۱۸۱-اگر $f^{-1}(x)=\sqrt{x+۷}$ و $g=\{(۲,۱),(-۱,۰),(۱,۳),(۰,۶)\}$، آن‌گاه حاصل $f^{-1}(۲g^{-1}(۳))$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۸۲-اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=x^۲-۶x+۱۰$ باشد، مساحت ناحیهٔ محدود بین نمودار تابع fog و خط $y=۲$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۸۳-در تابع $f(x)=\frac{۲x+۳}{x+a}$، مقدار a را طوری انتخاب کرده‌ایم که f^{-1} بر f منطبق باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲- ۳) ۱/۵- ۴) ۲

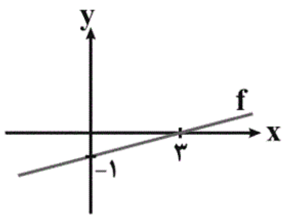
۱۸۴-اگر f و g توابعی وارون‌پذیر، با دامنه و برد $\mathbb{R}$ باشند و داشته باشیم: $f^{-1}(g(۴))=۵$ و $g^{-1}(f^{-1}(۳))=۴$؛ آن‌گاه حاصل $f(f(۵))$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) اطلاعات مسئله کافی نیست.

۱۸۵-اگر تابع صعودی $f(x)$ با دامنه و برد $\mathbb{R}$، از مبدأ مختصات بگذرد و $f(۴)=۰$، آن‌گاه کدام عدد قطعاً در دامنهٔ $y=\sqrt{\sin x.f(۲x)}$ حضور دارد؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۴- ۴) ۱۰

۱۸۶-شکل زیر نمودار تابع f را نشان می‌دهد. عرض از مبدأ تابع $y=۲f^{-1}(x+۱)+۴$ کدام است؟



۱) ۱۶
۲) ۷
۳) ۳
۴) ۴

۱۸۷-نمودار تابع $y=|x-۳|-۲$ را یک واحد به سمت بالا و چهار واحد به سمت چپ انتقال داده، سپس آن را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. نمودار حاصل از چند ناحیهٔ محورهای مختصات عبور می‌کند؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۸۸-اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$ و $g=\{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}$ باشد، تابع $\frac{g}{gof^{-1}}$، کدام است؟

۱) $\{(۴,۲),(۵,۲)\}$ ۲) $\{(۴,۲),(۳,۵)\}$ ۳) $\{(۵,۲),(۲,۴)\}$ ۴) $\{(۳,۵),(۲,۴)\}$

۱۸۹-اگر $f(x)=\frac{۲}{۵}x-۴$ و $g(x)=x^۳+x$ باشد، مقدار $(g^{-۱}of^{-۱})(۸)$، کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

۱۹۰-اگر $f=\{(-۱,۱),(۰,۲),(۱,۴)\}$ و $g=\{(۱,۲),(۲,۳),(-۱,۰)\}$ باشد، حاصل $(f^{-۱}og)(۱)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۸۱- گزینهٔ «۴» (سروش موثینی)

از آن‌جا که $(1,3) \in g$ بنابراین $(3,1) \in g^{-1}$، در نتیجه:

$$f^{-1}(2g^{-1}(3)) = f^{-1}(2)$$

$$f^{-1}(2) = \sqrt{2+7} = 3$$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۵۷ تا ۶۴) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ و ۲۴ تا ۲۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۸۲- گزینهٔ «۴» (بابک سادات)

ابتدا تابع fog را تشکیل می‌دهیم:

$$y = f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 6x + 10 - 1}$$

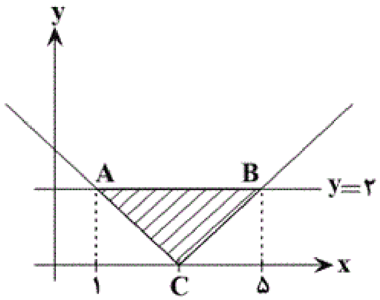
$$\Rightarrow y = \sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$$

حال نمودار $(fog)(x) = |x-3|$ را با خط $y = 2$ قطع می‌دهیم: $|x-3| = 2$

$$\Rightarrow x - 3 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$$

مساحت مثلث ABC:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{4 \times 2}{2} = 4$$



(ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۱۷) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴، ۲۲ و ۲۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۸۳– گزینهٔ «۲»

(سروش موئینی)

