xz-yz \overset{\times ۲}{\Leftrightarrow} ۲x^۲+۲y^۲+۲z^۲\geq -۲xy+۲xz-۲yz$$

$$\Leftrightarrow ۲x^۲+۲y^۲+۲z^۲+۲xy-۲xz+۲yz\geq ۰$$

$$\Leftrightarrow (x^۲+۲xy+y^۲)+(x^۲-۲xz+z^۲)+(y^۲+۲yz+z^۲)\geq ۰$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^۲+(x-z)^۲+(y+z)^۲\geq ۰$$ همواره درست

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۶ تا ۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۷- **گزینهٔ «۱»** *(نیلوفر مهدوی)*

پنج عدد طبیعی و متوالی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$n+۱, n+۲, n+۳, n+۴, n+۵$$

میانگین اعداد $a_۱$ تا $a_۵$ به صورت زیر است:

$$\frac{(n+۱)+(n+۲)+(n+۳)+(n+۴)+(n+۵)}{۵}$$

$$=\frac{۵n+۱۵}{۵}=n+۳$$

بنابراین میانگین پنج عدد طبیعی متوالی برابر با عدد وسطی یعنی $(n+۳)$ است. میانگین عددی فرد است، در نتیجه $(n+۳)$ عددی فرد می‌باشد، پس $(n+۵)$ هم عددی فرد است.

$$a_۳=n+۳ \Rightarrow a_۳=۲k+۱$$

$$a_۵=n+۵ \Rightarrow a_۵=۲k'+۱$$

$$۴a_۳-a_۵=(۸k+۴)-(۲k'+۱)=۲\underbrace{(۴k-k'+۲)}_{k''}-۱=۲k''-۱$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۴ و ۵)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۸- **گزینهٔ «۴»** *(نیلوفر مهدوی)*

نکته:

$$\begin{cases} a \mid b \Rightarrow a \mid kb (k \in \mathbb{Z}) \\ a \mid b, a \mid c \Rightarrow a \mid b \pm c \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} m \mid ۲n+۶ \xrightarrow{\times ۳n} m \mid ۶n^۲ + ۱۸n \\ m \mid ۳n^۲ - ۲n + ۴ \xrightarrow{\times ۲} m \mid ۶n^۲ - ۴n + ۸ \end{array}\right\} \xrightarrow{-} m \mid ۲۲n - ۸$$

$$\left.\begin{array}{l} m \mid ۲۲n - ۸ \xrightarrow{\times(-۱)} m \mid -۲۲n + ۸ \\ m \mid ۲n+۶ \xrightarrow{\times ۱۱} m \mid ۲۲n + ۶۶ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} m \mid ۷۴ \Rightarrow m = \pm ۱, \pm ۲, \pm ۳۷, \pm ۷۴$$

m عددی اول است در نتیجه داریم:

$$m = ۲, ۳۷$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۹- **گزینهٔ «۳»** *(فرشاد فرامرزی)*

گزینه‌ها را به‌ترتیب بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ «۱»: اگر حاصل‌ضرب سه پرانتز فرد باشد (فرض خلف)، پس حاصل هر پرانتز عددی فرد بوده و در نتیجه مجموع آن‌ها نیز عددی فرد است. اما:

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) = (a_1 + a_2 + a_3) - (b_1 + b_2 + b_3) = 0$$

بنابراین فرض خلف باطل بوده و حاصل‌ضرب پرانتزها عددی زوج است.

گزینهٔ «۲»: از آنجا که تنها ترتیب اعداد عوض شده است، پس حتماً یکی از اعداد a_1، a_2 یا a_3 با b_1 برابر بوده و حداقل حاصل یکی از پرانتزها، صفر است و در نتیجه حاصل ضرب آن‌ها نیز صفر بوده و زوج است.

گزینهٔ «۳»: برای مثال اگر هر سه عدد a_1، a_2 و a_3 را فرد در نظر بگیریم، حاصل گزینهٔ «۳» عددی فرد خواهد بود.

گزینهٔ «۴»: از آنجا که تنها ترتیب اعداد عوض شده می‌توانیم بنویسیم:

$$a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3 = 2a_1a_2a_3$$

که عددی زوج است.

پس تنها حاصل گزینه «۳» می‌تواند عددی فرد باشد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحهٔ ۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۰- **گزینهٔ «۲»** *(امیر وفائی)*

$$\left.\begin{array}{l} ۷ \mid ۲a+b+k \xrightarrow{\times ۲} ۷ \mid ۴a+۲b+۲k \\ ۷ \mid ۳a-۲b+۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{مجموع}}$$

$$۷ \mid ۷a+۲k+۲ \xrightarrow{۷ \mid ۷a} ۷ \mid ۲k+۲ \Rightarrow ۷ \mid ۲(k+۱) \Rightarrow ۷ \mid k+۱$$

بنابراین عدد $k+۱$ مضرب ۷ است. بزرگ‌ترین مضرب دو رقمی ۷، عدد ۹۸ است، بنابراین داریم:

$$k+۱=۹۸ \Rightarrow k=۹۷ \Rightarrow \text{مجموع ارقام } k = ۱۶$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۸۱- **گزینهٔ «۴»** *(کاظم اجلالی)*

اگر عرض نقاط نمودار تابع f را بر ۳ تقسیم کنیم (در $\frac{۱}{۳}$ ضرب کنیم) نمودار تابع $y=\frac{۱}{۳}f(x)$ به دست می‌آید و در واقع نمودار تابع f منقبض می‌شود. نمودار تابع گزینهٔ «۱» از انبساط افقی نمودار تابع f، گزینهٔ «۲» از انقباض افقی نمودار تابع f و گزینهٔ «۳» از انبساط عمودی نمودار تابع f حاصل می‌شود.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۶ و ۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۲- **گزینهٔ «۲»** *(علی سلامت)*

ابتدا تغییراتی را که بر روی تابع f صورت گرفته اعمال می‌کنیم.

$$y=f(x)\xrightarrow{\text{طول نقاط ۲ برابر شود}}g(x)=f(\frac{۱}{۲}x)\xrightarrow{\text{انتقال ۴ واحد به راست}}g(x-۴)$$

$$=f(\frac{۱}{۲}(x-۴))=f(\frac{۱}{۲}x-۲)$$

حال برای آنکه تابع حاصل به تابع $y=f(\frac{۱}{۲}x-۴)$ تبدیل شود، آن را ۴ واحد دیگر به سمت راست انتقال می‌دهیم.

$$h(x)=f(\frac{۱}{۲}x-۲)\xrightarrow{\text{انتقال ۴ واحد به راست}}h(x-۴)=f(\frac{۱}{۲}(x-۴)-۲)$$

$$=f(\frac{۱}{۲}x-۲-۲)=f(\frac{۱}{۲}x-۴)$$

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۸۳- **گزینهٔ «۳»** *(علی شهرابی)*

با توجه به دامنه و برد، نتیجه می‌گیریم f روی خط گذرنده از دو نقطهٔ $(-۲۱,۷)$ و $(۴,-۳)$ قرار دارد.

