سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درســـنامه ها و جـــزوه های ریاضـــی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)
https://t.me/riazisara

ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)
https://www.instagram.com/riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

ریاضیات گسسته دوازدهم ، ترکیبیات (شمارش) - ۶ سوال -

۱۱۵- می‌خواهیم با سه حرف a، b و c و ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵، یک رمز شامل ۵ کاراکتر تشکیل دهیم. تعداد رمزهایی که شامل دو حرف و سه رقم بوده و ارقام همواره کنار یکدیگر قرار می‌گیرند، کدام است؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۷۲۰

۳) ۱۰۸۰ ۴) ۱۴۴۰

۱۱۶- در یک هتل، اتاق‌های ۱۰۱ تا ۱۰۴، دو نفره و اتاق‌های ۱۰۵ و ۱۰۶، سه نفره هستند. تعداد راه‌های اقامت هشت نفر در اتاق‌های ۱۰۱ تا ۱۰۴، چقدر بیشتر از تعداد راه‌های اقامت آنها در اتاق‌های ۱۰۴ تا ۱۰۶ است؟

۱) ۱۷۵ ۲) ۵۴۰

۳) ۱۲۸۰ ۴) ۱۹۶۰

۱۱۷- تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=12$ با شرط $x_1>2$ و $x_2>3$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۵

۳) ۵۶ ۴) ۱۲۰

۱۱۸- به چند طریق می‌توان ۱۲ سیب یکسان را بین ۴ نفر تقسیم کرد به گونه‌ای که هر نفر حداقل یک سیب دریافت کرده و تعداد سیب‌های نفر چهارم، ۲ واحد بیشتر از نفر سوم باشد؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸

۳) ۲۰ ۴) ۲۵

۱۱۹- کدام‌یک از مربع‌های لاتین زیر از یک جایگشت روی مربع لاتین $\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۱&۲&۳\\\hline ۳&۱&۲\\\hline ۲&۳&۱\\\hline\end{array}$ حاصل شده است؟

۱) $\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۲&۱&۳\\\hline ۱&۳&۲\\\hline ۳&۲&۱\\\hline\end{array}$

۲) $\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۲&۳&۱\\\hline ۱&۲&۳\\\hline ۳&۱&۲\\\hline\end{array}$

۳) $\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۳&۱&۲\\\hline ۱&۲&۳\\\hline ۲&۳&۱\\\hline\end{array}$

۴) $\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۳&۲&۱\\\hline ۲&۱&۳\\\hline ۱&۳&۲\\\hline\end{array}$

۱۲۰- اگر دو مربع لاتین A و B متعامد باشند، حاصل $x+y$ کدام است؟

$A=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline ۳&۴&۱&۲\\\hline ۴&۳&۲&۱\\\hline ۱&۲&۳&۴\\\hline ۲&۱&۴&۳\\\hline\end{array}$ $B=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline ۳&۴&۱&۲\\\hline ۱&&&\\\hline &x&&۳\\\hline &&y&\\\hline\end{array}$

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

ریاضیات گسسته دوازدهم ، گراف و مدل سازي - ۴ سوال

۱۱۱- عدد احاطه‌گری کدام‌یک از گراف‌های زیر با بقیه متفاوت است؟

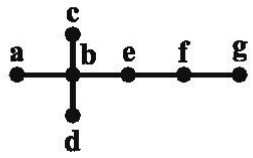
۱) $P_۵$

۲) $P_۶$

۳) $C_۶$

۴) $P_۷$

۱۱۲- گراف شکل مقابل چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال دارد؟



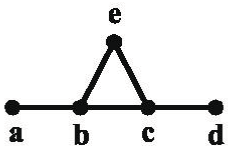
۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

۱۱۳- با افزودن یال ad به گراف G در شکل مقابل، تعداد $\gamma-$ مجموعه‌های آن چند واحد افزایش می‌یابد؟



۱) ۱

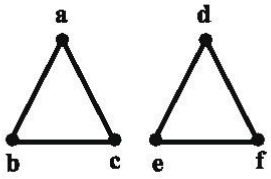
۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

www.kanoon.ir

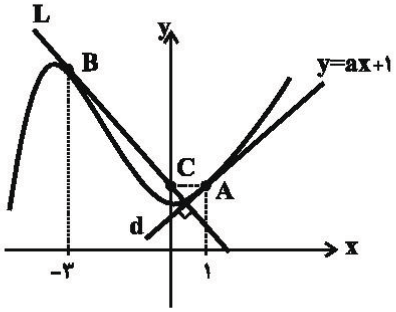
۱۱۴- گراف G مطابق شکل زیر مفروض است. مکمل این گراف، چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم دارد؟



۱) ۱۲
۲) ۹
۳) ۶
۴) ۳

حسابان دوازدهم ، مثلثات - ۱ سوال -

۸۳- نمودار تابع f و خطوط مماس بر آن در $x=-۳$ و $x=۱$ رسم شده است. حاصل $f'(-۳)\times f(-۳)$ کدام است؟ $(f'(۱)=۳)$



۱) $-\frac{۲}{۳}$
۲) $-\frac{۵}{۳}$
۳) -۱
۴) $-\frac{۳}{۵}$

حسابان دوازدهم ، مشتق - ۱۹ سوال -

۸۴- مجموع مشتق‌های چپ و راست تابع $f(x)=\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^۲}}$ در $x=۰$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) صفر
۴) $-\sqrt{۲}$

۸۵- اگر $f(x)=[x]|x^۲-۱|+|\sin x|$ باشد، حاصل $f'_+(\pi)$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) $۶\pi+۱$
۲) $۶\pi-۱$
۳) $۱-۶\pi$
۴) $۱+۴\pi$

۸۶- دو تابع $f(x)=۵x-a|x-۱|$ و $g(x)=۲x+|x^۲-۱|$ مفروضند. تابع fog به ازاء کدام مقدار a در نقطه‌ای به طول ۱ مشتق‌پذیر است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$
۲) $-\frac{۳}{۵}$
۳) ۵
۴) هیچ مقدار a

www.kanoon.ir

۸۷- تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x+1} & ;x<0\\ |x-1| & ;0\le x\le 2\\ x^2-6 & ;x>2\end{cases}$ چند نقطهٔ مشتق‌ناپذیر دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۸۸- اگر $f(x)=\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1}$ باشد، مشتق تابع $g(x)=(x^3-1)f'(x)+3x^2f(x)$ در $x=1$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۸

