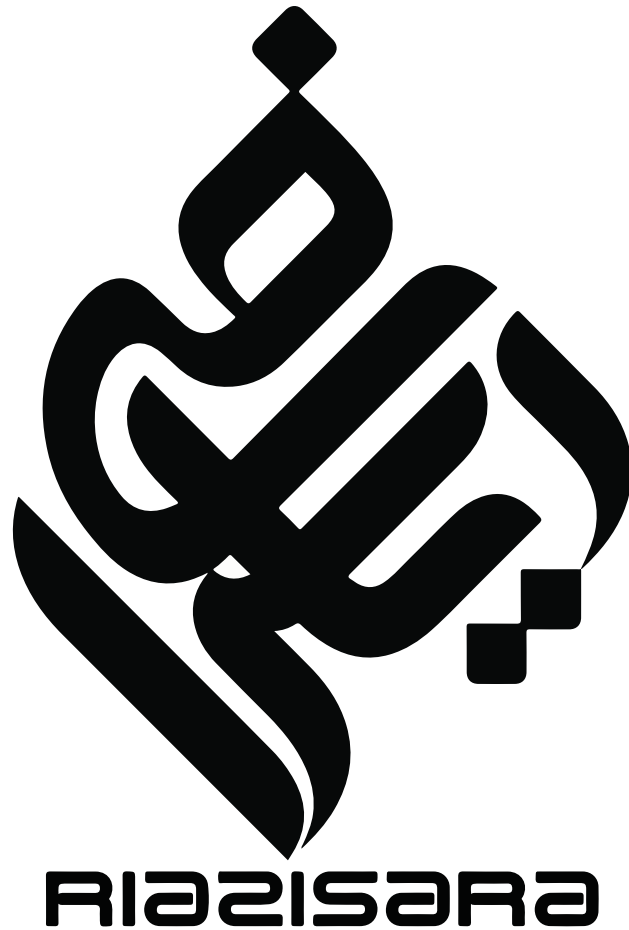




سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

درسنامه ها و جزوه های ریاضی  
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور  
نمونه سوالات امتحانات ریاضی  
نرم افزارهای ریاضیات  
و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)

<https://t.me/riazisara>



ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)

<https://www.instagram.com/riazisara.ir>



حسابان ۱، رادیان - ۲ سوال -

۸۹- در دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۴، متحرکی از نقطه  $(۴,۰)$  به اندازه  $۱۲۰^\circ$  به صورت پادساعتگرد حرکت کرده و به نقطه A می‌رسد. متحرکی دیگر از نقطه  $(-۴,۰)$  به اندازه  $\frac{5\pi}{4}$  به صورت ساعتگرد حرکت کرده و به نقطه B می‌رسد. اندازه کمان کوچکتر AB چند رادیان است؟

- (۱)  $\frac{11\pi}{3}$  (۲)  $\frac{13\pi}{3}$  (۳)  $\frac{48\pi}{11}$  (۴)  $\frac{12\pi}{11}$

۸۷- در یک مخروط قائم، اندازه ارتفاع برابر قطر قاعده است. اندازه زاویه قطاع حاصل از شکل گسترده این مخروط چند رادیان است؟

- (۱)  $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$  (۲)  $\frac{2\pi}{3}$  (۳)  $\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$  (۴)  $\pi$

حسابان ۱، نسبت های مثلثاتی برخی زوایا - ۱ سوال -

۹۰- حاصل عبارت  $A = \cos \frac{76\pi}{3} + \sin \frac{289\pi}{6} + \cot \frac{67\pi}{4}$  کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) -۱/۵ (۴) صفر

حسابان ۱، روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا - ۴ سوال -

۹۱- اگر  $\frac{\pi}{12} \leq x < \frac{\pi}{3}$  باشد، آنگاه حاصلضرب کمترین و بیشترین مقدار عبارت  $A = (\sin x + \cos x)^2 - (\sin x - \cos x)^2$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  (۲) ۱ (۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۴) ۲

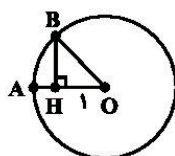
۹۲- ساده شده عبارت  $\tan 20^\circ + \frac{\sin^2 25^\circ}{\sin 70^\circ}$  کدام است؟

- (۱)  $\cot 55^\circ$  (۲)  $\frac{1}{3} \cot 55^\circ$  (۳)  $\tan 55^\circ$  (۴)  $\frac{1}{3} \tan 55^\circ$

۹۳- تعداد نقاط برخورد منحنی دو تابع  $f(x) = \cos(x - \pi)$  و  $g(x) = 1 + \sin(x + \frac{\pi}{4})$  در بازه  $[-2\pi, 2\pi]$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) بی شمار

۸۸- در دایره زیر طول کمان روبه‌رو به زاویه  $\frac{\pi}{8}$  کدام است؟  $(\hat{A}OB = \frac{\pi}{8}, OH = 1)$



- (۱)  $\frac{\pi}{2\sqrt{2}-\sqrt{2}}$  (۲)  $\frac{\pi}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{2})}$

- (۳)  $\frac{\pi}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}$  (۴)  $\frac{\pi}{2\sqrt{2}+\sqrt{2}}$

حسابان ۱، مفهوم حد و فرایندهای حدی - ۲ سوال -

۹۴- اگر جواب‌های نامعادله  $|x-1| < b$  یک همسایگی عدد  $\frac{1}{4}$  باشد، حدود  $b$  کدام است؟

- (۱)  $(0,1)$  (۲)  $(\frac{1}{4}, +\infty)$  (۳)  $(\frac{1}{4}, 1)$  (۴)  $(0, \frac{3}{4})$

۱۰۰- اگر بازه  $(2x-1, \frac{x+5}{x+1})$  یک همسایگی  $\frac{1}{4}$  باشد، حدود  $x$  کدام است؟

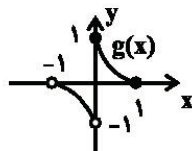
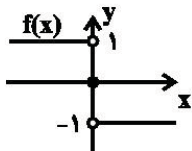
- (۱)  $\mathbb{R} - (-8, -1)$  (۲)  $(-\infty, -9) \cup (-1, \frac{3}{4})$  (۳)  $\mathbb{R} - (-9, -1)$  (۴)  $(-\infty, -8) \cup (-1, \frac{3}{4})$

حسابان ۱، قضایای حد - ۵ سوال -

۹۵- حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{[\sin x] + 2}{\cos 2x - 1}$  کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $-\frac{3}{2}$

۹۶- نمودار توابع  $f$  و  $g$  در زیر مفروض‌اند، حاصل  $\lim_{x \rightarrow -1} (3f - 2g)(x) + \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - 2g(x)}{1+x}$  کدام است؟

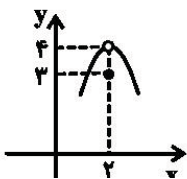


- (۱) صفر  
(۲) -۱  
(۳) ۷  
(۴) ۶

۹۷- حاصل‌دهای  $\lim_{x \rightarrow \pi} \left[ \frac{3}{\cos x} \right]$  و  $\lim_{x \rightarrow \pi} [3 \sin x]$  به ترتیب از راست به چپ کدام است؟ ( [ ] ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۳ و صفر (۲) ۲ و صفر (۳) ۳ و حد ندارد. (۴) هیچ‌کدام حد ندارد.

۹۸- نمودار تابع  $f$  به صورت مقابل است. حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) - \left[ \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \right]$  کدام است؟ ( [ ] ، نماد جزء صحیح است.)



- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۴

۹۹- اگر تابع  $f$  در  $x=2$  حد داشته باشد و  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-f(x)}{x+f(x)} = 3$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - f(x)}{x^2 + f(x)}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{3}{2}$  (۳)  $\frac{5}{3}$  (۴)  $\frac{3}{5}$

حسابان ۱، تابع لگاریتمی و لگاریتم - ۲ سوال -

۸۱- نمودار تابع  $f(x) = \log_a(bx-5)$  محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع می‌کند. اگر نمودار تابع از نقطه  $(\frac{4b+5}{2}, 3)$  نیز بگذرد، حاصل  $ab$  کدام است؟

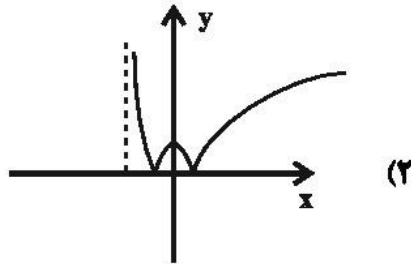
(۴) -۶

(۳) ۶

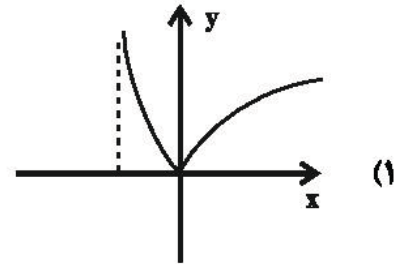
(۲) ۴

(۱) -۴

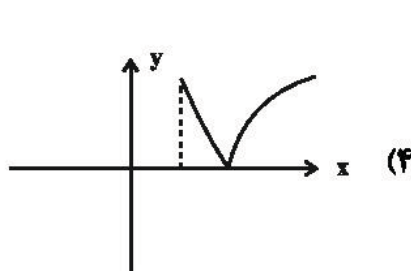
۸۲- نمودار تابع  $f(x) = |1 - \log(x+1)|$  کدام است؟



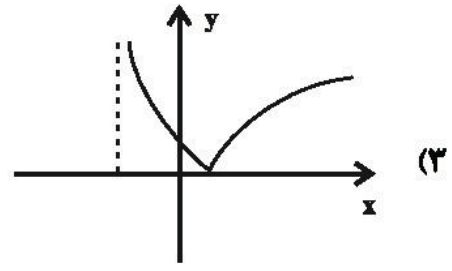
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

حسابان ۱، ویژگی‌های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی - ۴ سوال -

۸۳- اگر  $\log(2^x + 8) = \log 2 + x \log 2$  باشد، حاصل  $\frac{\log_2^2 x + 3}{\log_2^2 x + 1}$  کدام است؟

(۴) ۲

(۳) ۳

(۲)  $\frac{4}{3}$

(۱)  $\frac{2}{3}$

۸۴- از معادله  $\log_3^{(2x+1)} + \log_3^{\sqrt{2x+1}} + \log_3^{\sqrt[3]{2x+1}} = \frac{11}{3}$  مقدار لگاریتم  $\sqrt[3]{x^2}$  در مبنای ۴ کدام است؟

(۴)  $\frac{1}{6}$

(۳)  $\frac{2}{3}$

(۲)  $\frac{1}{3}$

(۱) ۱

۸۵- حاصلضرب ریشه‌های معادله  $16x^3 = x^{\log_2 x}$  کدام است؟

(۴) ۱۴

(۳) ۱۰

(۲) ۸

(۱) ۵

۸۶- حاصل  $\log_{\frac{x^2}{2\sqrt{2}}} x = 2 + \sqrt{2}$  به ازای  $x = 2 + \sqrt{2}$  کدام است؟

(۴)  $\frac{6}{5}$

(۳) ۱

(۲)  $\frac{4}{5}$

(۱)  $\frac{3}{5}$

هندسه ۲، تبدیل‌های هندسی - ۴ سوال -

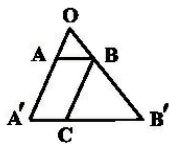
- ۱۰۱- در مثلث ABC، نقطه A را با بردار  $\overrightarrow{BC}$  به نقطه A'، نقطه B را با بردار  $\overrightarrow{CA}$  به نقطه B' و نقطه C را با بردار  $\overrightarrow{AB}$  به نقطه C' انتقال می‌دهیم. مساحت مثلث A'B'C' چند برابر مساحت مثلث ABC است؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۹

- ۱۰۲- دو خط عمود بر هم d و d' مفروض‌اند. نقاط صفحه را ابتدا نسبت به خط d و سپس تصاویر آن‌ها را نسبت به d' بازتاب می‌دهیم. اگر ترکیب این دو بازتاب را یک تبدیل فرض کنیم، کدام گزاره در مورد این تبدیل همواره درست است؟
- (۱) این تبدیل، شیب خطوط و جهت اشکال را حفظ می‌کند.  
 (۲) این تبدیل، شیب خطوط و جهت اشکال را حفظ نمی‌کند.  
 (۳) این تبدیل، شیب خطوط را حفظ کرده ولی جهت اشکال را حفظ نمی‌کند.  
 (۴) این تبدیل، جهت اشکال را حفظ کرده ولی، شیب خطوط را حفظ نمی‌کند.

- ۱۰۳- تبدیل یافته مربعی به طول ضلع  $2\sqrt{2}$  تحت تجانس به مرکز O و نسبت k، مربعی به طول قطر  $\sqrt{2}$  است. مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع ۴ تحت این تجانس به مثلثی با کدام مساحت تبدیل می‌شود؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۲)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  (۳)  $2\sqrt{3}$  (۴)  $\sqrt{3}$

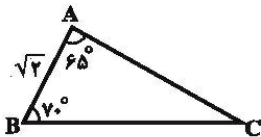
- ۱۰۴- در تجانس به مرکز O و نسبت ۴، اگر A'B' مجانس AB باشد، آن‌گاه مساحت متوازی‌الاضلاع ABCA' چند برابر مساحت مثلث BB'C است؟



- (۱)  $\frac{2}{5}$  (۲)  $\frac{3}{5}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $\frac{2}{3}$

## هندسه ۲، قضیه سینوس ها - ۲ سوال -

- ۱۰۷- در شکل مقابل، مجموع فاصله‌های نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌های مثلث از سه رأس آن کدام است؟



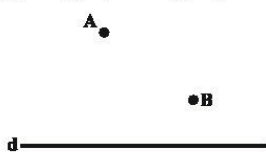
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

- ۱۰۸- در مثلث ABC، رابطه  $\frac{a^2}{b^2} = \frac{\tan \hat{A}}{\tan \hat{B}}$  برقرار است. کدام گزینه همواره صحیح است؟

- (۱) این مثلث در رأس A قائمه است.  
 (۲) این مثلث قائم‌الزاویه یا متساوی‌الساقین است.  
 (۳) این مثلث در رأس B قائمه است.  
 (۴) چنین مثلثی وجود ندارد.