ضابطهٔ f را به دست می‌آوریم:

$$m=\frac{۷-(-۳)}{-۲۱-۴}=\frac{-۲}{۵}$$

$$f(x)=-\frac{۲}{۵}x+b\xrightarrow{(۴,-۳)}-۳=-\frac{۸}{۵}+b\Rightarrow b=-\frac{۷}{۵}$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{۲}{۵}x-\frac{۷}{۵}\Rightarrow f(۱)=-\frac{۹}{۵}\Rightarrow ۳f(۱)=-\frac{۲۷}{۵}=-۵/۴$$

$$\Rightarrow [۳f(۱)]=[-۵/۴]=-۶$$

(ریاضی ۱- تابع، صفحهٔ ۱۰۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۴- **گزینهٔ «۲»** *(عادل حسینی)*

ضابطهٔ تابع همانی f را به صورت $f(x)=x$ و ضابطهٔ تابع ثابت g را به صورت $g(x)=k$ در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\frac{۳f(g(۲))-g(f(-۱))}{f(۳)-۲g(۰)}=\frac{۳f(k)-g(-۱)}{۳-۲k}=\frac{۳k-k}{۳-۲k}$$

$$=\frac{۲k}{۳-۲k}=۲\Rightarrow k=۱$$

پس تابع ثابت g به صورت $g(x)=۱$ است.

$$\Rightarrow g(۰)=۱$$

(ریاضی۱- تابع، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۸۵- **گزینهٔ «۲»** *(حمیدرضا نوش‌کاران)*

برای اینکه رابطهٔ داده شده یک تابع باشد، باید $m-۲$ و $m^۲-۸$ برابر باشند:

(زیرا مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتبی هستند که مؤلفه‌های اول برابر دارند.)

$$m^۲-۸=m-۲\Rightarrow m^۲-m-۶=۰$$

$$\Rightarrow (m-۳)(m+۲)=۰\Rightarrow \begin{cases} m=۳ \\ m=-۲ \text{ غق} \end{cases}$$

دقت کنید که به ازای $m=-۲$، دو زوج مرتب $(۲,۱)$ و $(۲,-۴)$ عضو مجموعه خواهند شد، بنابراین f نمی‌تواند تابع باشد، پس تابع f به صورت زیر است:

$$f=\{(-۲,۱),(۲,۱),(۷,۱)\}$$

برد تابع f، $\mathbb{R}_f=\{۱\}$ است و فقط یک عضو دارد.

(ریاضی ۱- تابع، صفحه‌های ۹۴ تا ۱۰۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۶- **گزینهٔ «۳»** *(علی سلامت)*

محیط مستطیل برابر ۱۲ است، بنابراین:

$$۲(x+y)=۱۲\Rightarrow x+y=۶\Rightarrow y=۶-x$$

همچنین قطر مستطیل از رابطهٔ $d^۲=x^۲+y^۲$ به دست می‌آید. برای اینکه قطر مستطیل را به عنوان تابعی از طول آن بنویسیم، در رابطهٔ اخیر قرار می‌دهیم: $y=۶-x$.

$$d^۲=x^۲+y^۲\xrightarrow{y=۶-x}d^۲=x^۲+(۶-x)^۲$$

$$\Rightarrow d^۲=۲x^۲-۱۲x+۳۶\Rightarrow d=\sqrt{۲x^۲-۱۲x+۳۶}$$

(ریاضی- تابع، صفحهٔ ۱۰۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۸۷- **گزینهٔ «۲»** *(شاهین پروازی)*

عبارت زیر رادیکال را بزرگتر از صفر در نظر می‌گیریم (به دلیل اینکه مخرج، نباید برابر صفر شود.):

$$D_g:-(f(x))^۲-f(x)+۲>۰\Rightarrow (f(x))^۲+f(x)-۲<۰$$

$$\Rightarrow (f(x)+۲)(f(x)-۱)<۰\Rightarrow -۲<f(x)<۱$$

این مجموعه شامل ۵ عدد صحیح است. $\{۱\}-(-۴,۳)\ni x\Rightarrow$ با توجه به نمودار

(حسابان ۱- تابع، صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۸۸- **گزینهٔ «۱»** *(کاظم اجلالی)*

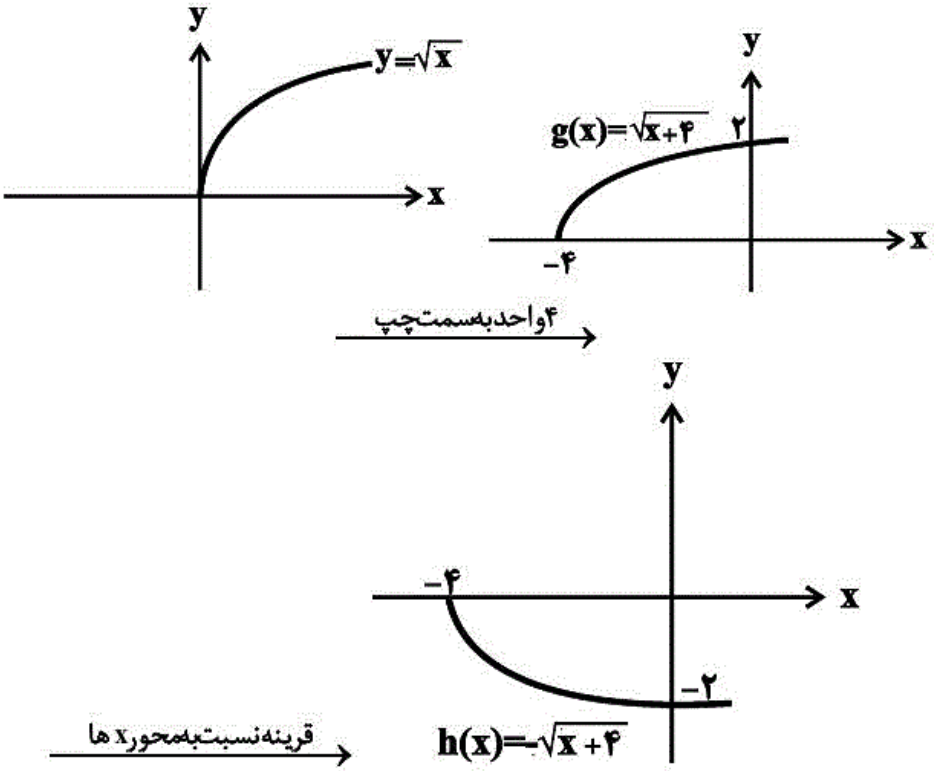
ضابطهٔ تابع f را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+۴} & ;x>۰\\ -\sqrt{x+۴} & ;-۴\le x<۰\end{cases}$$

