



RIAZISARA

www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

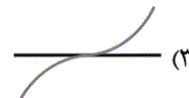
ریاضی ۳ - دوازدهم، کاربرد مشتق - ۹ سوال -

۹۱- تعداد اکسترم‌های نسبی تابع $f(x) = \frac{x}{\sqrt{|x|}}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) یک

(۳) دو (۴) سه

۹۲- وضعیت نمودار $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ در اطراف مبدأ مختصات به کدام شکل است؟



۹۳- اگر نقطه $(2, 1)$ ، نقطه اکسترم نسبی تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ باشد، آن‌گاه مقدار $2b - a$ کدام است؟

(۱) ۱۳ (۲) ۸

(۳) ۷ (۴) ۱۱

۹۴- تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 - x & x < 0 \\ 2\sqrt{1-x} & x \geq 0 \end{cases}$ چند نقطه بحرانی دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲

(۳) ۳ (۴) ۴

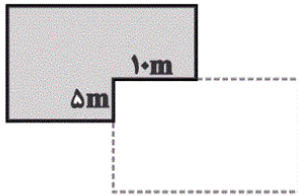
۹۵- مجموع مقادیر ماکزیمم مطلق و مینییمم مطلق تابع $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3$ در بازه $[-2, 1]$ کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۱۴

(۳) ۱۶ (۴) -۲۴

۹۶- بخش رنگی مساحت مدرسه‌ای را نشان می‌دهد. مدیر مدرسه می‌خواهد با کشیدن دیواری به طول ۱۲۵ متر (مانند نقطه‌چین

داخل شکل) قسمتی مستطیل شکل به مدرسه اضافه کند. حداکثر مساحت اضافه شده به مدرسه چقدر است؟



(۱) ۱۲۳۵

(۲) ۱۲۱۵

(۳) ۱۳۲۵

(۴) ۱۲۲۵

۹۷- بیشترین مساحت مستطیلی که دو رأس آن روی محور x ها و دو رأس دیگرش با عرض مثبت روی سهمی $y = 8 - 2x^2$ باشد،

کدام است؟

(۲) $\frac{32\sqrt{3}}{9}$

(۱) $\frac{64\sqrt{3}}{9}$

(۴) $\frac{32\sqrt{2}}{9}$

(۳) $\frac{64\sqrt{2}}{9}$

۹۹- مجموع مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ ، در بازه $[-1, 3]$ کدام است؟

(۲) ۲۵

(۱) ۳۴

(۴) ۴۱

(۳) ۱۸

۱۰۰- نمودار تابع $y = \frac{x-1}{x^2+1}$ در بازه (a, b) صعودی است. بیش‌ترین مقدار $b - a$ کدام است؟

(۲) ۲

(۱) $2\sqrt{2}$

(۴) $2\sqrt{2} - 2$

(۳) $\sqrt{2} - 1$

ریاضی ۳ - دوازدهم، مشتق - ۱۰ سوال -

۹۸- اگر f و g توابعی مشتق‌پذیر روی \mathbb{R} باشند به‌طوری‌که $f(x^2 - 3x) = g\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$ و $g'(1) = 3$ ، آن‌گاه حاصل $f'(-2)$ کدام است؟

(۲) $\frac{1}{3}$

(۱) -۱

(۴) صفر

(۳) $\frac{3}{4}$

۸۱- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 7x + a & , x \geq -3 \\ \sqrt{2x+b} & , x < -3 \end{cases}$ در $x = -3$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

(۲) ۲۰

(۱) ۱۶

(۴) ۲۸

(۳) ۲۴

۸۲- اگر $f(x)$ یک تابع درجه سوم باشد، تعداد نقاط مشتق‌ناپذیری تابع $g(x) = |f(x)|$ کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

- (۱) صفر
(۲) یک
(۳) دو
(۴) سه

۸۳- اگر $f(x) = x^2 |x| [x]$ باشد، مقدار $f'(-\sqrt{2})$ کدام است؟

- (۱) $-2\sqrt{2}$
(۲) $-4\sqrt{2}$
(۳) ۶
(۴) ۱۲

۸۴- مقدار مشتق تابع $f(x) = \sqrt[3]{x} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)$ در $x = 1$ برابر کدام گزینه است؟

- (۱) ۱
(۲) -۱
(۳) $\frac{1}{3}$
(۴) $-\frac{1}{3}$

۸۵- اگر $f(x)$ یک تابع درجه دوم باشد به طوری که مقدار عبارت $\left(\frac{f}{f'}\right)'$ یک عدد ثابت شود، تعداد محل برخورد $f(x)$ با محور x ها