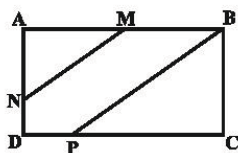
## هندسه ۲، کاربرد تبدیل ها - ۲ سوال -

- ۱۰۵- در شکل زیر، نقطه A به فاصله ۸/۵ واحد از خط d و ۸ واحد از نقطه B مفروض است. نقطه M را روی خط d چنان انتخاب می‌کنیم که  $MA + MB$  کمترین مقدار ممکن را دارا باشد. اگر این مقدار مینیمم برابر ۱۵ باشد، طول MA کدام است؟



- (۱)  $\frac{161}{30}$  (۲)  $\frac{289}{30}$  (۳)  $\frac{27}{5}$  (۴)  $\frac{48}{5}$

۱۰۶- در شکل زیر چهارضلعی ABCD مستطیل است و M وسط AB،  $AN = 2ND$  و P نقطه‌ای متحرک روی DC می‌باشد. اگر طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن برای MNPB برابر ۶ باشد، طول MN کدام است؟



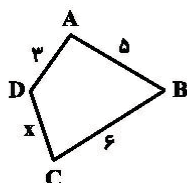
- (۱)  $\frac{3}{2}$   
(۲)  $\sqrt{6}$   
(۳)  $2\sqrt{2}$   
(۴) ۲

هندسه ی ۲، قضیه کسینوس ها - ۲ سوال -

۱۰۹- مثلث متساوی الساقین ABC ( $AB = AC$ )، را در نظر بگیرید. اگر  $\hat{A} = 120^\circ$  و طول شعاع دایره محیطی این مثلث برابر با  $\sqrt{12}$  باشد، آن‌گاه طول میانه BM کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{14}$   
(۲)  $\sqrt{18}$   
(۳)  $\sqrt{21}$   
(۴)  $\sqrt{24}$

۱۱۰- در شکل زیر، اگر چهارضلعی ABCD محیطی و  $\hat{A} = 120^\circ$  باشد، آنگاه کسینوس زاویه C کدام است؟



- (۱)  $\frac{1}{24}$   
(۲)  $\frac{1}{16}$   
(۳)  $\frac{1}{12}$   
(۴)  $\frac{1}{8}$

آمار و احتمال، توصیف و نمایش داده ها - ۲ سوال -

۱۱۶- در یک شرکت با ۶۰۰ کارمند، نمودار دایره‌ای مربوط به مدرک تحصیلی کارمندان رسم شده است. با توجه به جدول زیر، تعداد کارمندان دارای مدرک دکترا در این شرکت کدام است؟

| دکترا  | کارشناسی ارشد | کارشناسی    | کاردانی    | دیپلم      | نوع مدرک تحصیلی          |
|--------|---------------|-------------|------------|------------|--------------------------|
| x      | $75^\circ$    | $120^\circ$ | $60^\circ$ | $60^\circ$ | زاویه در نمودار دایره‌ای |
| (۱) ۷۵ | (۲) ۸۰        | (۳) ۹۰      | (۴) ۱۰۵    |            |                          |

۱۱۷- نمرات درس ریاضی دانش آموزان یک کلاس در جدول زیر آمده است. اختلاف میانگین و میانه نمرات کدام است؟

| نمره    | ۱۹    | ۱۷    | ۱۴    | ۱۳ | ۱۱ | ۱۰ | ۷ |
|---------|-------|-------|-------|----|----|----|---|
| فراوانی | ۲     | ۴     | ۳     | ۱  | ۲  | ۲  | ۱ |
| (۱) صف  | (۲) ۱ | (۳) ۲ | (۴) ۳ |    |    |    |   |

آمار و احتمال، احتمال شرطی - ۳ سوال

۱۱۱- اگر  $P(A - B) = 0/2$  و  $P(B) = 0/4$  باشد، آنگاه  $P(A' | B')$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$   
(۲)  $\frac{1}{2}$   
(۳)  $\frac{3}{8}$   
(۴)  $\frac{2}{3}$

۱۱۲- تیم فوتسال یک کلاس، ۸ بازیکن با قدهای مختلف دارد. دو بازیکن از این تیم به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر بازیکن اول بلندتر از بازیکن دوم باشد، احتمال اینکه بازیکن اول بلندقدترین بازیکن تیم باشد، چقدر است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$   
(۲)  $\frac{1}{4}$   
(۳)  $\frac{1}{7}$   
(۴)  $\frac{1}{8}$



۱۱۳- دسته‌ای کارت شامل ۳ کارت دو رو سفید، ۴ کارت دو رو مشکی و ۴ کارت یک رو سفید و یک رو مشکی داریم. کارتی به تصادف از این دسته کارت انتخاب می‌کنیم و فقط یک روی آن را مشاهده می‌کنیم. اگر روی مشاهده شده مشکی باشد، احتمال آنکه روی دیگر این کارت نیز مشکی باشد، کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{11}$  (۲)  $\frac{4}{11}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{2}{3}$

آمار و احتمال ، پیشامدهای مستقل و وابسته - ۲ سوال -

۱۱۴- در یک کیسه، ۴ مهره سیاه و ۶ مهره سبز وجود دارد. دو مهره به‌طور متوالی و با جای‌گذاری از این کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آنکه حداقل یک بار مهره سیاه از کیسه خارج شود، کدام است؟

- (۱)  $\frac{64}{100}$  (۲)  $\frac{48}{100}$  (۳)  $\frac{40}{100}$  (۴)  $\frac{16}{100}$

۱۱۵- در پرتاب یک تاس، چه تعداد از پیشامدهای زیر مستقل از پیشامد «ظاهر شدن یک عدد زوج» هستند؟  
(الف) ظاهر شدن یک عدد اول  
(ب) ظاهر شدن یکی از شماره‌های عدد ۶

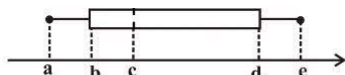
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

آمار و احتمال ، معیارهای پراکندگی - ۳ سوال -

۱۱۸- ۲۰ داده آماری با واریانس ۶ داریم. چند داده مساوی با میانگین باید به آنها اضافه کنیم تا واریانس کل داده‌ها برابر ۴ شود؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰

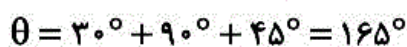
۱۱۹- نمودار جعبه‌ای داده‌های ۱۶، ۲۷، ۱۴، ۲۳، ۱۵، ۱۰، ۱۲ به صورت زیر است. حاصل  $\frac{a+c}{b+d}$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{25}{35}$  (۲)  $\frac{25}{37}$  (۳)  $\frac{27}{37}$  (۴)  $\frac{27}{35}$

۱۲۰- ضریب تغییرات سن دانش‌آموزان یک کلاس، ۳ سال بعد، ۲۰ درصد کمتر از ضریب تغییرات سن فعلی آنها است. میانگین سن فعلی دانش‌آموزان این کلاس کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴



$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{195}{180} = \frac{R}{\pi}$$

$$\rightarrow R = \frac{165\pi}{180} = \frac{11\pi}{12} \text{ ( } \theta \text{ بر حسب رادیان)}$$

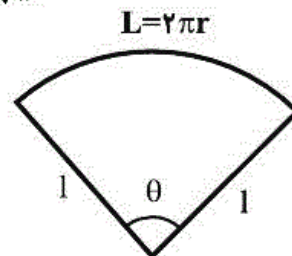
$$L = r\theta = 4 \times \frac{11\pi}{12} = \frac{11\pi}{3}$$

(حسابان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

☒ 1 ✓

با توجه به مفروضات مسئله داریم:

$$l^2 = r^2 + h^2 = r^2 + \epsilon r^2 = \Delta r^2 \Rightarrow l = \sqrt{\Delta} r$$



$$L = I\theta \rightarrow r\pi r = \sqrt{\Delta} r \times \theta$$

از طرفی در قطاع حاصل داریم:

$$\rightarrow \theta = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} \text{ رادیان}$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

1



(ویدر، ایتی)

$$\cos \frac{76\pi}{3} = \cos \frac{75\pi + \pi}{3} = \cos(25\pi + \frac{\pi}{3})$$

$$\underline{\underline{\text{ربع سوم}}} - \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{289\pi}{6} = \sin \frac{288\pi + \pi}{6} = \sin(48\pi + \frac{\pi}{6})$$

$$\underline{\underline{\text{ربع اول}}} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cot \frac{67\pi}{4} = \cot \frac{64\pi - \pi}{4} = \cot(16\pi - \frac{\pi}{4})$$

$$\underline{\underline{\text{ربع دوم}}} - \cot \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = -1$$

(مسایان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۴

۳

۲✓

۱

(علی کردی)

$$A = (\sin x + \cos x)^2 - (\sin x - \cos x)^2 = 4 \sin x \cos x = 2 \sin 2x$$

$$\frac{\pi}{12} \leq x < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \leq 2x < \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \sin 2x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 \sin 2x \leq 2$$

بنابراین حاصلضرب کمترین و بیشترین مقدار عبارت A برابر  $2 = 1 \times 2$  می‌باشد.