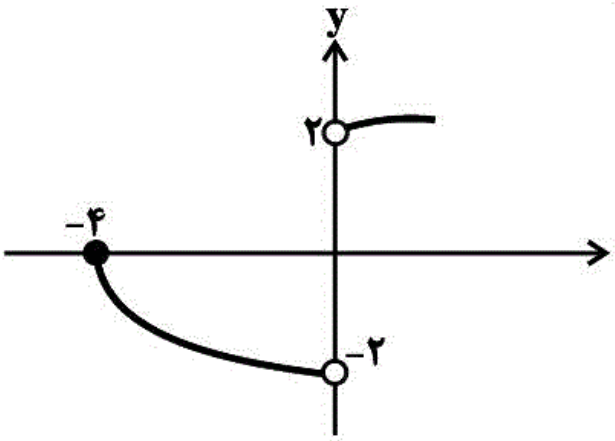
نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را ۴ واحد به چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $g(x)=\sqrt{x+۴}$ به دست آید. سپس این نمودار را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $h(x)=-\sqrt{x+۴}$ به دست آید. حال از نمودار تابع g قسمتی را که سمت راست محور y قرار دارد انتخاب می‌کنیم و از نمودار تابع h قسمتی را که در شرط $-۴\le x<۰$ صدق می‌کند، انتخاب

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

می‌کنیم.



پس نمودار تابع f به صورت زیر است:



برد این تابع مجموعهٔ $(-2,0]\cup(2,+\infty)$ است.

(حسابان ۱- تابع، صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

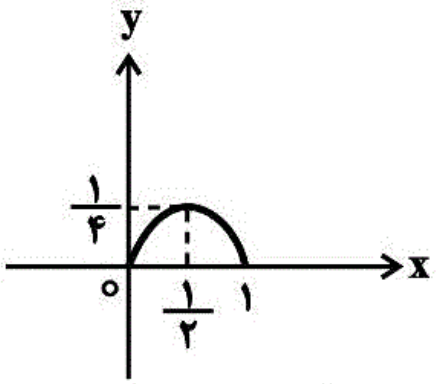
۸۹- **گزینهٔ «۴»** (سعید علم‌پور)

ابتدا دامنهٔ تابع را تعیین می‌کنیم.

$$\frac{1-x}{x} \geq 0 \Rightarrow 0 < x \leq 1 \Rightarrow D_y = (0,1]$$

$$y = x\sqrt{\frac{1-x}{x}} = \sqrt{x^2\left(\frac{1-x}{x}\right)} = \sqrt{x-x^2}$$

اگر فرض کنیم $g(x) = x - x^2$ باشد، نمودار تابع g در بازهٔ $(0,1]$ قسمتی از یک سهمی به صورت شکل زیر است:



یعنی g همهٔ مقادیر بازهٔ $[0,\frac{1}{4}]$ را می‌پذیرد، پس تابع $y = \sqrt{g(x)}$ همهٔ مقادیر بازهٔ $[0,\frac{1}{2}]$ را می‌پذیرد.

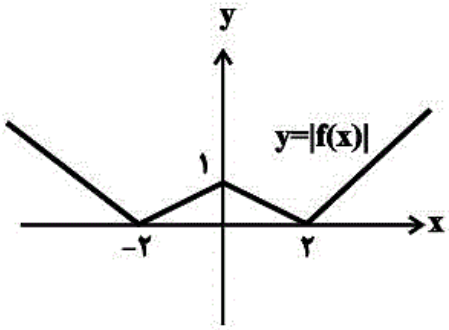
$$\Rightarrow R_y = [0,\frac{1}{2}]$$

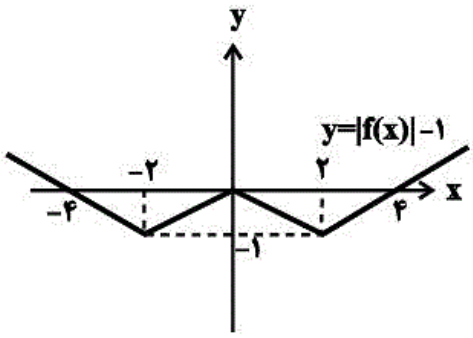
(حسابان ۱- تابع، صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

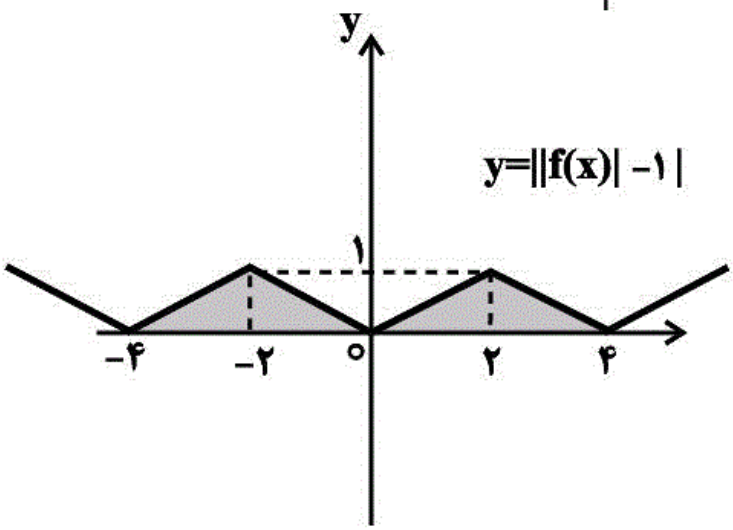
۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۰- **گزینهٔ «۲»** (حمید علیزاده)







$$\Rightarrow S_{\text{هاشورخورده}} = ۲ \text{ (مساحت مثلث)} = ۲(\frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۱) = ۴$$

(ریاضی ۱- تابع، صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۱- **گزینهٔ «۲»** (مهدی ملارمضانی)

با ساده کردن f داریم:

$$f(x)=\frac{x[2x]}{\sqrt{x^2}}=\frac{x[2x]}{|x|}=\begin{cases}\frac{x[2x]}{x}; x>0\\ \frac{x[2x]}{-x}; x<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[2x] & ; x>0\\ -[2x] & ; x<0\end{cases}$$

با برابر قرار دادن دو تابع f و g داریم:

اگر $x>0$ باشد: (I) $[2x]=1\Rightarrow 1\le 2x<2\Rightarrow \frac{1}{2}\le x<1$

اگر $x<0$ باشد: (II) $[2x]=-1\Rightarrow -1\le 2x<0\Rightarrow -\frac{1}{2}\le x<0$

$$\xrightarrow{(I)\cup(II)} x\in=[-\frac{1}{2},0)\cup[\frac{1}{2},1)=[-\frac{1}{2},1)-[0,\frac{1}{2})$$

(حسابان ۱- تابع، صفحه‌های ۴۱ تا ۴۳ و ۴۸ تا ۵۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۲- **گزینهٔ «۴»** (کاظم اجلالی)

ابتدا توجه کنید که ضابطهٔ توابع g و h به صورت زیر است:

$$g(x)=f(x-k)=x-k-[۲(x-k)]=x-k-[۲x-۲k]$$

$$h(x)=f(x)+k=x-[۲x]+k$$

اگر $۲k$ عددی صحیح باشد، داریم:

$$g(x)=x-k-[۲x]+۲k=x-[۲x]+k$$

یعنی نمودار تابع g بر نمودار تابع h منطبق می‌شود. بنابراین k برابر ۱، ۲ و $\frac{۱}{۲}$ می‌تواند باشد، ولی برابر $\frac{۱}{۴}$ نمی‌تواند باشد.

توجه کنید که به ازای $k=\frac{۱}{۴}$ داریم:

$$\begin{cases} g(۰)=۰-\frac{۱}{۴}-[۰-\frac{۱}{۲}]=\frac{۳}{۴} \\ \\ h(۰)=۰-[۰]+\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۴} \end{cases} \Rightarrow g(۰)\neq h(۰)$$

(حسابان ۱- تابع، صفحه‌های ۴۹ تا ۵۲)

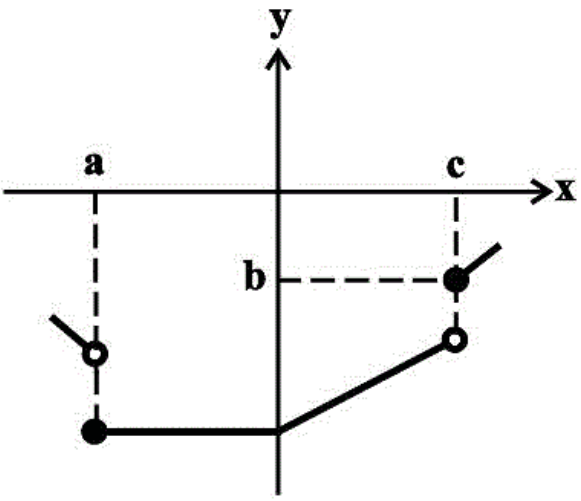
۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۳- **گزینهٔ «۳»** *(عادل حسینی)*

برای رسم نمودار تابع f، دامنهٔ آن را به بازه‌هایی تقسیم می‌کنیم که عبارت $۲x$، بین دو مقدار صحیح متوالی قرار بگیرد:

$$\begin{cases} -۱ \le ۲x < ۰ \Rightarrow [۲x] = -۱ \Rightarrow -\frac{۱}{۲} \le x < ۰ ; f(x) = \frac{x-۱}{-x+۱} = -۱ \\ ۰ \le ۲x < ۱ \Rightarrow [۲x] = ۰ \Rightarrow ۰ \le x < \frac{۱}{۲} ; f(x) = \frac{x-۱}{۱} = x-۱ \end{cases}$$



با توجه به ضابطه‌های بالا و نمودار f، مشخص است که $a = -\frac{۱}{۲}$ و $c = \frac{۱}{۲}$ است. هم‌چنین برای محاسبهٔ b، باید $f(c)$ را محاسبه کنیم:

$$b = f(c) = f(\frac{۱}{۲}) = \frac{\frac{۱}{۲} - ۱}{[۱]\frac{۱}{۲} + ۱} = -\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow ab = \frac{۱}{۶}$$

(حسابان ۱- تابع، صفحه‌های ۴۹ تا ۵۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۹۴- **گزینهٔ «۳»** *(عادل حسینی)*

راه اول: نمودارهای دو تابع $f(x) = [x]x$ و $g(x) = ۱ - |x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

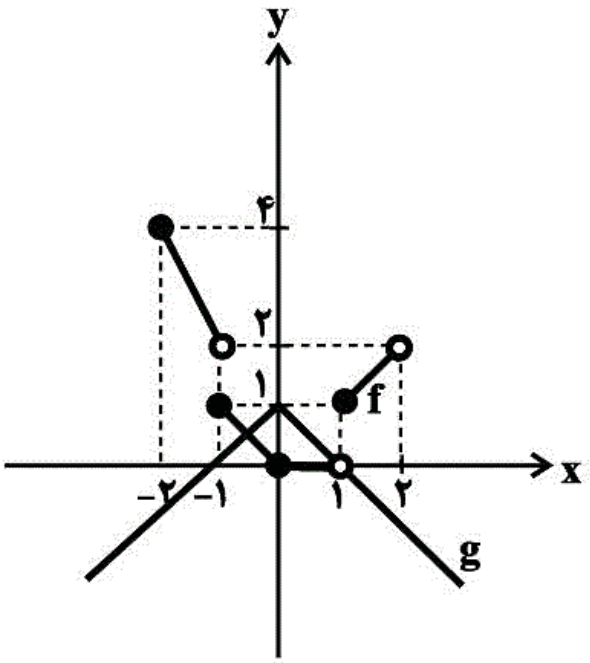
$$x < -۱ : f(x) = -۲x$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$-1 \le x < 0 : f(x) = -x$

$0 \le x < 1 : f(x) = 0$

$1 \le x < 2 : f(x) = x$



با توجه به شکل فوق، نمودارهای دو تابع f و g فقط در یک نقطه متقاطع‌اند، بنابراین معادلهٔ صورت سؤال یک جواب دارد. دقت کنید که $f(1) = 1$ است.

راه دوم:

واضح است که اگر $x \ge 0$ باشد، $[x] \ge 0$ و در نتیجه $x[x] \ge 0$ است و اگر $x < 0$ باشد، $[x] < 0$ و در نتیجه $x[x] > 0$ است، بنابراین در هر حالت $x[x] \ge 0$ خواهد بود، برای این‌که معادله جواب داشته باشد، باید $|x| - 1 \ge 0$ یعنی $-1 \le x \le 1$ باشد. حال اگر $0 \le x < 1$ باشد، معادله به صورت $x - 1 = 0$ درمی‌آید که جواب ندارد. اگر $-1 \le x < 0$ باشد، معادله به صورت $-x = 1 + x$ در می‌آید که جواب آن $x = -\frac{1}{2}$ است و اگر $x = 1$ باشد، معادله به صورت $1 - 1 = 1$ در می‌آید که برقرار نیست. پس تنها جواب معادله (طول تنها نقطهٔ مشترک دو نمودار) $x = -\frac{1}{2}$ است.