مسأله را با نقطه‌گذاری حل می‌کنیم:

با توجه به تعریف تابع وارون می دانیم که اگر $(a,b)\in f$ آن‌گاه $(b,a)\in f^{-1}$

$$f(x)=\frac{۲x+۳}{x+a}\Rightarrow f(\frac{-۳}{۲})=۰\Rightarrow(-\frac{۳}{۲},۰)\in f$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف تابع وارون}}(۰,\frac{-۳}{۲})\in f^{-1}$$

به‌دلیل آن‌که تابع f و f^{-1} بر هم منطبق هستند، پس: $f(۰)=f^{-1}(۰)$

$$f(۰)=f^{-1}(۰)\xrightarrow{f^{-1}(۰)=\frac{-۳}{۲}}f(۰)=\frac{-۳}{۲}\Rightarrow\frac{۳}{a}=\frac{-۳}{۲}\Rightarrow a=-۲$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۱   ۲ ✓   ۳   ۴

۱۸۴– گزینهٔ «۱»

(میلاد منصوری)

دقت کنید که برای تابع وارون‌پذیر h اگر $h(x_۰)=y_۰$ آن‌گاه $h^{-1}(y_۰)=x_۰$. در این مسئله:

$$f^{-1}(\underbrace{g(۴)}_{x_۰})=\underset{\downarrow\atop y_۰}{۵}\Rightarrow f(۵)=g(۴)\ \ (*)$$

$$g^{-1}(\underbrace{f^{-1}(۳)}_{x_۰})=\underset{\downarrow\atop y_۰}{۴}\Rightarrow g(۴)=f^{-1}(۳)\ \ (**)$$

از (*) و (**) داریم:

$$\underbrace{f(۵)}_{\downarrow\ y_۰}=f^{-1}(\underset{\downarrow\atop x_۰}{۳})\Rightarrow f(f(۵))=f(f^{-1}(۳))=۳$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ و ۲۴ تا ۲۹) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۵۷ تا ۶۴)

۱ ✓   ۲   ۳   ۴

به‌ازای $x<۰$ داریم $f(x)\le ۰$ و به‌ازای $x>۴$ داریم $f(x)\ge ۰$؛ هم‌چنین $\pi<۴<\frac{۳\pi}{۲}$ و $۳\pi<۱۰<\frac{۷\pi}{۲}$ پس $\sin ۴$ و $\sin ۱۰$ اعدادی منفی‌اند. تابع صعودی $f(x)$ دارای دامنه و برد $\mathbb{R}$ است و طبق فرض سؤال محور xها را در دو نقطهٔ $x=۰$ و $x=۴$ قطع کرده است. پس $f(۰)=۰$ و $f(۴)=۰$ است، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت حتماً بین $x=۰$ و $x=۴$ تابع ثابت $f(x)=۰$ است، چرا که امکان ندارد بعد از نقطهٔ $x=۰$ صعود کند و دوباره برگردد تا محور xها را در $x=۴$ قطع کند، اما در مورد بعد $x=۴$ و قبل $x=۰$ نمی‌توان نظری داد.

پس تابع $f(۲x)$ بین $x=۰$ و $x=۲$ ثابت است و $f(۲x)$ در بازهٔ $[۰,۲]$ قطعاً صفر می‌شود، پس $x=۱$ قطعاً تابع y را صفر می‌کند و در دامنهٔ $y=\sqrt{\sin x.f(۲x)}$ قرار دارد.

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۶ تا ۱۰ و ۱۸ تا ۲۳)

۱   ۲ ✓   ۳   ۴

۱۸۶- گزینهٔ «۱» (رسول محسنی‌منش)

$$\text{شیب خط} = \frac{۱}{۳} \xrightarrow{(۰,-۱)\in f} f: y+۱=\frac{۱}{۳}(x-۰)$$

$$\xrightarrow{\times ۳} ۳y+۳=x$$

$$\Rightarrow f^{-۱}: y=۳x+۳$$

$$y=۲f^{-۱}(x+۱)+۴=۲(۳(x+۱)+۳)+۴=۶x+۱۶$$

$$\xrightarrow{x=۰} y=۱۶$$

(ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۷) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۵۷ تا ۶۴) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۲۴ تا ۲۷)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۸۷- گزینهٔ «۲» (آرمان جلالی‌فرد)