۸۹- اگر $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ و $g(x)=\sqrt{x^2+1}+x$ باشد، حاصل $\frac{f}{g}+\frac{f'}{g'}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $2x$ ۳) $-2x$ ۴) صفر

۹۰- فاصلهٔ دو نقطه روی نمودار تابع $f(x)=\frac{4x-2}{2x+5}$ که مماس در آن‌ها با خط $2y-12x=7$ موازی باشد، کدام است؟

۱) $2\sqrt{37}$ ۲) $2\sqrt{35}$ ۳) $2\sqrt{33}$ ۴) $2\sqrt{31}$

۹۱- نمودار تابع $f(x)=2x^3+Kx+\frac{1}{2}$ بر محور xها مماس است. مقدار K کدام است؟

۱) ۰/۷۵ ۲) ۱/۵ ۳) -۰/۷۵ ۴) -۱/۵

۹۲- مقدار مشتق تابع $f(x)=\frac{x^2-x-2}{\sqrt[3]{4x}+\sqrt{2x}}$ در $x=2$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{16}$ ۳) $-\frac{3}{4}$ ۴) $-\frac{3}{16}$

۹۳- مشتق تابع $f(x)=\cos x(3-4\cos^2 x)\sin^2 x$ به ازای $x=\frac{\pi}{6}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۳) $-\frac{3}{4}$ ۴) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

www.kanoon.ir

۹۴- اگر تابع f در دامنه‌اش مشتق‌پذیر باشد و $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}=3$ باشد، مشتق $f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ در $x=\frac{1}{4}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲

۳) -۶ ۴) -۱۲

۹۵- اگر تابع f در دامنه‌اش مشتق‌پذیر و $f\left(x+\sqrt{x^2+3x}\right)=\frac{1}{x}$ باشد، $f'(3)$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $-\frac{4}{9}$ ۴) $-\frac{9}{4}$

۹۶- اگر $f(0)=0$ و $f(x)=\sin(3x-f(x))$ باشد، مقدار $f'(0)$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

۹۷- اگر $f(x)=\frac{2}{3}\cos^3 x+k\cos 3x$ و $f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}$ باشد، مقدار k کدام است؟

۱) $-\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{5}{9}$ ۳) $-\frac{2}{9}$ ۴) $\frac{4}{9}$

۹۸- اگر در تابع $f(x)=\begin{cases}\sin ax+bx^n & ;\ x\geq 0\\ 3x^2+\tan x & ;\ x<0\end{cases}$ مقدار $f''(0)$ موجود باشد، b کدام است؟ $(n\geq 2)$

۱) ۲ ۲) ۳

۳) صفر ۴) هر مقدار می‌تواند باشد.

۹۹- استوانه‌ای با ارتفاع ۱۰ و شعاع r مفروض است. آهنگ لحظه‌ای تغییر مساحت کل استوانه وقتی شعاع قاعدهٔ آن ۴ باشد، چند برابر π است؟

۱) ۱۸ ۲) ۳۶ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

www.kanoon.ir

۸۰- گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر است. در لحظهٔ $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطهٔ $V(t)=40\left(1-\frac{t}{100}\right)^2$ به‌دست آید، در چه زمانی بر حسب ثانیه آهنگ لحظه‌ای تغییر حجم مایع باقی‌مانده برابر آهنگ متوسط تغییر آن در بازهٔ $[0,100]$ است؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۰ ۳) ۵۰ ۴) ۶۰

۸۱- اگر تابع $y=ax^2+bx+c$ در رابطهٔ $y+y'+y''=x^2+x+1$ صدق کند، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) ۲

۸۲- اگر $\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(-x+h)}{x}=2h^2$ باشد، حاصل $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x^2-9}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{3}$

هندسه ۳- دوازدهم ، آشنایي با مقاطع مخروطي - ۱۰ سوال -

۱۰۱- نقاط A و A' دو سر قطر بزرگ و F و F' کانون‌های یک بیضی به طول قطر کوچک ۱۲ هستند. مساحت ناحیهٔ بین دو دایره یکی به قطر AA' و دیگری به قطر FF' کدام است؟

۱) 9π ۲) 36π ۳) 81π ۴) 144π

۱۰۲- در یک بیضی با خروج از مرکز $\frac{\sqrt{2}}{2}$، فاصلهٔ یک کانون از دورترین نقطهٔ بیضی چند برابر فاصلهٔ همان کانون از نزدیک‌ترین نقطهٔ بیضی است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) $(\sqrt{2}+1)^2$ ۴) $(2+\sqrt{2})^2$

۱۰۳- اگر $F(2,-1)$ یک کانون و $B(-2,2)$ یکی از دو سر قطر کوچک یک بیضی باشند که قطر بزرگ آن موازی با محور x هاست، آنگاه خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

۱) $\frac{4}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$

۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

www.kanoon.ir

۱۰۴- شکل کدام‌یک از بیضی‌های زیر به یک پاره‌خط نزدیک تر است؟

۱) بیضی با نسبت $\frac{b}{a}=\frac{۱}{۲}$

۲) بیضی با نسبت $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳) بیضی با نسبت $\frac{b}{c}=\sqrt{۳}$

۴) بیضی با نسبت $\frac{b}{c}=\sqrt{۲}$

۱۰۵- اگر نقاط $F(۵,-۱)$ و $F'(-۷,-۱)$ دو کانون یک بیضی با خروج از مرکز $\frac{۳}{۵}$ باشند، آنگاه کدام‌یک از خطوط زیر بر بیضی مماس است؟

۱) $x=۷$

۲) $x=-۱۰$

۳) $y=۷$

۴) $y=-۱۰$

۱۰۶- یک سهمی محور yها را در دو نقطه به عرض‌های ۲ و ۶- قطع می‌کند و رأس آن روی نیمساز ناحیه‌های دوم و چهارم است. فاصلهٔ کانونی این سهمی کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۱۰۷- در کدام‌یک از سهمی‌های زیر، محور تقارن و خط هادی هر دو بر محورهای مختصات منطبق‌اند؟