(حسابان ۱- تابع، صفحه‌های ۴۸ تا ۵۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۵- **گزینهٔ «۴»** *(حمیدرضا نوش‌کاران)*

نقطهٔ $A=(۲,-۱)$ روی تابع $y=-f(۲x)+۱$ است، پس:

$$-f(۴)+۱=-۱\Rightarrow f(۴)=۲$$

حال نقطهٔ متناظر آن روی $y=۲f(۳x-۲)-۲$ را به صورت زیر می‌یابیم:

$$۳x-۲=۴\Rightarrow x=۲$$

$$y=۲f(۴)-۲=(۲\times ۲)-۲=۲$$

پس نقطهٔ متناظر آن $A'=(۲,۲)$ است. که مجموع طول و عرض آن برابر ۴ است.

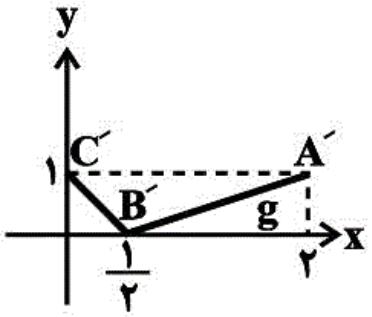
(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۹۶- **گزینهٔ «۴»** *(عادل حسینی)*

روش اول: نمودار تابع f را ابتدا یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y_۱=f(x+۱)$ به دست آید، سپس طول نقاط آن را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا نمودار $y_۲=f(۲x+۱)$ به دست آید، سپس برای به دست آوردن نمودار تابع $y_۳=-f(-۲x+۱)$، نمودار $y_۲$ را نسبت به مبدأ مختصات (قرینه نسبت به هر دو محور طول و عرض) قرینه می‌کنیم. در انتها نمودار $y_۳$ را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع g به دست آید.

روش دوم (مشابه روش سؤال قبل): نقاط $A(-۳,۰)$، $B(۰,۱)$ و $C(۱,۰)$ روی نمودار تابع f به نقاط $A'(۲,۱)$، $B'(\frac{۱}{۲},۰)$ و $C'(۰,۱)$ روی نمودار تابع g متناظر می‌شود. با وصل کردن نقاط A'، B' و C' نمودار g حاصل می‌شود.



(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۷- **گزینهٔ «۳»** (عادل حسینی)

مراحل را به ترتیب انجام می‌دهیم:

$$f(x)=\sqrt{x} \xrightarrow[\text{و یک واحد به پایین}]{\text{قرینه نسبت به محور y}} y=\sqrt{-x}-1$$

$$\xrightarrow[\text{نسبت به محور x}]{\text{قرینهٔ نقاط با عرض مثبت}} y=-|\sqrt{-x}-1|$$

$$\xrightarrow[\text{به راست}]{\text{انتقال یک واحد}} g(x)=-|\sqrt{-(x-1)}-1|=-|\sqrt{1-x}-1|$$

دقت کنید که اگر بخواهیم نقاط با عرض منفی را در نمودار f نسبت به محور x قرینه کنیم، از تبدیل $|f(x)|$ استفاده می‌کنیم. برای قرینه کردن نقاط با عرض مثبت نیز از تبدیل $-|f(x)|$ استفاده می‌کنیم.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۹۸- **گزینهٔ «۲»** (علی سلامت)

ابتدا نمودار تابع $g(x)$ را ۴ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم.

$$g(x)=f(\frac{1}{2}x-2)+1 \xrightarrow{x\to x+4} g(x+4)=f(\frac{1}{2}(x+4)-2)+1$$

$$=f(\frac{1}{2}x+2-2)+1=f(\frac{1}{2}x)+1$$

حال نمودار حاصل را ۳ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم.

$$y=f(\frac{1}{2}x)+1 \xrightarrow{y\to y-3} h(x)=f(\frac{1}{2}x)+1-3=f(\frac{1}{2}x)-2$$

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۹- **گزینهٔ «۳»** *(عادل حسینی)*

ابتدا ضابطهٔ g را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=(x+1)^2 \xrightarrow{\text{طول نقاط دو برابر می‌شود.}} y=(\frac{x}{2}+1)^2$$

$$\xrightarrow[\text{یک واحد به چپ}]{\text{یک واحد به پایین}} g(x)=(\frac{x+1}{2}+1)^2-1$$

$$\Rightarrow g(x)=\frac{(x+3)^2}{4}-1$$

$$\xrightarrow{f(x)=g(x)} x^2+2x+1=\frac{x^2+6x+9}{4}-1$$

$$\Rightarrow x^2+2x+1=\frac{x^2+6x+5}{4}$$

$$\Rightarrow 4x^2+8x+4=x^2+6x+5$$

$$\Rightarrow 3x^2+2x-1=0$$

معادلهٔ بالا دو جواب حقیقی دارد که مجموع آن‌ها برابر $-\frac{2}{3}$ است. پس مجموع طول نقاط برخورد نمودارهای f و g برابر $-\frac{2}{3}$ است.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

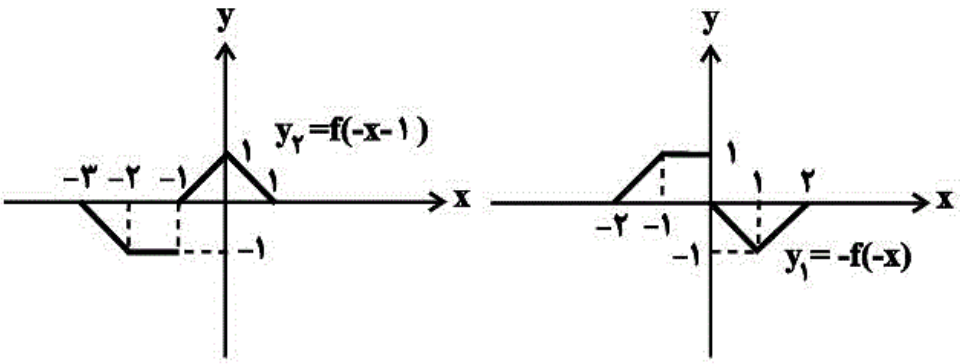
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۰- **گزینهٔ «۱»** *(عادل حسینی)*

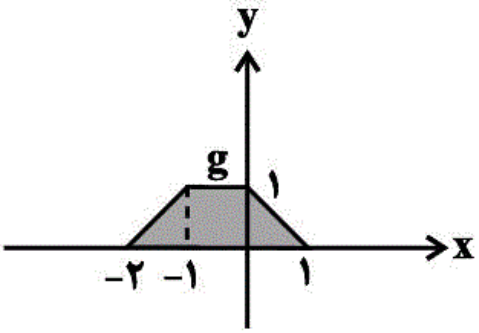
ابتدا نمودار توابع $y_1=-f(-x)$ و $y_2=f(-x-1)$ را رسم می‌کنیم.