(مسایان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷ و ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۴✓

۳

۲

۱

(میثم بهرامی بویا)

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ} + \frac{\sin^2 35^\circ}{2 \sin 35^\circ \cos 35^\circ} &= \frac{\cos 7^\circ}{\sin 7^\circ} + \frac{\sin 35^\circ}{2 \cos 35^\circ} \\
 &= \frac{\cos^2 35^\circ - \sin^2 35^\circ}{2 \sin 35^\circ \cos 35^\circ} + \frac{1}{2} \tan 35^\circ \\
 &= \frac{\cos 70^\circ}{2 \sin 35^\circ} - \frac{\sin 70^\circ}{2 \cos 35^\circ} + \frac{1}{2} \tan 35^\circ \\
 &= \frac{1}{2} \cot 35^\circ - \frac{1}{2} \tan 35^\circ + \frac{1}{2} \tan 35^\circ = \frac{1}{2} \cot 35^\circ = \frac{1}{2} \tan 55^\circ
 \end{aligned}$$

(مسابقان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۳ و ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۴ ✓

۳

۲

۱

(مجتبی نادری)

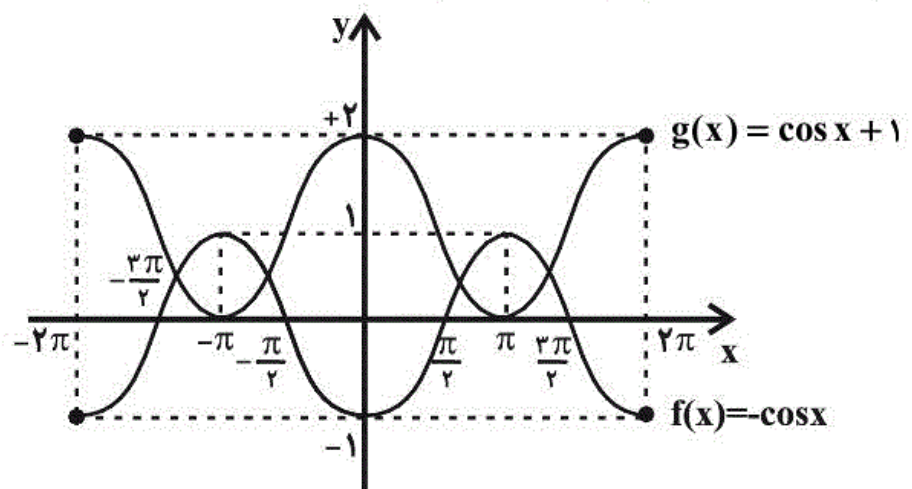
کافی است نمودار توابع  $f$  و  $g$  را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم.

$$f(x) = \cos(x - \pi) = \cos(-(\pi - x)) = \cos(\pi - x) = -\cos x$$

برای رسم نمودار  $f(x)$  کافیت نمودار تابع  $y = \cos x$  را نسبت به محور  $x$  ها قرینه کنیم.

$$g(x) = 1 + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = \cos x + 1$$

و برای رسم نمودار تابع  $g(x)$  کافیت، نمودار تابع  $y = \cos x$  را روی محور  $y$  ها یک واحد به بالا انتقال دهیم.



همانطور که از نمودار دو تابع  $f$  و  $g$  پیداست، دو تابع در چهار نقطه متقاطع‌اند.

(مسابقان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

می‌دانیم:  $\frac{\pi}{8} = 22.5^\circ$  ،  $2 \times 22.5^\circ = 45^\circ$

پس می‌توانیم از رابطه  $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$  استفاده کنیم:

$$\cos 45^\circ = 2\cos^2 22.5^\circ - 1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 2\cos^2 22.5^\circ$$

$$\frac{\sqrt{2} + 2}{4} = \cos^2 22.5^\circ$$

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2} + 2}}{2} = \cos 22.5^\circ$$

اگر شعاع دایره را  $r$  فرض کنیم داریم:

$$\cos \hat{AOB} = \frac{OH}{OB} \Rightarrow \cos 22.5^\circ = \frac{1}{r}$$

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = r$$

$$r = \sqrt{2(2 - \sqrt{2})}$$

مخرج را گویا می‌کنیم:

طول کمان روبه رو به زاویه  $\frac{\pi}{8}$  برابر است با:

$$l = r\theta = \sqrt{2(2 - \sqrt{2})} \frac{\pi}{8}$$

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷ و ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۴

۳

۲✓

۱

چون جوابهای نامعادله مورد نظر یک همسایگی  $\frac{1}{4}$  است، بنابراین عدد

$$\left| 3\left(\frac{1}{4}\right) - 1 \right| < b \Rightarrow b > \frac{1}{4}$$

$\frac{1}{4}$  باید در نامعادله صدق کند. یعنی:

(مسئله ۱- مر و پیوستگی - صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۲۲)

۴

۳

۲✓

۱

-۱۰۰

(میلاد منصوری)

$$\frac{1}{2} \in \left( 2x-1, \frac{x+5}{x+1} \right) \text{ باید باشد. یعنی: } 2x-1 < \frac{1}{2} < \frac{x+5}{x+1}$$

$$2x-1 < \frac{1}{2} \Rightarrow x < \frac{3}{4} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} < \frac{x+5}{x+1} \Rightarrow 0 < \frac{x+5}{x+1} - \frac{1}{2} = \frac{x+9}{2(x+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+9} \quad \begin{array}{c|ccc} & -9 & & -1 \\ \hline & \vdots & - & \vdots \\ & 0 & & \text{تن} \end{array}$$

$$\Rightarrow (-\infty, -9) \cup (-1, +\infty) \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} x \in (-\infty, -9) \cup \left(-1, \frac{3}{4}\right)$$

(مسابان ۱- هر و پیوستگی - صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۲۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

-۹۵

(وفید رافتی)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\Delta\pi}{4}} \frac{[\sin x] + 2}{\cos 2x - 1} = \frac{\left[ -\frac{\sqrt{2}}{2} \right] + 2}{0 - 1} = \frac{-1 + 2}{-1} = -1$$

(مسابان ۱- هر و پیوستگی - صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۴۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

با توجه به قضایای حد مجموع و تفاضل داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 3g(x) = 3 \times \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 3 \times (-1) = -3$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} 3f(x) = 3 \times \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 3 \times 1 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^+} 2g(x) = 2 \times \lim_{x \rightarrow (-1)^+} g(x) = 2 \times (0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) - 3 \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \\ \Rightarrow & \frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) - 3 \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)} + 3 \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) - 2 \lim_{x \rightarrow (-1)^+} g(x) \\ & = \frac{1 - (-3)}{1+0} + 3 - 0 = 4 + 3 = 7 \end{aligned}$$

(مسئله ۱- هر و پیوستگی - صفحه های ۱۲۳ تا ۱۳۶)

۴

۳✓

۲

۱

(محمدرضا مصطفی ابراهیمی)

در همسایگی  $x = 0$ ،  $\cos x \leq 1$  است، بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{3}{\cos x} \right] = \left[ \frac{3}{1^-} \right] = \left[ 3^+ \right] = 3$$

از طرفی در همسایگی راست  $x = 0$ ،  $\sin x > 0$  و در همسایگی چپ آن،  $\sin x < 0$  است و داریم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} [3 \sin x] = \left[ 0^+ \right] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} [3 \sin x] = \left[ 0^- \right] = -0 \end{cases}$$

یعنی  $[3 \sin x]$  در  $x = 0$  حد ندارد.