کدام است؟

- (۱) یک یا دو
(۲) صفر یا یک
(۳) یک
(۴) دو

۸۶- اگر برای تابع f داشته باشیم $\Delta f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x + 2$ ، آن‌گاه مقدار $f''(1)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{8}$
(۲) $-\frac{5}{8}$
(۳) $\frac{3}{8}$
(۴) $\frac{5}{8}$

۸۷- خط مماس بر منحنی تابع $xy = k$ (عدد ثابت است) در نقطه‌ای به طول $x = a$ ، محور x ها را در چه طولی قطع می‌کند؟

($a \neq 0$)

- (۱) ka
(۲) $\frac{3}{2}a$
(۳) $2a$
(۴) $\frac{5}{2}ka$

۸۸- اگر $f(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ و خط $y = 3x + 5$ ، بر نمودار تابع g در نقطه $x = 2$ مماس باشد، آنگاه $f'(2)$ کدام است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۲ (۳)

۲ (۴)

۸۹- در لحظه $t = 0$ سوراخی در ظرفی پر از مایع ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه

$v(t) = 60 \left(1 - \frac{t}{50}\right)^2$ به دست آید ($0 \leq t \leq 50$)، آهنگ متوسط تغییر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف از ابتدا تا تخلیه کامل چه قدر است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

ریاضی ۳ - دوازدهم ، ترکیبی - سوال ۱ -

۹۰- اگر بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x) = x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$ در آن نزولی است، بازه $[a, b]$ باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x > 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$$

با توجه به نمودار تابع، هیچ اکسترمم نسبی وجود ندارد.

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

۹۲- گزینه «۳»

(علی اصغر شریفی)

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(3x^2)(x^2 + 1) - (2x)(x^3)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$f'(x)$ همواره مثبت است و $f(x)$ همواره باید صعودی باشد.

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۰۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

۹۳- گزینه «۱»

(علی مرشد)

مختصات نقطه $(2, 1)$ در تابع صدق می‌کند. پس:

$$f(2) = 1 \Rightarrow 8 + 4a + b = 1 \Rightarrow 4a + b = -7 \quad (I)$$

نقطه $(2, 1)$ اکسترمم نسبی تابع f است. بنابراین داریم:

$$f'(2) = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax \Rightarrow f'(2) = 12 + 4a = 0 \Rightarrow a = -3 \xrightarrow{(I)}$$

$$b = 5$$

$$\text{در نتیجه: } 2b - a = 2(5) - (-3) = 13$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۹ و ۱۱۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

۹۴- گزینه «۳»

(مهمرمصطفی ابراهیمی)

دامنه تابع $(-\infty, 1]$ است. پس $x=1$ بحرانی است. به علاوه تابع در $x=0$ پیوسته نیست. پس $x=0$ هم بحرانی است.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{1-x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 - x) = 0$$

در $x=0$ ناپیوسته، مشتق ناپذیر و بحرانی است.

حالا از تابع مشتق می گیریم:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x-1 & x < 0 \\ \frac{-2}{2\sqrt{1-x}} & x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow -2x-1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

در $x = -\frac{1}{2}$ هم مشتق صفر می شود و نقطه بحرانی محسوب می شود. پس

نقاط بحرانی تابع $x=0$ ، $x=1$ و $x = -\frac{1}{2}$ هستند.

(ریاضی ۳، صفحه های ۱۰۶ تا ۱۰۹ و ۱۱۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

۹۵- گزینه «۲»

(رهمان پوررهمیم)

$$f'(x) = -3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow -3x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

با توجه به بازه داده شده $x=0$ قابل قبول است.

$$\begin{cases} f(-2) = 17 \Rightarrow \text{ماکزیمم مطلق} \\ f(0) = -3 \Rightarrow \text{مینیمم مطلق} \\ f(1) = -1 \end{cases}$$

$$\text{max مطلق} + \text{min مطلق} = 17 + (-3) = 14$$

(ریاضی ۳، صفحه های ۱۰۹ تا ۱۱۲)

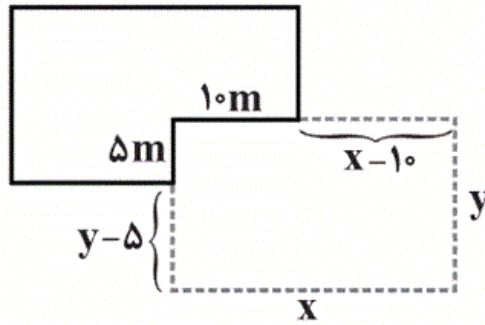
۴

۳

۲ ✓

۱

طول دیوار کشیده شده با توجه به شکل برابر است با:



$$y + (y - 5) + x + (x - 10) = 125$$

$$\Rightarrow 2y + 2x = 140 \Rightarrow y + x = 70$$

$$y = 70 - x \Rightarrow S = xy = x(70 - x)$$

$$\Rightarrow S(x) = 70x - x^2 \xrightarrow{\text{از } S \text{ مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم}} S'(x) = 70 - 2x = 0$$

$$\Rightarrow x = 35$$

$$\Rightarrow S(35) = 35(70 - 35) = 35^2 = 1225$$

x	35		
S'	+	↓	-
	↗ max ↘		

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۲۰)

۴

۳

۲

۱

$$\Rightarrow S'_{\text{مستطیل}} = -12x^2 + 16 = 0$$

$$x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad y = 8 - 2\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3}$$

$$S_{\text{max}} = 2xy = 2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{16}{3}\right) \Rightarrow S_{\text{max}} = \frac{64\sqrt{3}}{9}$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۲۰)

۴

۳

۲

۱

ابتدا نقاط بحرانی تابع $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ را در بازه $[-1, 3]$ به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2, x = -2$$

چون $x = -2$ در بازه قرار ندارد به بررسی آن نمی‌پردازیم.

حال مقدار تابع را به ازای نقاط بحرانی و نقاط ابتدا و انتهای بازه $[-1, 3]$ به دست

$$f(0) = 16, \quad f(2) = 0$$

$$f(-1) = 9, \quad f(3) = 25$$

$$\text{ماکزیمم} + \text{مینیمم} = 25 + 0 = 25$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۱۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

برای بررسی رفتار تابع، مشتق آن را تعیین علامت می‌کنیم:

$$y' = \frac{(x^2 + 1) - 2x(x - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-(x - 1)^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \sqrt{2} \\ x_2 = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
y'	-	○	+	○
y	نزولی		صعودی	نزولی

$$\text{بازه مورد نظر} : (1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}) \Rightarrow \text{Max}(b - a) = 2\sqrt{2}$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۱۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

از طرفین رابطه، مشتق می‌گیریم:

$$f(x^2 - 3x) = g\left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right)$$

$$\Rightarrow (2x - 3) \times f'(x^2 - 3x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x(2x)}{(x^2 + 1)^2} \times g'\left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right)$$

$$\xrightarrow{x=1} (-1) \times f'(-2) = \frac{2 \times 2 - 4}{4} \times g'(1) \Rightarrow f'(-2) = 0$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۷ تا ۹۲)

۴

۳

۲

۱

(مهری پیت‌ساز)

نکته: برای آن که تابع f در $x = -3$ مشتق‌پذیر باشد، باید در این نقطه پیوسته بوده و مشتق چپ و راست در $x = -3$ برابر باشد. بنابراین:

$$۱) f(-3) = \lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x)$$

$$\Rightarrow \sqrt{-6 + b} = 9 - 21 + a$$

$$۲) f'_+(-3) = f'_-(-3) \Rightarrow 2(-3) + 7 = \frac{1}{\sqrt{-6 + b}}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{\sqrt{b - 6}} \Rightarrow \sqrt{b - 6} = 1$$

$$\rightarrow b - 6 = 1 \Rightarrow b = 7$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در (۱)}} -12 + a = \sqrt{-6 + 7} \Rightarrow a - 12 = 1 \Rightarrow a = 13$$

$$\Rightarrow a + b = 13 + 7 = 20$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۹۲)

۴

۳

۲

۱

۸۲- گزینه «۳»

(مهمربوار مسنی)

برای هر گزینه مثال می‌زنیم:

$$۱) f(x) = x^3 \Rightarrow g(x) = |x^3| \Rightarrow \text{صفر نقطه مشتق ناپذیری}$$

$$۲) f(x) = x(x-1)^2 \Rightarrow g(x) = |x(x-1)^2| \Rightarrow \text{یک نقطه مشتق ناپذیری}$$

$$۴) f(x) = x(x-1)(x+1)$$

$$\Rightarrow g(x) = |x(x-1)(x+1)| \Rightarrow \text{سه نقطه مشتق ناپذیری}$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

۸۳- گزینه «۴»

(سروش مؤین)

در یک همسایگی عدد $-\sqrt{2}$ و وقتی x به این عدد میل می‌کند، به جای $|x|$ می‌گذاریم $-x$ و به جای $[x]$ می‌نویسیم -2 پس داریم:

$$f(x) = x^2(-x)(-2) = 2x^3$$

$$\text{پس: } f'(x) = 6x^2 \text{ و در نتیجه: } f'(-\sqrt{2}) = 6(2) = 12$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۲ تا ۸۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

۸۴- گزینه «۱»

(مهمرمصطفی ابراهیمی)

تابع f را به صورت $\frac{\sqrt[3]{x}(x+1)}{x^2+1} \times (x-1)$ می‌نویسیم. کافی است از عامل

صفرکننده یعنی $x-1$ مشتق بگیریم که مشتق آن یک است، پس:

$$f'(1) = \frac{\sqrt[3]{1}(1+1)}{1^2+1} \times 1 = 1$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۲ تا ۹۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$$

$\left(\frac{f}{f'}\right)'$ یک عدد ثابت است اگر $\frac{f}{f'}$ یک عبارت درجه اول باشد (البته اگر

$\frac{f}{f'}$ خودش عدد ثابت باشد، مشتق آن صفر می‌شود ولی در این مورد

$$\frac{f}{f'} = \frac{ax^2 + bx + c}{2ax + b} \quad (\text{ممکن نیست.})$$

این عبارت در صورتی درجه اول است که صورت بر مخرج بخش پذیر باشد،

یعنی ریشه مخرج $(x = \frac{-b}{2a})$ در صورت صدق کند. $x = \frac{-b}{2a}$ طول رأس

سهمی f است و اگر در آن صدق کند یعنی $f(x) = 0$ یک ریشه دارد.

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

از طرفین رابطه داده شده مشتق می‌گیریم:

$$\Delta f'(x) - \frac{3}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \quad (\text{I})$$

از طرفین (I) مجدداً مشتق می‌گیریم:

$$\Delta f''(x) + \frac{6}{x^3} f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{3}{x^4} f''\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad (\text{II})$$

$$\text{I) } \xrightarrow{x=1} \Delta f'(1) - 3f'(1) = 1 \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$\text{II) } \xrightarrow{x=1} \Delta f''(1) + 6f'(1) + 3f''(1) = 0 \Rightarrow 8f''(1) + 3 = 0$$

$$\Rightarrow f''(1) = -\frac{3}{8}$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۲ تا ۹۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

۸۷- گزینه «۳»

(معمدامین روانبش)

معادله خط مماس بر منحنی $y = \frac{k}{x}$ را در نقطه $A(a, \frac{k}{a})$ پیدا می‌کنیم.

$$y = \frac{k}{x} \Rightarrow y' = \frac{-k}{x^2} \Rightarrow \text{شیب خط مماس} = \frac{-k}{a^2}$$

معادله خط مماس:

$$y - \frac{k}{a} = \frac{-k}{a^2}(x - a) \xrightarrow{y=0} \frac{k}{a} = \frac{k}{a^2}(x - a) \Rightarrow a = x - a \Rightarrow x = 2a$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۷)

۴

۳

۲

۱

۸۸- گزینه «۴»

(فرشار صدیقی فر)

$$\begin{cases} g(2) = 11 \\ g'(2) = 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 g'(x) - 2xg(x)}{x^4} \xrightarrow{x=2}$$

$$f'(2) = \frac{4g'(2) - 4g(2)}{16} = \frac{12 - 44}{16} = -2$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۷)

۴

۳

۲

۱

۸۹- گزینه «۳»

(مهری پیت‌ساز)

ابتدا زمان تخلیه کامل ظرف را محاسبه می‌کنیم:

$$v(t) = 0 \Rightarrow 60 \left(1 - \frac{t}{50}\right)^2 = 0 \Rightarrow 1 - \frac{t}{50} = 0 \Rightarrow t = 50$$

حال آهنگ متوسط تخلیه مایع را در بازه $[0, 50]$ پیدا می‌کنیم:

$$\frac{v(50) - v(0)}{50 - 0} = \frac{0 - 60}{50} = \frac{-6}{5} = -1.2$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۹۳ تا ۱۰۰)

۴

۳

۲

۱

(علی اصغر شریفی)

$$f(x) = x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(\Delta x - 2) \Rightarrow f'(x) = \frac{\Delta x - 2}{3\sqrt[3]{x}}$$

	• $\frac{2}{5}$		
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	↗	↘	↗

$$\Rightarrow x \in \left[0, \frac{2}{5}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow a + b = \frac{2}{5}$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۰۴ و ۱۱۲)

۴ ✓

۳

۲

۱