سپس از y_1 قسمت سمت چپ محور y و از y_2 قسمت راست محور y را نگه می‌داریم تا نمودار g حاصل شود.

دقت کنید که y_1 قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به مبدأ مختصات است. برای y_2 نیز، ابتدا f را یک واحد به راست می‌بریم، سپس آن را نسبت به محور y قرینه می‌کنیم. داریم:



پس نمودار تابع g مطابق شکل زیر است:



مساحت ذوزنقهٔ هاشورخورده برابر $S=(\frac{۳+۱}{۲})\times ۱=۲$ است.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۱- **گزینهٔ «۲»**

$$(۳,m^۲)=(۳,m+۲)\Rightarrow m^۲=m+۲$$

$$\Rightarrow m^۲-m-۲=(m-۲)(m+۱)=۰$$

$$\Rightarrow m=۲\ ,\ m=-۱$$

با جای‌گذاری این مقادیر m و تشکیل رابطه داریم:

$$(۱)\ m=-۱: A=\{(۳,۱),(۲,۱),(-۳,-۱),(-۲,-۱),(۳,۱),(-۱,۴)\}$$

A به ازای $m=-۱$ تابع است.

$$(۲)\ m=۲: A=\{(۳,۴),(۲,۱),(-۳,۲),(-۲,۲),(۳,۴),(۲,۴)\}$$

به ازای $m=۲$ تابع نیست. بنابراین فقط $m=-۱$ قابل قبول است.

(ریاضی۱- تابع، صفحه‌های ۹۴ تا ۱۰۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۲- **گزینهٔ «۴»** *(کتاب آبی ریاضیات کنکور رشتهٔ ریاضی)*

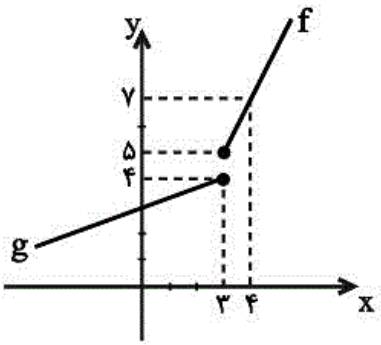
نمودار توابع f و g را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

$$f(x)=۲x-۱\ ,\ D_f=[۳,+\infty)$$

x	۳	۴
$f(x)$	۵	۷

$$g(x)=\frac{۱}{۳}x+۳\ \ ,\ \ D_g=(-\infty,۳]$$

x	۰	۳
$g(x)$	۳	۴



با توجه به نمودار توابع f و g، اجتماع برد دو تابع f و g برابر است با $\mathbb{R}-(۴,۵)$.

(ریاضی ۱- تابع، صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۰۲- **گزینهٔ «۲»** *(کتاب آبی ریاضیات کنکور رشتهٔ ریاضی)*

تنها در صورتی دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x+۴}{۲x^۲-ax+b-۵}$ به صورت $\mathbb{R}-\{۲\}$ است که مخرج کسر، ریشهٔ مضاعف $x=۲$ داشته باشد. پس با توجه به ضریب $x^۲$ در مخرج کسر، ضابطهٔ تابع f به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\frac{x+۴}{۲(x-۲)^۲}=\frac{x+۴}{۲x^۲-۸x+۸}=\frac{x+۴}{۲x^۲-ax+b-۵}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-a=-۸\Rightarrow a=۸\\ b-۵=۸\Rightarrow b=۱۳\end{cases}\Rightarrow a+b=۲۱$$

(حسابان ۱- تابع، صفحه‌های ۴۴ و ۴۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۴- **گزینهٔ «۱»** *(کتاب آبی ریاضیات کنکور رشتهٔ ریاضی)*

$$x^۲ + x < ۰ \Rightarrow x(x+۱) < ۰ \Rightarrow -۱ < x < ۰$$

$$-۱ < x < ۰ \Rightarrow \begin{cases} [x] = -۱ \\ ۰ < x^۲ < ۱ \Rightarrow [x^۲] = ۰ \\ -۱ < x^۳ < ۰ \Rightarrow [x^۳] = -۱ \\ ۰ < x^۴ < ۱ \Rightarrow [x^۴] = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow [x] + [x^۲] + [x^۳] + [x^۴] = -۱ + ۰ - ۱ + ۰ = -۲$$

(حسابان ۱- تابع، صفحه‌های ۴۹ تا ۵۲)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

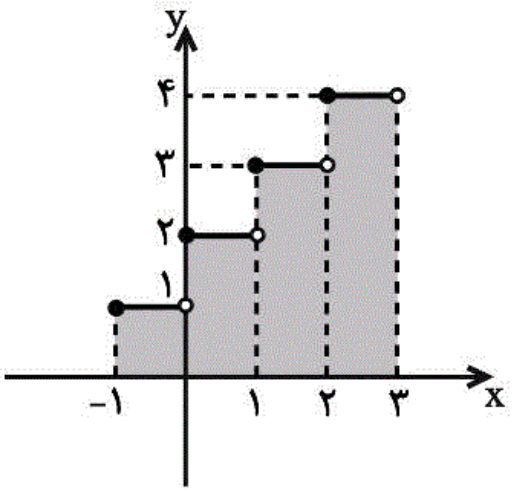
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۵- گزینهٔ «۴»

ابتدا نمودار تابع را در فاصلهٔ $(۳, -۱]$ رسم می‌کنیم. توجه کنید که:

$$[x+۲]=[x]+۲$$

$$\begin{cases} -۱\le x<۰ \Rightarrow y=[x]+۲=-۱+۲=۱ \\ ۰\le x<۱ \Rightarrow y=[x]+۲=۰+۲=۲ \\ ۱\le x<۲ \Rightarrow y=[x]+۲=۱+۲=۳ \\ ۲\le x<۳ \Rightarrow y=[x]+۲=۲+۲=۴ \end{cases}$$



مساحت بین نمودار و محور xها برابر با مساحت قسمت سایه‌زده شده است، بنابراین:

$$S=۱\times۱+۱\times۲+۱\times۳+۱\times۴=۱۰$$

(حسابان ۱- تابع، صفحه‌های ۴۹ تا ۵۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