۱) $y^۲=۴x$

۲) $y^۲=-۴x$

۳) $y^۲=۴(x-۱)$

۴) $y^۲=-۴(x-۱)$

۱۰۸- سهمی به کانون $F(-۳,۲)$ و خط هادی $x=۵$، محور عرض‌ها را در نقاط P و Q قطع می‌کند. مجموع فواصل کانون سهمی از نقاط P و Q کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۱۰}$

۲) ۸

۳) $۶\sqrt{۲}$

۴) ۱۰

۱۰۹- معادلهٔ دایره‌ای که در رأس سهمی $y^۲+۴y-۴x=۰$ بر سهمی و همچنین بر خط هادی آن مماس باشد، کدام است؟

۱) $x^۲+y^۲-۳x+۴y+۴=۰$

۲) $x^۲+y^۲+۳x+۴y+۴=۰$

۳) $x^۲+y^۲-۳x+۴y+۶=۰$

۴) $x^۲+y^۲+۳x+۴y+۶=۰$

www.kanoon.ir

۱۱۰- خط $y = mx + n$ در رأس سهمی به معادلهٔ $3x^2 - 6x + by + 11 = 0$ بر این سهمی مماس است. اگر فاصلهٔ کانونی سهمی برابر $\frac{1}{3}$ باشد و دهانهٔ سهمی رو به پایین باز شود، حاصل $m + n$ کدام است؟

۱) -2

۲) -1

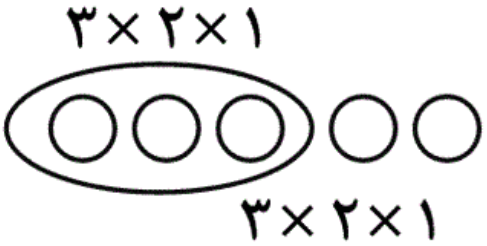
۳) ۱

۴) ۲

www.kanoon.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۱۱۵- **گزینهٔ «۳»** *(عادل حسینی)*



تعداد روش‌های انتخاب دو حرف و سه رقم از میان حروف و ارقام داده شده به‌ترتیب برابر $\binom{۳}{۲}$ و $\binom{۵}{۳}$ است. از طرفی مطابق شکل، برای محاسبهٔ تعداد حالت‌هایی که ارقام کنار یکدیگر باشند، کافی است سه رقم انتخابی را به‌صورت یک بسته در نظر گرفته و جایگشت‌های این بسته همراه با دو حرف دیگر و همچنین جایگشت‌های سه رقم را به‌دست آوریم. تعداد رمزهای ساخته شده با شرایط مورد نظر برابر است با:

$$\binom{۳}{۲}\times\binom{۵}{۳}\times ۳!\times ۳!=۳\times ۱۰\times ۶\times ۶=۱۰۸۰$$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: مشابه مثال صفحهٔ ۵۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.kanoon.ir

۱۱۶- **گزینهٔ «۴»** *(مسعود درویشی)*

اگر تعداد راه‌های اقامت این افـراد در اتـاق‌هـای ۱۰۱ تـا ۱۰۴ را بـا n_1 و تعداد راه‌های اقامت این افراد در اتاق‌های ۱۰۴ تـا ۱۰۶ را بـا n_2 نمـایش دهیم، آنگاه طبق رابطهٔ جایگشت با تکرار داریم:

$$n_1 = \frac{8!}{2!2!2!2!} = \frac{8\times 7!}{8\times 2!} = \frac{7!}{2!} = 2520$$

$$n_2 = \frac{8!}{3!3!2!} = \frac{8\times 7\times 6\times 5\times (4\times 3)\times 2}{6\times (6\times 2)}$$

$$= 8\times 7\times 5\times 2 = 560$$

$$n_1 - n_2 = 2520 - 560 = 1960$$

تذکر: دقت کنید که اتاق‌ها از یکدیگر متمایزند.

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۵۸ و ۵۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.kanoon.ir

۱۱۷- **گزینهٔ «۱»** (علیرضا شریف خطیبی)

$$x_1 > ۲ \Rightarrow x_1 \geq ۳ \Rightarrow x_1 = y_1 + ۳$$

$$x_2 > ۳ \Rightarrow x_2 \geq ۴ \Rightarrow x_2 = y_2 + ۴$$

با توجه به طبیعی بودن جواب‌های معادله، دو شرط $x_3 = y_3 + ۱$ و $x_4 = y_4 + ۱$ برقرار بوده و در نتیجه داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = ۱۲ \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = ۳$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی} = \binom{۳+۴-۱}{۴-۱} = \binom{۶}{۳} = ۲۰$$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۱۱۸- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

اگر تعداد سیب‌های این ۴ نفر را به ترتیب با مقـادیر x_1، x_2، x_3 و x_4 نمایش دهیم، داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$$

$$\xrightarrow{x_4 = x_3 + 2} x_1 + x_2 + 2x_3 = 10$$

با توجه به اینکه x_3 دارای ضریبی غیر از یک است، تعداد جواب‌های مسئله را با توجه به مقادیر x_3 به‌دست می‌آوریم. با توجه بـه شـرط طبیعـی بـودن جواب‌ها $1 \le x_3 \le 4$ است و داریم:

$$x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 = 8$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی} = \binom{8-1}{2-1} = 7$$

$$x_3 = 2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 6$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی} = \binom{6-1}{2-1} = 5$$

$$x_3 = 3 \Rightarrow x_1 + x_2 = 4$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی} = \binom{4-1}{2-1} = 3$$

$$x_3 = 4 \Rightarrow x_1 + x_2 = 2$$

✓۱ ۲ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۱۱۹- **گزینهٔ «۲»** (عزیزاله علی اصغری)

در بین مربع‌های لاتین داده شده، تنها مربع لاتین گزینهٔ «۲» از اعمال جایگشت (۲ ← ۱، ۳ ← ۲، ۱ ← ۳) روی مربع لاتین صورت سؤال حاصل شده است.