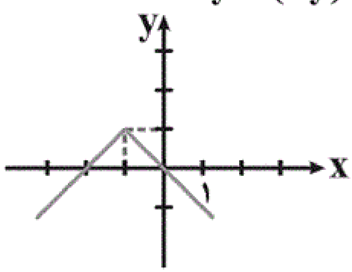
ابتدا با استفاده از انتقال، نمودار جدید را بدست می‌آوریم:

$$y=|x-۳|-۲ \xrightarrow[y\to(y-۱)]{\text{یک واحد به سمت بالا}} y=|x-۳|-۱$$

$$\xrightarrow[x\to(x+۴)]{\text{چهار واحد به سمت چپ}} y=|x+۱|-۱$$

$$\xrightarrow[y\to(-y)]{\text{قرینه نسبت به محور x ها}} y=-|x+۱|+۱$$

برای رسم نمودار $y=-|x+۱|+۱$، نمودار $y=-|x|$ را یک واحد به بالا و یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم:



مشاهده می‌کنیم که نمودار فوق از سه ناحیه عبور می‌کند.

(ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۷) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۸۸– گزینهٔ «۱» (کتاب زرد ۹۸)

ابتدا f^{-1} را به دست می‌آوریم، برای این منظور، جای مؤلفه‌های اول و دوم را در هر زوج مرتب عوض کنیم: $f^{-1}=\{(۲,۱),(۵,۲),(۴,۳),(۶,۴)\}$

حال با توجه به تعریف دامنهٔ ترکیب دو تابع داریم:

$$D_{gof^{-1}}=\{x\in D_{f^{-1}}\mid f^{-1}(x)\in D_g\}$$

حال با توجه به دامنهٔ تابع g یعنی $D_g=\{۲,۴,۵,۳\}$، داریم:

$$D_{gof^{-1}}=\{۴,۵,۶\}\Rightarrow gof^{-1}=\{(۴,۱),(۵,۳),(۶,۲)\}$$

از طرفی برای دامنهٔ حاصل تقسیم دو تابع داریم:

$$D_{\frac{g}{gof^{-1}}}=D_g\cap D_{gof^{-1}}-\{x\mid (gof^{-1})(x)=۰\}\Rightarrow D_{\frac{g}{gof^{-1}}}=\{۴,۵\}$$

با مشاهدهٔ دامنهٔ توابع گزینه‌ها، به‌سادگی به جواب گزینهٔ «۱» می‌رسیم. اما برای محاسبهٔ مؤلفه‌های دوم این تابع نیز داریم:

$$\frac{g}{gof^{-1}}=\left\{\left(۴,\frac{g(۴)}{gof^{-1}(۴)}\right),\left(۵,\frac{g(۵)}{gof^{-1}(۵)}\right)\right\}$$
$$=\left\{\left(۴,\frac{۲}{۱}\right),\left(۵,\frac{۶}{۳}\right)\right\}\Rightarrow\frac{g}{gof^{-1}}=\{(۴,۲),(۵,۲)\}$$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۵۷ تا ۷۰)

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ و ۲۲ تا ۲۷)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۸۹– گزینهٔ «۴» (کتاب زرد ۹۸)

$$f(x)=\frac{۲}{۵}x-۴\qquad g(x)=x^۳+x$$
$$(g^{-1}of^{-1})(۸)=a\Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(۸))=a$$

ابتدا $f^{-1}(۸)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f^{-1}(۸)=m\Rightarrow f(m)=۸\Rightarrow\frac{۲}{۵}m-۴=۸\Rightarrow m=۳۰$$
$$g^{-1}(f^{-1}(۸))=g^{-1}(۳۰)=a\Rightarrow g(a)=۳۰$$
$$\Rightarrow a^۳+a=۳۰\xrightarrow{\text{امتحان گزینه‌ها}}a=۳$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ و ۲۲ تا ۲۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۹۰– گزینهٔ «۱»

(سروش موئینی)

$$(۱,۲)\in g \Rightarrow g(۱)=۲ \Rightarrow f^{-۱}(g(۱))=f^{-۱}(۲)$$

$$\xrightarrow[(۲,۰)\in f^{-۱}]{(۰,۲)\in f} f^{-۱}(۲)=۰$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴، ۲۲ تا ۲۵ و ۲۹)

$\boxed{۱}$✓ $\boxed{۲}$ $\boxed{۳}$ $\boxed{۴}$