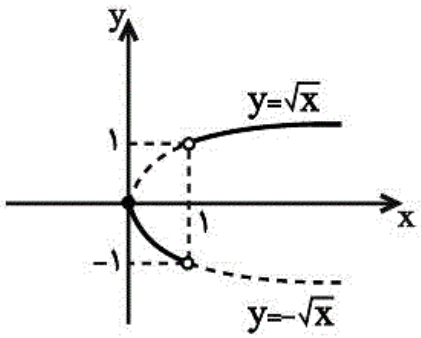
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۶- **گزینهٔ «۳»** *(کتاب آبی ریاضیات کنکور رشتهٔ ریاضی)*

معادلهٔ تابع را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)\sqrt{x}}{x-1} & ;x>1\\ \dfrac{-(x-1)\sqrt{x}}{x-1} & ;0\le x<1\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ;x>1\\ -\sqrt{x} & ;0\le x<1\end{cases}$$

دقت کنید که $x=1$ ریشهٔ مخرج است و در دامنهٔ معادله قرار ندارد. بنابراین، نمودار تابع به شکل زیر است:



(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۷- **گزینهٔ «۴»** *(کتاب آبی ریاضیات کنکور رشتهٔ ریاضی)*

با استفاده از نمودار تابع f، ابتدا نمودار تابع $y=f(1+x)$ را رسم می‌کنیم که با یک واحد انتقال به چپ به‌دست می‌آید. سپس با تبدیل x به $-x$ به نمودار $y=f(1-x)$ می‌رسیم که قرینهٔ نمودار $y=f(1+x)$ نسبت به محور y هاست و در نهایت $y=2f(1-x)$ را رسم می‌کنیم که با انبساط در راستای محور y ها به دست می‌آید.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۸- **گزینهٔ «۴»**

دامنهٔ تابع f بازهٔ $D_f = [-۱, ۴]$ است، پس برای به‌دست آوردن برای دامنهٔ تابع $g(x) = -۳f(\frac{-x}{۲}+۲)$ باید مقدار $\frac{-x}{۲}+۲$ در بازهٔ $[-۱, ۴]$ قرار داشته باشد:

$$\left(\frac{-x}{۲}+۲\right) \in [-۱, ۴] \Rightarrow -۱ \leq \frac{-x}{۲}+۲ \leq ۴$$

$$\Rightarrow -۳ \leq \frac{-x}{۲} \leq ۲ \Rightarrow -۴ \leq x \leq ۶$$

$$\Rightarrow D_g = [-۴, ۶]$$

بنابراین دامنهٔ تابع g شامل ۶ عدد طبیعی ۱ تا ۶ است.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۹- **گزینهٔ «۴»**

برای حل معادلهٔ $۲f(۲x)-۱=k$ داریم:

$$۲f(۲x)-۱=k \Rightarrow ۲f(۲x)=k+۱ \Rightarrow f(۲x)=\frac{k+۱}{۲}$$

تعداد جواب‌های معادلهٔ فوق برابر با تعداد نقاط تلاقی خط $y=\frac{k+۱}{۲}$ با نمودار تابع $y=f(۲x)$ است.

با توجه به نمودار، خط $y=۰$ (محور x) نمودار تابع را در ۳ نقطه قطع می‌کند. بقیهٔ خطوط $y=m$ (خط موازی محور x) نمودار f را حداکثر در ۲ نقطه قطع می‌کنند.

$$\Rightarrow f(۲x)=\frac{k+۱}{۲}=۰ \Rightarrow k=-۱$$

دقت کنید که نمودار $y=f(۲x)$ از انقباض افقی نمودار f به دست می‌آید. این یعنی تعداد جواب‌های معادله $f(۲x)=m$ و $f(x)=m$ یکسان است.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

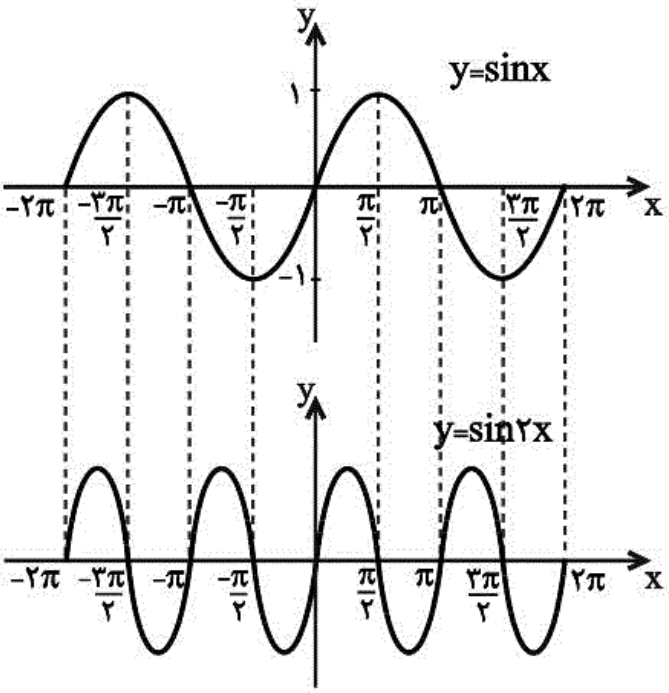
۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

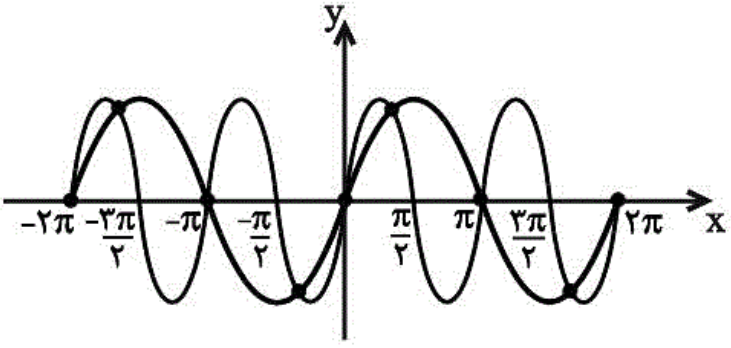
۱۱۰- **گزینهٔ «۲»**

با تقسیم طول نقاط برخورد نمودار تابع $y=\sin x$ با محور xها بر a، طول نقاط برخورد نمودار تابع $y=\sin ax$ با محور xها به دست می‌آید، پس $a=۲$ است.

نمودار دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. برای رسم نمودار تابع $f(x)=\sin ۲x$، کافی است طول نقاط تابع $y=\sin x$ را بر دو تقسیم کنیم.



دو نمودار را در یک دستگاه رسم می‌کنیم. همانطور که مشاهده می‌شود، دو نمودار در ۹ نقطه مشترک‌اند.