(مسئله ۱- هر و پیوستگی - صفحه های ۱۲۳ تا ۱۴۰)

۴

۳✓

۲

۱

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \Rightarrow \left[ \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \right] = [4] = 4$$

از طرف دیگر، در یک همسایگی  $x = 2$  مقادیر تابع  $f$  در بازه  $[3, 4)$  قرار دارند. پس در این همسایگی  $[f(x)] = 3$  است و در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow 2} [f(x)] = 3$$

$$\Rightarrow 2 \lim_{x \rightarrow 2} [f(x)] - \left[ \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \right] = 2 \times 3 - 4 = 2$$

(مسابقان ۱- هر و پیوستگی - صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۳۶)

۴

۳

۲✓

۱

فرض کنید  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L$  باشد، بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - f(x)}{x + f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} f(x)} = \frac{2 - L}{2 + L} = 3$$

$$\Rightarrow 2 - L = 6 + 3L \Rightarrow 4L = -4 \Rightarrow L = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - f(x)}{x^2 + f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} f(x)} = \frac{4 - (-1)}{4 + (-1)} = \frac{5}{3}$$

(مسابقان ۱- هر و پیوستگی - صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۳۶)

۴

۳✓

۲

۱



$$f(3) = \log_a^{3b-5} = 0 \Rightarrow 3b - 5 = 1 \Rightarrow b = 2$$

پس  $f(x) = \log_a^{2x-5}$  از آنجایی که تابع از نقطه  $(\frac{4b+5}{2}, 3)$  نیز

می‌گذرد، داریم:

$$f\left(\frac{4b+5}{2}\right) = 3 \xrightarrow{b=2} f\left(\frac{13}{2}\right) = 3 \Rightarrow \log_a^{13-5} = 3$$

$$\Rightarrow \log_a^8 = 3 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow ab = 2 \times 2 = 4$$

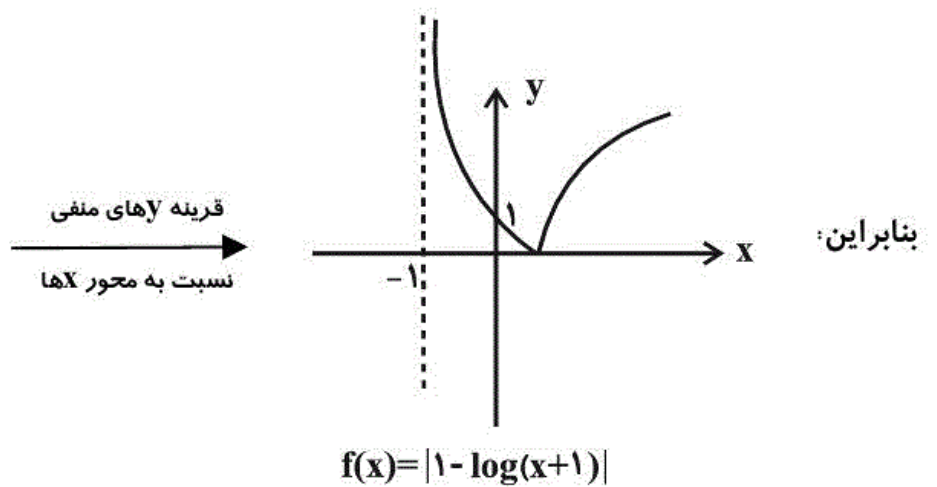
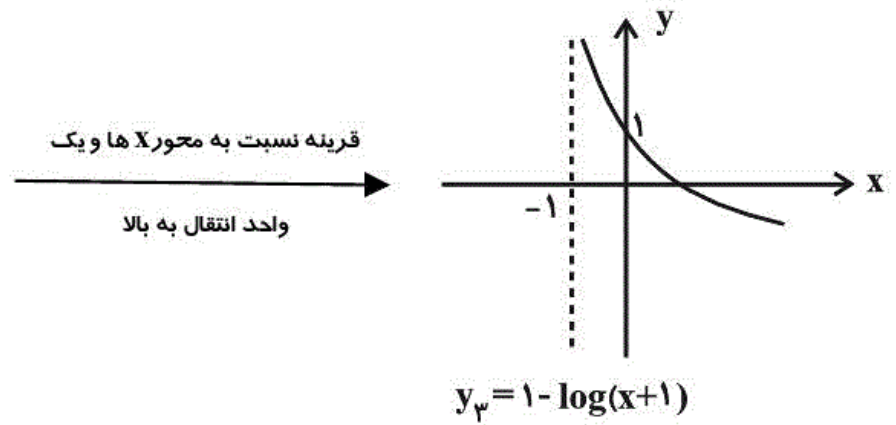
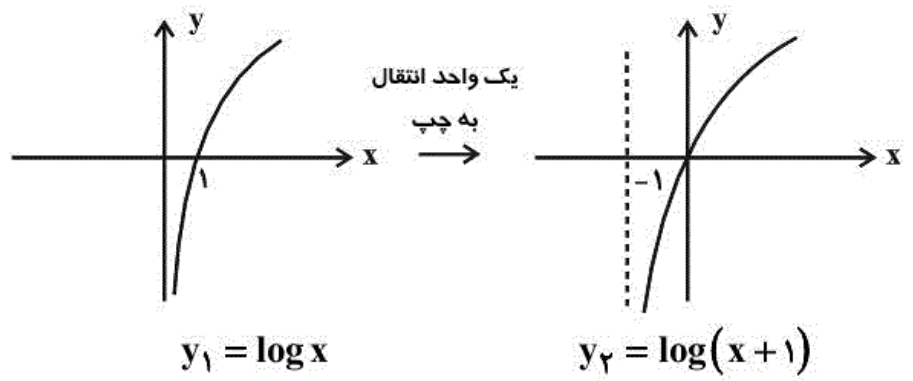
(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۱۰ تا ۱۵)

۴

۳

۲ ✓

۱



(مسابقه ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه های ۱۰ تا ۱۵)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$\log(2^x + 8) = \log 2 + x \log 2 \Rightarrow \log(2^x + 8) = \log 2 + \log 2^x$$

$$\Rightarrow \log(2^x + 8) = \log 2^{x+1} \Rightarrow 2^x + 8 = 2^{x+1}$$

$$\Rightarrow 8 = 2^{x+1} - 2^x = 2^x \Rightarrow x = 3$$

$$\Rightarrow \frac{\log_3 2 + 3}{\log_3 2 + 1} = \frac{1+3}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۱۶ تا ۹۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

از ویژگی  $\log_b a^n = n \log_b a$  استفاده می‌کنیم:

$$\log_3^{(2x+1)} + \log_3^{(2x+1)^2} + \log_3^{(2x+1)^3} = \frac{11}{3}$$

$$\Rightarrow \log_3^{(2x+1)} + \frac{1}{2} \log_3^{(2x+1)} + \frac{1}{3} \log_3^{(2x+1)} = \frac{11}{3}$$

$$\Rightarrow (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \log_3^{(2x+1)} = \frac{11}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{11}{6} \log_3^{(2x+1)} = \frac{11}{3} \Rightarrow \log_3^{(2x+1)} = \frac{\frac{11}{3}}{\frac{11}{6}} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\Rightarrow \log_3^{(2x+1)} = 2 \Rightarrow 2x+1 = 3^2 = 9$$

$$\Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{2} = 4$$

$$\log_4^{\sqrt[3]{x^2}} \xrightarrow{x=4} \log_4^{\sqrt[3]{4^2}} = \log_4^{4^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3}$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۱۶ تا ۹۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

از طرفین تساوی، لگاریتم در پایه ی ۲ می گیریم:

$$16x^3 = x^{\log_2^x} \Rightarrow \log_2 16x^3 = \log_2 x^{\log_2^x}$$

$$\Rightarrow \log_2 2^4 + \log_2 x^3 = (\log_2 x)(\log_2 x)$$

$$\Rightarrow 4 \log_2 2 + 3 \log_2 x = (\log_2 x)(\log_2 x)$$

$$\Rightarrow (\log_2 x)(\log_2 x) - 3 \log_2 x - 4 = 0$$

حال قرار می دهیم  $a = \log_2^x$ ، بنابراین داریم:  $a^2 - 3a - 4 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \Rightarrow \log_2 x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ a = 4 \Rightarrow \log_2 x = 4 \Rightarrow x = 16 \end{cases}$$

$$\text{حاصلضرب ریشه ها} = \frac{1}{2} \times 16 = 8$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه های ۱۶ تا ۹۰)

۴

۳

۲✓

۱

عبارت جلوی  $\log$  را به صورت مربع کامل می نویسیم:

$$\log_{4\sqrt{2}}(x^2 - 4x + 6) = \log_{4\sqrt{2}}((x-2)^2 + 2) \xrightarrow{x=2+\sqrt{2}} \log_{4\sqrt{2}}((2+\sqrt{2}-2)^2 + 2)$$

$$= \log_{4\sqrt{2}}(2+2) = \log_{4\sqrt{2}}^4 = \log_{2^2 \times 2^2}^{2^2} = \log_{2^2}^{\frac{2^2}{2^2}}$$

$$= 2 \times \frac{2}{5} \log_2^2 = \frac{4}{5}$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه های ۱۶ تا ۹۰)

۴

۳

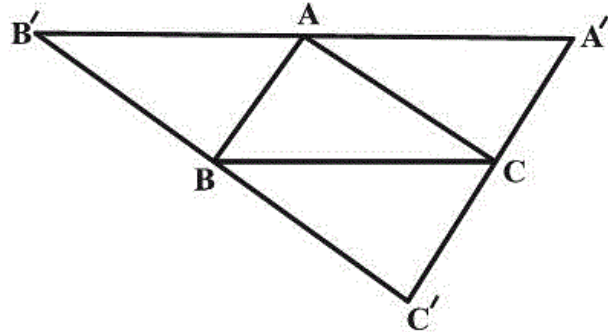
۲✓

۱

۱۰۱-

(امیر حسین ابرومفیوب)

می‌دانیم انتقال تبدیلی طولی است و همچنین شیب خط‌ها را ثابت نگه می‌دارد، بنابراین هر یک از چهار ضلعی‌ها  $AA'CB$  و  $ACBB'$  یک متوازی الاضلاع هستند و در نتیجه  $AA' = AB' = BC$  است، پس  $A'B' = 2BC$ . به طریق مشابه می‌توان نشان داد سایر اضلاع مثلث  $A'B'C'$ ، دو برابر اضلاع مقابل خود در مثلث  $ABC$  هستند، یعنی  $A'C' = 2AB$  و  $B'C' = 2AC$  است. بنابراین دو مثلث  $A'B'C'$  و  $ABC$  متشابه هستند و نسبت مساحت مثلث  $A'B'C'$  به مساحت مثلث  $ABC$ ، مجذور نسبت تشابه یعنی برابر ۴ است.



(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها - صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

۴

۳ ✓

۲

۱

۱۰۲-

(پواد ترکمن)

ترکیب دو بازتاب با محورهای غیرموازی معادل تبدیل دوران است. در این حالت مرکز دوران محل برخورد دو محور و زاویه دوران دو برابر زاویه بین محورها است. در اینجا زاویه بین دو خط ۹۰ درجه است، پس ترکیب این دو بازتاب معادل دوران ۱۸۰ درجه می‌باشد. دوران همواره جهت اشکال را حفظ می‌کند ولی شیب خطوط را تنها در حالتی که زاویه دوران مضرب صحیح ۱۸۰ درجه باشد، حفظ می‌کند. پس این تبدیل شیب خطوط و جهت اشکال را حفظ می‌کند.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها - صفحه‌های ۴۲ تا ۴۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

۱۰۳-

(امیر حسین ابومصوب)

می‌دانیم در یک تجانس به نسبت  $k$ ، طول پاره‌خط‌ها  $|k|$  برابر و اندازه مساحت‌ها  $k^2$  برابر می‌شود. طول هر ضلع مربع به طول قطر  $\sqrt{2}$ ، برابر

یک است، بنابراین در این تجانس  $|k| = \frac{1}{2\sqrt{2}}$  است. اگر  $S$  و  $S'$

به ترتیب مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۴ و مساحت مثلث

تبدیل یافته تحت این تجانس باشند، داریم:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3}$$

$$\frac{S'}{S} = k^2 \Rightarrow \frac{S'}{4\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow S' = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی، و کاربردها - صفحه‌های ۴۵ تا ۵۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

۱۰۴-

(امسان غیرالهی)

دو مثلث  $OAB$  و  $OA'B'$  با نسبت  $k = 4$  متشابه‌اند و داریم:

$$A'B' = 4AB$$

در متوازی‌الاضلاع  $ABCA'$  داریم  $A'C = AB$ ، پس:  $B'C = 3AB$

مثلث  $BCB'$  و متوازی‌الاضلاع  $ABCA'$  ارتفاع برابر دارند و نسبت مساحت‌هایشان برابر می‌شود با:

$$\frac{S_{ABCA'}}{S_{BCB'}} = \frac{A'C \times h}{\frac{1}{2} B'C \times h} = \frac{2A'C}{B'C} = \frac{2AB}{3AB} = \frac{2}{3}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها - صفحه‌های ۴۵ تا ۵۰)

۴ ✓

۳

۲

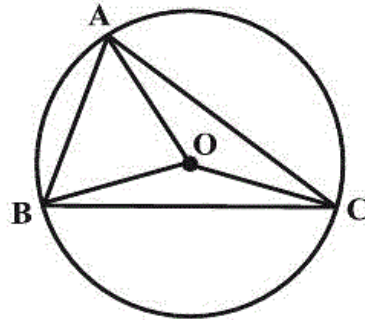
۱



مطابق شکل  $\hat{C} = 180^\circ - (65^\circ + 70^\circ) = 45^\circ$  است. با استفاده از

قضیه سینوس‌ها، اندازه شعاع دایره محیطی مثلث را به دست می‌آوریم:

$$\frac{AB}{\sin \hat{C}} = 2R \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = 2R \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R \Rightarrow R = 1$$



از طرفی می‌دانیم نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌های هر مثلث، مرکز دایره محیطی آن مثلث است، پس هدف مسئله به دست آوردن سه برابر شعاع

دایره است. داریم:

$$OA + OB + OC = 3R = 3$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث - صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵)

۴

۳✓

۲

۱

با توجه به رابطه سینوس‌ها در مثلث داریم:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{\sin^2 \hat{A}}{\sin^2 \hat{B}}$$

$$\frac{\sin^2 \hat{A}}{\sin^2 \hat{B}} = \frac{\tan \hat{A}}{\tan \hat{B}} \Rightarrow \frac{\sin^2 \hat{A}}{\sin^2 \hat{B}} = \frac{\frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}}{\frac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{B}}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{B}} = \frac{\cos \hat{B}}{\cos \hat{A}} \Rightarrow \sin \hat{A} \times \cos \hat{A} = \sin \hat{B} \times \cos \hat{B}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\hat{A})}{2} = \frac{\sin(\hat{B})}{2} \Rightarrow \sin(\hat{A}) = \sin(\hat{B})$$

سینوس دو زاویه با هم برابر شده است. این دو زاویه یا با هم برابرند یا مکمل یکدیگرند، پس:

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{B} \\ \text{یا} \\ \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = 90^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ \end{cases}$$

پس مثلث ABC یا متساوی‌الساقین است و یا این‌که در رأس C

قائم‌الزاویه ( $\hat{C} = 90^\circ$ ) می‌باشد.

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث - صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵)

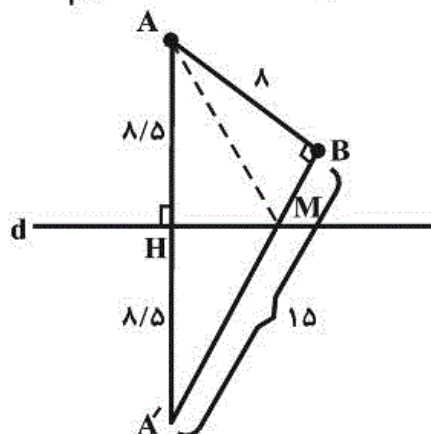
۴

۳

۲✓

۱

اگر  $A'$  بازتاب  $A$  نسبت به خط  $d$  باشد، آنگاه  $MA = MA'$  و در نتیجه طبق مسئله هرون،  $MA + MB = A'B$  است. در مثلث  $AA'B$  داریم:



$$17^2 = 15^2 + 8^2 \Rightarrow AA'^2 = A'B^2 + AB^2 \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ$$

حال اگر  $MA = x$  باشد، آنگاه  $MB = 15 - x$  و در نتیجه طبق قضیه فیثاغورس در مثلث  $AMB$  داریم:

$$MA^2 = MB^2 + AB^2 \Rightarrow x^2 = (15 - x)^2 + 64$$

$$\Rightarrow x^2 = 225 - 30x + x^2 + 64 \Rightarrow 30x = 289 \Rightarrow x = \frac{289}{30}$$

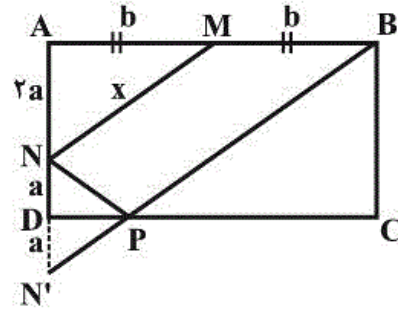
(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها - صفحه ۵۴)

۴

۳

۲✓

۱



بازتاب N نسبت به DC را  $N'$  می‌نامیم. از  $N'$  به B وصل می‌کنیم، محل تلاقی آن با DC را P می‌نامیم.  $MNPB$  کوتاه‌ترین مسیر ممکن است. حال داریم:

$$MN + \underbrace{NP + PB}_{N'B} = 6 \Rightarrow N'B = 6 - MN$$

$$\Delta AN'B : AN'^2 + AB^2 = BN'^2$$

$$\Rightarrow (4a)^2 + (2b)^2 = BN'^2 \Rightarrow \underbrace{4(a^2 + b^2)}_{MN^2} = (6 - MN)^2$$

$$\xrightarrow{MN=x} 4x^2 = 36 - 12x + x^2 \Rightarrow (x+6)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -6 & \text{غ.ق.ق} \\ x = 2 \end{cases}$$

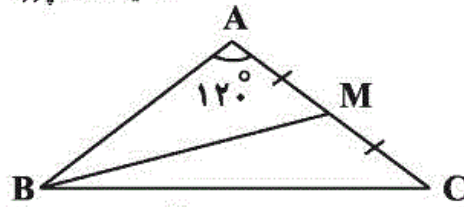
(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۵۳ تا ۵۵)

۴ ✓

۳

۲

۱



$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

طبق قضیه سینوس‌ها، داریم:

$$\frac{a}{\sin 12^\circ} = 2\sqrt{12} \Rightarrow a = 6$$

بنابراین:

$$\frac{b}{\sin 3^\circ} = 2\sqrt{12} \Rightarrow b = \sqrt{12} \Rightarrow c = \sqrt{12}$$

حال با توجه به قضیه میانه‌ها که از رابطه کسینوس‌ها به دست می‌آید،

$$2BM^2 = a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2} \Rightarrow 2BM^2 = 36 + 12 - 6$$

نتیجه می‌شود:

$$\Rightarrow BM^2 = 21 \Rightarrow BM = \sqrt{21}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۹)

۴

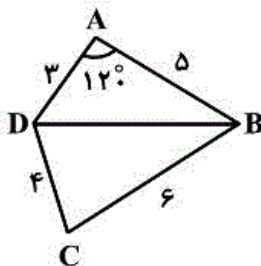
۳✓

۲

۱

در چهار ضلعی محیطی ABCD داریم:

$$AB + CD = AD + BC \Rightarrow 5 + x = 3 + 6 \Rightarrow x = 4$$



طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABD داریم:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD \times \cos \hat{A}$$

$$= 25 + 9 - 2 \times 5 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow BD^2 = 49$$

حال طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث BCD داریم:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \times CD \times \cos \hat{C}$$

$$\Rightarrow 49 = 36 + 16 - 2 \times 6 \times 4 \times \cos \hat{C}$$

$$\Rightarrow 48 \cos \hat{C} = 3 \Rightarrow \cos \hat{C} = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}$$

(هندسه ۲ - روابط طولی در مثلث - صفحه‌های ۶۶ تا ۶۹)

۴

۳

۲✓

۱

مجموع زوایا در نمودار دایره‌ای برابر  $360^\circ$  است، بنابراین داریم:

$$60^\circ + 60^\circ + 120^\circ + 75^\circ + x = 360^\circ \Rightarrow x = 45^\circ$$

اگر تعداد کارمندان دارای مدرک دکترا در این شرکت را با  $n$  نمایش دهیم، آن گاه داریم:

$$45^\circ = \frac{n}{600} \times 360^\circ \Rightarrow \frac{n}{600} = \frac{45^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{8} \Rightarrow n = \frac{600}{8} = 75$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۷۴ تا ۸۲)

۴

۳

۲

۱✓

میانگین نمرات دانش‌آموزان این کلاس برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{1 \times 7 + 2 \times 10 + 2 \times 11 + 1 \times 13 + 3 \times 14 + 4 \times 17 + 2 \times 19}{1 + 2 + 2 + 1 + 3 + 4 + 2}$$

$$= \frac{210}{15} = 14$$

با توجه به اینکه تعداد داده‌ها برابر ۱۵ است، پس داده هشتم میانه داده‌هاست که مطابق جدول این داده برابر ۱۴ است (اگر داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم، داده‌های هفتم، هشتم و نهم برابر ۱۴ هستند.) در نتیجه داریم:

$$\bar{x} - Q_2 = 14 - 14 = 0$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۸۴ تا ۸۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

(امیرحسین ابومحبوب)

$$P(B) = 0/4 \Rightarrow P(B') = 1 - 0/4 = 0/6$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= (P(A) - P(A \cap B)) + P(B)$$

$$= P(A - B) + P(B) = 0/2 + 0/4 = 0/6$$

$$P(A' \cap B') = P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 0/4$$

$$P(A' | B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = \frac{0/4}{0/6} = \frac{2}{3}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۵۲ تا ۵۶)

۴ ✓

۳

۲

۱



فرض کنید پیشامدهای A و B به ترتیب به صورت «بازیکن اول بلندتر از بازیکن دوم باشد.» و «بازیکن اول بلندقدترین بازیکن تیم باشد.» تعریف شوند. در این صورت داریم:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

تذکر:  $P(A) = \frac{1}{4}$  است، چون بین دو بازیکن اول و دوم، احتمال بلندقدتر بودن یک بازیکن برابر دیگری است. همچنین پیشامد B، زیرمجموعه پیشامد A است، بنابراین  $A \cap B = B$  است.

(آمار و احتمال - احتمال - مشابه مثال صفحه ۵۵)

۴

۳

۲✓

۱

اگر پیشامد A را مشکی بودن روی مشاهده شده کارت و پیشامدهای B، C و D را به ترتیب انتخاب کارت دو رو سفید، انتخاب کارت دو رو مشکی و انتخاب کارت یک رو مشکی و یک رو سفید در نظر بگیریم، آنگاه طبق قانون احتمال کل و قانون بیز داریم:

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(C)P(A|C) + P(D)P(A|D)$$

$$= \frac{3}{11} \times 0 + \frac{4}{11} \times 1 + \frac{4}{11} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{11} \times \frac{3}{2}$$

$$P(C|A) = \frac{P(C)P(A|C)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{11} \times 1}{\frac{4}{11} \times \frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

(آمار و احتمال - احتمال - مشابه مثال صفحه ۶۲)

۴✓

۳

۲

۱

اگر پیشامد خارج شدن حداقل یک مهره سیاه را  $A$  بنامیم، آنگاه می‌توان به یکی از دو روش زیر،  $P(A)$  را محاسبه کرد:  
روش اول:

$$P(A) = \frac{\text{دومی سیاه}}{10} \times \frac{\text{اولی سبز}}{9} + \frac{\text{دومی سبز}}{9} \times \frac{\text{اولی سیاه}}{9} + \frac{\text{دومی سیاه}}{9} \times \frac{\text{اولی سبز}}{9}$$

$$= 0/16 + 0/24 + 0/24 = 0/64$$

روش دوم: متمم پیشامد  $A$  آن است که هر دو مهره خارج شده از کیسه، سبز باشند. در این صورت داریم:

$$P(A') = \frac{\text{دومی سبز}}{10} \times \frac{\text{اولی سبز}}{9} = 0/36 \Rightarrow P(A) = 1 - 0/36 = 0/64$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۶۹ تا ۷۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

فضای نمونه پرتاب یک تاس به صورت  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  است. اگر پیشامد ظاهر شدن یک عدد زوج را  $A$  بنامیم، داریم:

$$A = \{2, 4, 6\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

حال مستقل یا وابسته بودن هر یک از پیشامدهای داده شده را نسبت به پیشامد  $A$  بررسی می‌کنیم:

$$B = \{2, 3, 5\} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad (\text{ظاهر شدن یک عدد اول})$$

$$A \cap B = \{2\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6} \neq P(A) \times P(B) \Rightarrow$$

پیشامدهای  $A$  و  $B$  وابسته‌اند.

$$C = \{1, 4\} \Rightarrow P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad (\text{ظاهر شدن یک عدد مربع کامل})$$

$$A \cap C = \{4\} \Rightarrow P(A \cap C) = \frac{1}{6} = P(A) \times P(C) \Rightarrow$$

پیشامدهای  $A$  و  $C$  مستقل از یکدیگرند.

$$D = \{1, 2, 3, 6\} \Rightarrow P(D) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad (\text{ظاهر شدن یکی از شمارنده‌های عدد ۶})$$

$$A \cap D = \{2, 6\} \Rightarrow P(A \cap D) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = P(A) \times P(D) \Rightarrow$$

پیشامدهای  $A$  و  $D$  مستقل از یکدیگرند.

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۶۷ تا ۶۹)

۴

۳✓

۲

۱

$$\sigma^2 = 6 = \frac{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2}{20} \Rightarrow \sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 = 120$$

$$\sigma^2 = 4 = \frac{\sum_{i=1}^{20+n} (x_i - \bar{x})^2}{20+n} \Rightarrow \frac{120}{20+n} = 4 \Rightarrow n = 10$$

دقت کنید که برای داده‌های مساوی با میانگین،  $x_i - \bar{x} = 0$  است و حاصل  $\sum (x_i - \bar{x})^2$  تغییری نمی‌کند.

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۹۳ تا ۹۵)

۴✓

۳

۲

۱

-۱۱۹

(معصومه گرائی)

ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم: ۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۲۳, ۲۷

 $a =$  کوچک‌ترین داده  $= ۱۰$  و  $e =$  بزرگ‌ترین داده  $= ۲۷$ 

چون تعداد داده‌ها فرد است، میانه برابر داده‌ای است که در وسط قرار

دارد، پس  $c = ۱۵$  است و در نتیجه داریم: میانه نیمه اول داده‌ها برابر ۱۲و میانه نیمه دوم داده‌ها برابر ۲۳ است پس  $b = ۱۲$  و  $d = ۲۳$ .

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{۱۰+۱۵}{۱۲+۲۳} = \frac{۲۵}{۳۵}$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

-۱۲۰

(فرشاد فرامرزی)

ضریب تغییرات سن فعلی دانش‌آموزان این کلاس را  $CV_1$  و ضریبتغییرات سن ۳ سال بعد آنها را  $CV_2$  می‌نامیم. داریم:

$$\frac{CV_2}{CV_1} = \frac{۸۰}{۱۰۰} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \frac{\frac{\sigma_2}{\bar{x}_2}}{\frac{\sigma_1}{\bar{x}_1}} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \times \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} = \frac{۴}{۵}$$

اضافه شدن ۳ واحد به هر یک از داده‌ها، تأثیری روی انحراف معیار ندارد

ولی ۳ واحد به میانگین داده‌ها اضافه می‌کند، بنابراین داریم:

$$\frac{\sigma_1 = \sigma_2}{\bar{x}_2 = \bar{x}_1 + 3} \rightarrow \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_1 + 3} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow ۵\bar{x}_1 = ۴\bar{x}_1 + ۱۲ \Rightarrow \bar{x}_1 = ۱۲$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۹۶ و ۹۷)

۴

۳ ✓

۲

۱