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحهٔ ۶۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۱۲۰- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

با توجه به وجود ۳ در سطر سوم و ۴ در ستون دوم، x نمی‌تواند ۳ یا ۴ باشد. از طرفی اگر $x = ۲$ باشد، آنگاه درایه‌های واقع در سطر اول ستون چهارم و سطر سوم ستون دوم در مربع لاتین A برابر ۲ و در مربع لاتین B نیز برابر ۲ است که خلاف متعامد بودن این دو مربع لاتین است، پس $x = ۱$ است. با توجه به شرط متعامد بودن این دو مربع می‌توان سطر دوم و ستون‌های دوم و چهارم مربع لاتین B را به طور کامل پر کرد و در نتیجه مربع زیر حاصل می‌شود. با توجه به وجود ۱ و ۳ در سطر چهارم، y باید یکی از مقادیر ۲ یا ۴ را داشته باشد ولی اگر $y = ۴$ باشد، آنگاه درایه‌های سطر اول ستون دوم و سطر چهارم ستون سوم در مربع لاتین A برابر ۴ و در مربع لاتین B نیز برابر ۴ است که خلاف متعامد بودن این دو مربع است، پس y لزوماً برابر ۲ و در نتیجه $x + y = ۳$ است.

۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴
	۱		۳
	۳	y	۱

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۶۴ تا ۶۷)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۱۱۱- **گزینهٔ «۴»** *(مسعود رویشی)*

عدد احاطه‌گری گراف‌های P_n و C_n از رابطهٔ $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ به‌دست می‌آید که این مقدار برای سه گراف P_5، P_6 و C_6 برابر ۲ و برای گراف P_7 برابر ۳ است.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۴ تا ۵۰)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۱۲- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا شریف‌خطیبی)*

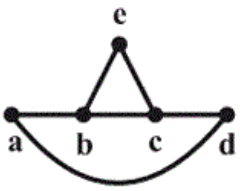
مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال این گراف عبارت‌اند از:

$$\{b,f\},\{b,g\},\{a,c,d,f\},\{a,c,d,e,g\}$$

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۱۳- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*



عدد احاطه‌گری گراف G برابر ۲ و $\gamma-$ مجموعه‌های آن، $\{a,c\}$، $\{b,c\}$ و $\{b,d\}$ هستند. با افزودن یال ad به گراف G، گراف شکل مقابل حاصل می‌شود.

عدد احاطه‌گری این گراف نیز برابر ۲ است و علاوه بر ۳ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم قبلی، دارای ۴ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم دیگر به صورت $\{a,e\}$، $\{d,e\}$، $\{a,b\}$ و $\{c,d\}$ نیز می‌باشد.

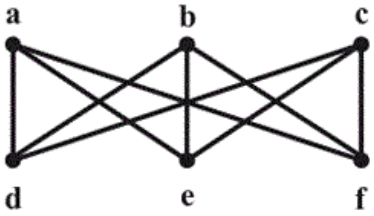
(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.kanoon.ir

۱۱۴- **گزینهٔ «۲»** *(عادل حسینی)*

مکمل گراف G به صورت شکل زیر است:



عدد احاطه گری گراف $\overline{G}$ برابر ۲ است و هر $\gamma-$ مجموعهٔ آن شامل یک رأس از میان رئوس بالایی یعنی مجموعهٔ $\{a,b,c\}$ و یک رأس از میان رئوس پایینی یعنی مجموعهٔ $\{d,e,f\}$ است، بنابراین تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم آن برابر $۳\times ۳=۹$ است.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۸۳- **گزینهٔ «۲»** *(علی سلامت)*

خط $d: y=ax+۱$ بر تابع f مماس و چون $f'(۱)=۳$ است، شیب این خط یعنی a برابر ۳ است. برای محاسبهٔ عرض نقطهٔ A مقدار $x=۱$ را در $y=۳x+۱$ جایگذاری می‌کنیم. بنابراین داریم: $A(۱,۴)$.

خط d بر خط L عمود است پس $m_L=-\frac{۱}{۳}=f'(-۳)$. هم‌چنین خط L از نقطهٔ $C(۰,۴)$ عبور می‌کند، پس $L: y=-\frac{۱}{۳}x+۴$ برای محاسبهٔ $f(-۳)$ نیز مقدار $x=-۳$ را در خط L قرار می‌دهیم که داریم $f(-۳)=۵$.

بنابراین:

$$f'(-۳)\times f(-۳)=-\frac{۵}{۳}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۷۷ تا ۸۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۸۴- **گزینهٔ «۳»** (سعید خانجانی)

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}-0}{x-0}\times\frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\left(1-x^2\right)}}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

۱ ۲ ۳✓ ۴

۸۵- **گزینهٔ «۱»** (سعید علم‌پور)

در $x=\pi$ تابع پیوسته است و در همسایگی راست آن داریم:

$$f(x)=3\left(x^2-1\right)-\sin x\Rightarrow f'(x)=6x-\cos x$$

$$\Rightarrow f'_+(\pi)=6\pi+1$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۸۴ تا ۸۷)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۸۶- **گزینهٔ «۳»** (میلاد منصوری)

تابع fog عبارت است از:

$$f\big(g(x)\big)=5\Big(2x+\big|x^2-1\big|\Big)-a\Big|2x+\big|x^2-1\big|-1\Big|$$

حال در نقطهٔ $x=1$ عبارت $2x+\big|x^2-1\big|-1$ مثبت است. پس داریم:

$$\Big|2x+\big|x^2-1\big|-1\Big|=2x+\big|x^2-1\big|-1$$

$$\Rightarrow fog(x)=10x+5\big|x^2-1\big|-a\Big(2x-1+\big|x^2-1\big|\Big)$$

$$=(10-2a)x+a+(5-a)\big|x^2-1\big|$$

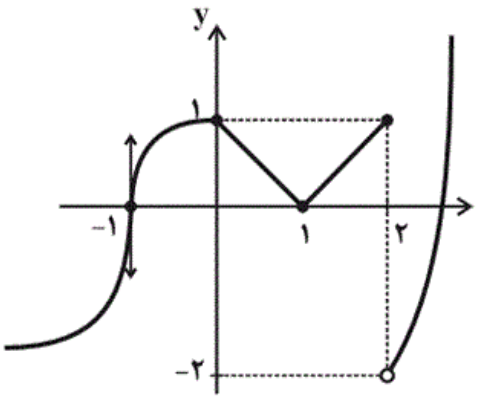
برای مشتق‌پذیری این تابع در $x=1$ لازم و کافی است که $(5-a)\big|x^2-1\big|$ مشتق‌پذیر باشد، که این ایجاب می‌کند $5-a=0$ یا $a=5$ باشد.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۸۴ تا ۸۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۸۷- **گزینهٔ «۳»** (حمید علیزاده)

نمودار تابع f را مطابق شکل زیر رسم می‌کنیم:



تابع در $x=-1$ دارای مماس قائم است. پس در این نقطه مشتق ندارد. هم‌چنین در نقاط گوشه‌ای $x=0$ و $x=1$ و نقطهٔ ناپیوستهٔ $x=2$ نیز مشتق‌ناپذیر است. (در $x=2$ ناپیوسته است پس مشتق‌ناپذیر است.) پس تعداد نقاط مشتق‌ناپذیر تابع f برابر ۴ است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۸۴ تا ۸۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.kanoon.ir

۸۸- **گزینهٔ «۲»** (جهانبخش نیکنام)

راه حل اول:

$$g'(x)=3x^2f'(x)+(x^3-1)f''(x)+6xf(x)+3x^2f'(x)$$

$$g'(1)=3f'(1)+0+6f(1)+3f'(1)=6f(1)+6f'(1)$$

از طرف دیگر $f(1)=\frac{4}{3}$ و

$$f'(x)=\frac{(3x^2+2x+1)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^3+x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$=\frac{6\times 3-3\times 4}{3^2}=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow g'(1)=6\times\frac{4}{3}+6\times\frac{2}{3}=12$$

راه حل دوم:

$$g(x)=\Big((x^3-1)f(x)\Big)'$$

$$(x^3-1)f(x)=(x-1)(x^2+x+1)\times\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1}=x^4-1$$

$$\Rightarrow g(x)=4x^3\Rightarrow g'(x)=12x^2\Rightarrow g'(1)=12$$

(حسابان ۲- صفحهٔ ۹۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۸۹- **گزینهٔ «۴»** (فرامرز سپهری)

ابتدا حاصل $\frac{f}{g}+\frac{f'}{g'}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{f}{g}+\frac{f'}{g'}=\frac{f.g'+f'.g}{gg'}$$

با توجه به اینکه داریم:

$$(f.g)'=f'.g+g'.f$$

ابتدا $f.g$ را تشکیل داده و مشتق می‌گیریم:

$$(f.g)(x)=\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=x^2+1-x^2=1$$

$$\Rightarrow \frac{f}{g}+\frac{f'}{g'}=0$$

(حسابان ۲- صفحهٔ ۹۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

$$\Rightarrow \frac{24}{(2x+5)^2}=6\Rightarrow (2x+5)^2=4\Rightarrow 2x+5=\pm 2$$

$$\begin{cases} x=-\frac{3}{2}\Rightarrow f\left(-\frac{3}{2}\right)=-4\Rightarrow A\left(-\frac{3}{2},-4\right) \\ x=-\frac{7}{2}\Rightarrow f\left(-\frac{7}{2}\right)=8\Rightarrow B\left(-\frac{7}{2},8\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB=\text{فاصلهٔ دو نقطهٔ } A \text{ و } B: \sqrt{\left(-\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\right)^2+(8+4)^2}$$

$$=\sqrt{4+144}=\sqrt{148}=2\sqrt{37}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۹۲ تا ۹۴)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۹۱- **گزینهٔ «۴»** (سعید علم‌پور)

در نقطه‌ای به طول x که منحنی بر محور xها مماس است، داریم:

$$f'(x)=f(x)=0$$

$$f'(x)=6x^2+K=0\Rightarrow K=-6x^2 \qquad (*)$$

$$\xrightarrow{f(x)=0\text{ جایگذاری در معادلهٔ}} 2x^3-6x^3+\frac{1}{2}=0\Rightarrow -4x^3=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x^3=\frac{1}{8}\Rightarrow x=\frac{1}{2}\xrightarrow{(*)}K=-6x^2=-6\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{2}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۹۲ تا ۹۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۹۲- **گزینهٔ «۱»** (فرامرز سپهری)

تابع f در $x=2$ برابر صفر است، پس یک عامل صفرکننده داریم. ابتدا f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=(x-2)(x+1)\times\frac{1}{\sqrt[3]{4x}+\sqrt[3]{2x}}$$

و به کمک مشتق‌گیری از عامل صفرکننده داریم:

$$f'(x)=1\times(x+1)\times\frac{1}{\sqrt[3]{4x}+\sqrt[3]{2x}}$$

با جای‌گذاری $x=2$ داریم:

$$f'(2)=3\times\frac{1}{2+2}=\frac{3}{4}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۹۲ تا ۹۴)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۹۳- **گزینهٔ «۱»** (محمدطاهر شعاعی)

عبارت $۴\cos^۲ x - ۳$ عامل صفرکننده است. پس کافی است فقط از آن

مشتق بگیریم: $f'(\frac{\pi}{۶}) = (۰ + ۸\sin\frac{\pi}{۶}\cos\frac{\pi}{۶})\cos\frac{\pi}{۶} \times \sin^۲\frac{\pi}{۶}$

$$= ۸ \times \frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۹۲ تا ۹۵)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۹۴- **گزینهٔ «۳»** (میلاد سجادی‌لاریجانی)

$$\lim_{h \to ۰} \frac{f(۲+۳h) - f(۲-h)}{۲h} = \frac{۳-(-۱)}{۲} f'(۲) = ۲f'(۲) = ۳$$

$$\Rightarrow f'(۲) = \frac{۳}{۲}$$

$$\left(f\left(\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)\right)' = \frac{-۱}{۲\sqrt{x^۳}} f'\left(\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\Rightarrow \left(f\left(\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)\right)'\Big|_{x=\frac{۱}{۴}} = -۴f'(۲) = (-۴)\left(\frac{۳}{۲}\right) = -۶$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۹۲ تا ۹۶)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

www.kanoon.ir

۹۵- **گزینهٔ «۳»** (میلاد سجادی‌لاریجانی)

$$f\left(x+\sqrt{x^۲+۳x}\right)=\frac{۱}{x} \xrightarrow{\text{مشتق‌گیری}}$$

$$\left(۱+\frac{۲x+۳}{۲\sqrt{x^۲+۳x}}\right)f'\left(x+\sqrt{x^۲+۳x}\right)=-\frac{۱}{x^۲} \qquad (*)$$

باید ورودی تابع f برابر ۳ باشد، در نتیجه باید داشته باشیم:

$$x+\sqrt{x^۲+۳x}=۳ \Rightarrow \sqrt{x^۲+۳x}=۳-x \Rightarrow x^۲+۳x=۹+x^۲-۶x$$

$$\Rightarrow ۹x=۹ \Rightarrow x=۱$$

$$\xrightarrow{(*)}\left(۱+\frac{۵}{۴}\right)f'(۳)=-\frac{۱}{۱} \Rightarrow \frac{۹}{۴}f'(۳)=-۱ \Rightarrow f'(۳)=-\frac{۴}{۹}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۹۲ تا ۹۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۹۶- **گزینهٔ «۴»** (کنکور سراسری)

$$f(x)=\sin(۴x-f(x))$$

$$\Rightarrow f'(x)=(۴-f'(x))\cos(۴x-f(x))$$

$$\Rightarrow f'(۰)=(۴-f'(۰))\cos(۰-f(۰))$$

اما $f(۰)=۰$ است.

$$\Rightarrow f'(۰)=(۴-f'(۰))\cos(۰) \Rightarrow f'(۰)=۴-f'(۰)$$

$$\Rightarrow ۲f'(۰)=۴ \Rightarrow f'(۰)=۲$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۹۵ و ۹۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.kanoon.ir

۹۷- **گزینهٔ «۱»** (کاظم اجلالی)

$$f'(x) = -۲\sin x\cos^۲ x - ۳k\sin ۳x$$

$$f''(x) = -۲\cos^۳ x + ۴\sin^۲ x\cos x - ۹k\cos ۳x$$

$$f''(x) = -۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^۳ + ۴\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۲\left(\frac{۱}{۲}\right) - ۹k(-۱) = \frac{۵}{۴} + ۹k$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۴} + ۹k = \frac{۱}{۴} \Rightarrow k = -\frac{۱}{۹}$$

(حسابان ۲- صفحهٔ ۹۸)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۹۸- **گزینهٔ «۲»** (حمید علیزاده)

$$f(x) = \begin{cases} \sin ax + bx^n & ;x \geq ۰ \\ ۳x^۲ + \tan x & ;x < ۰ \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to ۰} f(x) = f(۰) = ۰$$

در نتیجه شرط پیوستگی برقرار است.

$$f'(x) = \begin{cases} a\cos ax + nbx^{n-۱} & ;x \geq ۰ \\ ۶x + (۱ + \tan^۲ x) & ;x < ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_+(۰) = a \\ f'_-(۰) = ۱ \end{cases} \xrightarrow[\text{موجود است.}]{\text{مشتق اول}} a = ۱$$

$$f''(x) = \begin{cases} -a^۲\sin ax + n(n-۱)bx^{n-۲} & ;x \geq ۰ \\ ۶ + ۲\tan x(۱ + \tan^۲ x) & ;x < ۰ \Rightarrow f''_-(۰) = ۶ \end{cases}$$

برای وجود $f''(۰)$ و ناصفربودن آن وقتی $x > ۰$ است، لازم است $n = ۲$ باشد.

$$\xrightarrow{n=۲} f''_+(۰) = ۲b$$

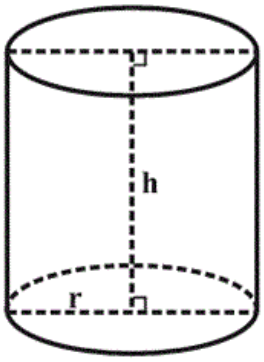
$$f''_+(۰) = f''_-(۰) \Rightarrow ۲b = ۶ \Rightarrow b = ۳$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۸۴ تا ۸۷ و ۹۸)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۹۹- **گزینهٔ «۲»** (سعید علم‌پور)



مساحت کل استوانه : $S = ۲\pi rh + ۲\pi r^۲$

$$\xrightarrow{h=۱۰} S = ۲۰\pi r + ۲\pi r^۲$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر مساحت : $S'(r) = ۲۰\pi + ۴\pi r$

$$\Rightarrow S'(۴) = ۲۰\pi + ۱۶\pi \Rightarrow S'(۴) = ۳۶\pi$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۰۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۰۰- **گزینهٔ «۳»** (حمید مام‌قادری)

روش اول:

$$\text{آهنگ متوسط در } [۰,۱۰۰] = \frac{V(۱۰۰)-V(۰)}{۱۰۰-۰} = \frac{۰-۴۰}{۱۰۰} = -\frac{۴۰}{۱۰۰}$$

$$V'(t) = ۸۰\left(\frac{-۱}{۱۰۰}\right)\left(۱-\frac{t}{۱۰۰}\right) = -\frac{۸}{۱۰}\left(۱-\frac{t}{۱۰۰}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{۴۰}{۱۰۰} = \frac{-۸}{۱۰}\left(۱-\frac{t}{۱۰۰}\right) \Rightarrow t = ۵۰$$

روش دوم:

اگر $f(x) = ax^۲ + bx + c$ باشدآنگاه آهنگ متوسط تغییر در بازهٔ $[a,b]$ با آهنگ لحظه‌ای تغییر در $x = \frac{a+b}{۲}$ برابر است؛ در نتیجه چون V یک تابع درجه ۲ است، لذا داریم:

$$\text{آهنگ متوسط در } [۰,۱۰۰] = V'(t_۰) \Rightarrow t_۰ = \frac{۰+۱۰۰}{۲} = ۵۰s$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۰۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.kanoon.ir

۸۱- **گزینهٔ «۱»** (سیروس نصیری)

$$y = ax^۲ + bx + c \Rightarrow y' = ۲ax + b \Rightarrow y'' = ۲a$$

$$y + y' + y'' = ax^۲ + bx + c + ۲ax + b + ۲a$$

$$= ax^۲ + (b + ۲a)x + (c + b + ۲a) = x^۲ + x + ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \\ b + ۲a = ۱ \\ c + b + ۲a = ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = ۱, b = -۱, c = ۰ \Rightarrow a + b + c = ۰$$

(حسابان ۲- صفحهٔ ۹۳)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۸۲- **گزینهٔ «۱»** (سعید خانجانی)

نکته: $\lim\limits_{h \to ۰} \frac{f(x_۰ + mh) - f(x_۰ + nh)}{h} = (m - n) f'(x_۰)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to ۰} \frac{f(h + x) - f(h - x)}{x} = ۲f'(h) = ۲h^۲ \Rightarrow f'(h) = h^۲$$

$$\lim_{x \to ۳} \frac{f(x) - f(۳)}{x^۲ - ۹} = \lim_{x \to ۳} \frac{۱}{x + ۳} \left(\frac{f(x) - f(۳)}{x - ۳} \right)$$

$$= \frac{۱}{۶} f'(۳) = \frac{۱}{۶} \times ۹ = \frac{۳}{۲}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۷۷ تا ۸۰)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۱۰۱- **گزینهٔ «۲»** *(مسعود درویشی)*

دو دایره به قطرهای AA' و FF' هم مرکز هستند و شعاع آنها به ترتیب برابر $OA = a$ و $OF = c$ است. داریم:

$$\text{مساحت ناحیهٔ بین دو دایره} = \pi a^۲ - \pi c^۲ = \pi(a^۲ - c^۲)$$

$$= \pi b^۲ = \pi(\frac{۱۲}{۲})^۲ = ۳۶\pi$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۷ و ۴۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۰۲- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

دو سر قطر بزرگ یک بیضی دورترین و نزدیک‌ترین نقطهٔ بیضی نسبت به هر کدام از کانون‌های آن بیضی هستند. فاصلهٔ هر کانون از دورترین نقطهٔ بیضی برابر $a + c$ و نزدیک‌ترین نقطهٔ بیضی برابر $a - c$ است، بنابراین نسبت مورد نظر برابر است با:

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\frac{a+c}{a}}{\frac{a-c}{a}} = \frac{۱+\frac{c}{a}}{۱-\frac{c}{a}} = \frac{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{۲+\sqrt{۲}}{۲-\sqrt{۲}} \times \frac{۲+\sqrt{۲}}{۲+\sqrt{۲}}$$

$$= \frac{(۲+\sqrt{۲})^۲}{۲} = \frac{[\sqrt{۲}(\sqrt{۲}+۱)]^۲}{۲} = \frac{۲(\sqrt{۲}+۱)^۲}{۲} = (\sqrt{۲}+۱)^۲$$

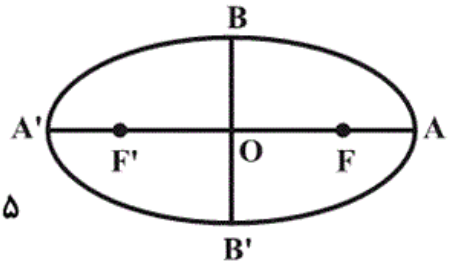
(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.kanoon.ir

۱۰۳- **گزینهٔ «۱»** *(محمد خندان)*

مطابق شکل عرض مرکز بیضی برابر عرض کانون و طول مرکز بیضی برابر طول هر یک از دو سر قطر کوچک این بیضی است. بنابراین نقطهٔ $O(-۲,-۱)$ مرکز بیضی است و داریم:



$$c = OF = ۴$$

$$b = OB = ۳$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ = ۱۶ + ۹ = ۲۵ \Rightarrow a = ۵$$

خروج از مرکز بیضی: $\frac{c}{a} = \frac{۴}{۵}$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

$$\frac{b^۲}{c^۲} = \frac{a^۲ - c^۲}{c^۲} = \frac{a^۲}{c^۲} - ۱ = \frac{۱}{e^۲} - ۱$$

حال برای هر یک از گزینه‌ها داریم:

گزینهٔ «۱»: $\frac{۱}{۴} = ۱ - e^۲ \Rightarrow e^۲ = \frac{۳}{۴} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

گزینهٔ «۲»: $\frac{۱}{۲} = ۱ - e^۲ \Rightarrow e^۲ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

گزینهٔ «۳»: $۳ = \frac{۱}{e^۲} - ۱ \Rightarrow e^۲ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow e = \frac{۱}{۲}$

گزینهٔ «۴»: $۲ = \frac{۱}{e^۲} - ۱ \Rightarrow e^۲ = \frac{۱}{۳} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

در بین گزینه‌ها خروج از مرکز گزینهٔ «۱» به عدد یک نزدیک‌تر است، پس شکل این بیضی به پاره‌خط نزدیک‌تر می‌باشد.

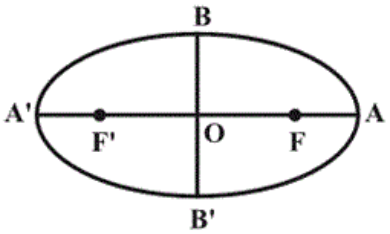
(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحهٔ ۴۹)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۱۰۵- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

مرکز بیضی دقیقاً وسط دو کانون بیضی قرار دارد، پس نقطهٔ $O(-۱,-۱)$ مرکز این بیضی است. از طرفی داریم:



$$۲c = FF' = ۱۲ \Rightarrow c = ۶$$

$$\frac{c}{a} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{۶}{a} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow a = ۱۰$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۱۰۰ = b^۲ + ۳۶ \Rightarrow b^۲ = ۶۴ \Rightarrow b = ۸$$

بنابراین مطابق شکل نقاط $A(۹,-۱)$ و $A'(-۱۱,-۱)$ دو سر قطر بزرگ و نقاط $B(-۱,۷)$ و $B'(-۱,-۹)$ دو سر قطر کوچک بیضی هستند. در بین گزینه‌های داده شده تنها خط $y = ۷$ در نقطهٔ B بر بیضی مماس است.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۶- **گزینهٔ «۲»** *(عادل حسینی)*

سهمی محور yها را در دو نقطه قطع می‌کند، پس دهانهٔ این سهمی رو به راست یا چپ باز می‌شود و محور تقارن آن عمودمنصف پاره‌خط واصل بین نقاط $(۰,۲)$ و $(۰,-۶)$ است. یعنی داریم: $y = \frac{۲-۶}{۲} = -۲$: محور تقارن

بنابراین عرض رأس سهمی برابر (-۲) است و چون رأس سهمی روی نیمساز ناحیه‌های دوم و چهارم یعنی $y = -x$ قرار دارد، پس طول آن برابر ۲ خواهد بود. با توجه به مختصات رأس، سهمی قطعاً رو به چپ باز می‌شود و داریم: معادلهٔ سهمی $(y+۲)^۲ = -۴a(x-۲)$:

$$\xrightarrow{(۰,۲)} (۲+۲)^۲ = -۴a(۰-۲) \Rightarrow ۸a = ۱۶ \Rightarrow a = ۲$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۲ تا ۵۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۱۰۷- **گزینهٔ «۳»** (مسعود رویشی)

محور تقارن هر ۴ سهمی داده شده، بر محور xها منطبق است. از طرفی فاصلهٔ کانونی همهٔ آنها برابر یک است. با توجه به معادلهٔ سهمی‌ها داریم:

گزینهٔ «۱»: رأس سهمی نقطهٔ $(۰,۰)$ و دهانهٔ سهمی رو به راست است، پس خط $x=-۱$ خط هادی سهمی است.

گزینهٔ «۲»: رأس سهمی نقطهٔ $(۰,۰)$ و دهانهٔ سهمی رو به چپ است، پس خط $x=۱$ خط هادی سهمی است.

گزینهٔ «۳»: رأس سهمی نقطهٔ $(۱,۰)$ و دهانهٔ سهمی رو به راست است، پس خط $x=۰$ (محور yها) خط هادی سهمی است.

گزینهٔ «۲»: رأس سهمی نقطهٔ $(۱,۰)$ و دهانهٔ سهمی رو به چپ است، پس خط $x=۲$ خط هادی سهمی است.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۲ تا ۵۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.kanoon.ir

۱۰۸- **گزینهٔ «۴»** *(محمد خندان)*

رأس سهمی دقیقاً وسط کانون و خط هادی قرار گرفته، پس $A(۱,۲)$ رأس سهمی است و دهانهٔ سهمی رو به چپ باز می‌شود. فاصلهٔ کانونی سهمی برابر فاصلهٔ کانون تا رأس سهمی یعنی برابر ۴ است و در نتیجه داریم:

معادلهٔ سهمی: $(y-۲)^۲ = -۱۶(x-۱)$

$$\xrightarrow{x=۰} (y-۲)^۲ = ۱۶ \Rightarrow \begin{cases} y-۲=۴ \Rightarrow y=۶ \\ y-۲=-۴ \Rightarrow y=-۲ \end{cases}$$

بنابراین نقاط $P(۰,۶)$ و $Q(۰,-۲)$ نقاط برخورد سهمی با محور عرض‌ها هستند. از طرفی کانون روی محور تقارن سهمی قرار دارد، پس $|PF| = |QF|$ است و داریم:

$$|PF| = \sqrt{(-۳-۰)^۲ + (۲-۶)^۲} = ۵$$

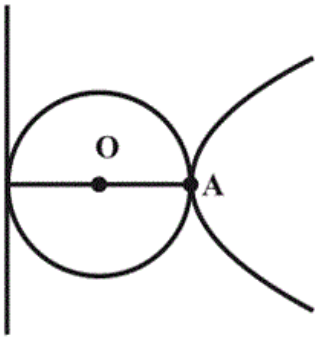
$$\Rightarrow |PF| + |QF| = ۲ \times ۵ = ۱۰$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۲ تا ۵۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.kanoon.ir

۱۰۹- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*



ابتدا معادلهٔ سهمی را به حالت متعارف تبدیل می‌کنیم:

$$y^۲ + ۴y - ۴x = ۰$$

$$\Rightarrow y^۲ + ۴y + ۴ = ۴x + ۴$$

$$\Rightarrow (y+۲)^۲ = ۴(x+۱)$$

نقطهٔ $A(-۱,-۲)$ رأس سهمی است و دهانهٔ سهمی رو به راست باز می‌شود. داریم:

$$۴a = ۴ \Rightarrow a = ۱$$

معادلهٔ خط هادی: $x = -a + h = -۱ - ۱ = -۲$

مطابق شکل، مرکز دایره دقیقاً وسط فاصلهٔ بین رأس سهمی و خط هادی آن قرار دارد، پس مختصات آن به‌صورت $O(-\frac{۳}{۲},-۲)$ و شعاع دایره برابر $OA = \frac{۱}{۲}$ است و در نتیجه داریم:

معادلهٔ دایره: $(x+\frac{۳}{۲})^۲ + (y+۲)^۲ = \frac{۱}{۴}$

$$\Rightarrow x^۲ + ۳x + \frac{۹}{۴} + y^۲ + ۴y + ۴ = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow x^۲ + y^۲ + ۳x + ۴y + ۶ = ۰$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.kanoon.ir

۱۱۰- **گزینهٔ «۱»** *(هومن نورائی)*

خط مماس بر این سهمی در رأس آن، یک خط افقی (موازی با خط هادی سهمی) است، بنابراین معادلهٔ آن به صورت $y = k$ (k عرض رأس سهمی است) می‌باشد و در نتیجه $m = ۰$ است. حال معادلهٔ سهمی را به‌صورت متعارف در می‌آوریم:

$$۳x^۲ - ۶x + by + ۱۱ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۶x + ۳ = -by - ۸$$

$$\Rightarrow ۳(x-۱)^۲ = -b(y + \frac{۸}{b}) \Rightarrow (x-۱)^۲ = -\frac{b}{۳}(y + \frac{۸}{b})$$

$$\text{فاصلهٔ کانونی} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۴} \times \frac{b}{۳} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow b = ۴$$

$$\text{عرض رأس سهمی}: y = -\frac{۸}{b} = \frac{-۸}{۴} = -۲ \Rightarrow n = -۲$$

$$\xrightarrow{m=۰} m + n = -۲$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.kanoon.ir