توجه کنید که $a=-۲$ نیز قابل قبول است.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۱- **گزینهٔ «۳»** *(منوچهر خاصی)*

در ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی برقرار نیست. یعنی در حالت کلی

AB با BA برابر نیست.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۱۲- **گزینهٔ «۳»** *(علی ایمانی)*

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix} + ۳X = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow ۳X = \begin{bmatrix} ۸ & ۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ۳X = \begin{bmatrix} ۶ & ۰ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

بنابراین حاصل‌ضرب درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی ماتریس X، برابر صفر است.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۳- **گزینهٔ «۲»** *(سرژ یقیازاریان تبریزی)*

$$\left.\begin{array}{l} c_{۲۱}=۲a_{۲۱}-b_{۲۱}\Rightarrow c_{۲۱}=۲(۳)-a=۶-a \\ c_{۳۲}=۲a_{۳۲}-b_{۳۲}\Rightarrow c_{۳۲}=۲m-(-۱)=۲m+۱ \end{array}\right\}\xrightarrow{c_{۲۱}=۲c_{۳۲}} ۴m+a=۴$$

$$\left.\begin{array}{l} c_{۱۱}=۲a_{۱۱}-b_{۱۱}\Rightarrow c_{۱۱}=۲(a-۱)-(-a)=۳a-۲ \\ c_{۲۲}=۲a_{۲۲}-b_{۲۲}\Rightarrow c_{۲۲}=۲(-۱)-۲=-۴ \end{array}\right\}\xrightarrow{c_{۱۱}=-c_{۲۲}} a=۲$$

$$۴m+a=۴\xrightarrow{a=۲} m=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a-۲m=۱$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۱۴- **گزینهٔ «۲»** *(زویا محمدعلی‌پور قهرمانی‌نژاد)*

$$\begin{bmatrix} \cos^{۲}۱۵^\circ & \sin۱۵^\circ\cos۱۵^\circ \\ -\sin۱۵^\circ\cos۱۵^\circ & \cos^{۲}۱۵^\circ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \sin^{۲}۱۵^\circ & -\sin۱۵^\circ\cos۱۵^\circ \\ \sin۱۵^\circ\cos۱۵^\circ & \sin^{۲}۱۵^\circ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos^{۲}۱۵^\circ+\sin^{۲}۱۵^\circ & ۰ \\ ۰ & \cos^{۲}۱۵^\circ+\sin^{۲}۱۵^\circ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۵- **گزینهٔ «۴»** *(سید محمدرضا حسینی‌فرد)*

ابتدا ماتریس A را می‌سازیم. درایه‌های ماتریس A به‌صورت زیر است:

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A+B=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a & a+b\\ a+b & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+۲ & a+b+۳\\ a+b+۳ & b+۴\end{bmatrix}$$

ماتریس $A+B$ یک ماتریس اسکالر است پس درایه‌های قطر اصلی در آن

با هم برابرند و بقیهٔ درایه‌ها صفر هستند:

$$\begin{cases}a+۲=b+۴\\ a+b+۳=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-b=۲\\ a+b=-۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{۱}{۲}\\ b=-\frac{۵}{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow A+B=\begin{bmatrix}\frac{۳}{۲} & ۰\\ ۰ & \frac{۳}{۲}\end{bmatrix}\Rightarrow \text{جمع درایه‌ها}=۳$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۲ تا ۱۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۶- **گزینهٔ «۱»** (سهام مجیدی‌پور)

$$(A+B)^۲ = A^۲ + AB + BA + B^۲$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & -۶ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۶ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳ & -۴ \\ ۴ & -۳ \end{bmatrix} + AB + BA + \begin{bmatrix} ۱ & -۱۶ \\ ۰ & ۹ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -۸ & -۳۶ \\ ۱۲ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & -۲۰ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix} + AB + BA$$

$$\Rightarrow AB + BA = \begin{bmatrix} -۸ & -۳۶ \\ ۱۲ & ۴ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -۲ & -۲۰ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۶ & -۱۶ \\ ۸ & -۲ \end{bmatrix}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۳ تا ۲۱)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۷- **گزینهٔ «۴»** *(امیر وفائی)*

$$A^۲=\begin{bmatrix}۳ & ۱ & ۲\\ ۲ & -۱ & ۰\\ ۳ & ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۱ & ۲\\ ۲ & -۱ & ۰\\ ۳ & ۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۷ & ۴ & ۸\\ ۴ & ۳ & ۴\\ ۱۴ & ۳ & ۷\end{bmatrix}$$

برای به دست آوردن درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون دوم ماتریس $A^۴$، کافی است سطر دوم ماتریس $A^۲$ را در ستون دوم این ماتریس ضرب کنیم:

$$\text{سطر دوم } A^۲ \times \text{ستون دوم } A^۲ = \begin{bmatrix}۴ & ۳ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴\\ ۳\\ ۳\end{bmatrix}=۱۶+۹+۱۲=۳۷$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۸- **گزینهٔ «۱»** *(افشین خاصه‌خان)*

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۱ & a\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & a\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=I$$

بنابراین داریم:

$$A^{n}=\begin{cases}I: n\ \text{زوج}\\ A: n\ \text{فرد}\end{cases}$$

$$A^{۲n}+A^{۲n-۱}=\begin{bmatrix}۲ & a\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}\Rightarrow a+۲=۱۱\Rightarrow a=۹$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۹- **گزینهٔ «۲»** (مجید محمدی نویسی)

$$AB = B \xrightarrow{A=BA} (BA)B = B \Rightarrow B(\underbrace{AB}_{B}) = B \Rightarrow B^{۲} = B$$

$$BA = A \xrightarrow{B=AB} (AB)A = A \Rightarrow A(\underbrace{BA}_{A}) = A \Rightarrow A^{۲} = A$$

$$(A+B)(A-B) = \underbrace{A^{۲}}_{A} - \underbrace{AB}_{B} + \underbrace{BA}_{A} - \underbrace{B^{۲}}_{B} = ۲A - ۲B = ۲(A-B)$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۳ تا ۲۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۰- **گزینهٔ «۳»** *(سرژ یقیازاریان تبریزی)*

براساس تمرین ۱۰ صفحهٔ ۲۱ کتاب درسی، اتحادهای جبری دربارهٔ دو ماتریس زمانی برقرار می‌باشد که دو ماتریس A و B تعویض‌پذیر باشند یعنی ضرب آن‌ها دارای خاصیت جابه‌جایی باشد. $(AB = BA)$

$$AB = \begin{bmatrix} a & -۲ \\ b & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ -۳ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶-a & ۲a-۱۰ \\ ۳-b & ۲b-۵ \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ -۳ & ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -۲ \\ b & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲b-a & ۰ \\ ۵b-۳a & ۱ \end{bmatrix}$$

$$AB = BA \Rightarrow \begin{cases} ۲a-۱۰=۰ \Rightarrow a=۵ \\ ۲b-۵=۱ \Rightarrow b=۳ \end{cases}$$

$$a+b=۵+۳=۸$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا