



سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

درسنامه ها و جزوه های ریاضی  
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور  
نمونه سوالات امتحانات ریاضی  
نرم افزارهای ریاضیات

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

ریاضی عمومی ، کاربرد مشتق - ۶ سوال -

۸۱- مجموع طول نقاط بحرانی تابع  $f(x) = 3x^3 - x$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{9}$  (۴) صفر

۸۲- اختلاف بین بیشترین و کمترین مقدار تابع  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2x^2 + 1$  در بازه  $[-1, 2]$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{5}{25}$  (۲)  $\frac{6}{75}$  (۳)  $\frac{5}{75}$  (۴)  $\frac{6}{25}$

۸۳- اگر  $x = -1$  طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع  $f(x) = \frac{5}{3}x^3 + 4ax^2 + 3a^2x$  باشد، مجموعهٔ مقادیر  $a$  کدام است؟

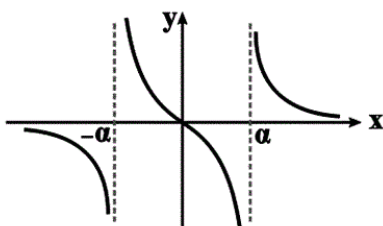
- (۱)  $\{1\}$  (۲)  $\{\frac{5}{3}\}$   
(۳)  $\{\frac{5}{3}, 1\}$  (۴)  $\{\frac{5}{3}, -1\}$

۸۴- در تابع با ضابطهٔ  $f(x) = (x^2 - 4x)e^{-2x}$ ، مجموع طول نقاط عطف کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۱۰

۸۵- اگر نمودار تابع  $f(x) = \frac{x-1}{x^2 - 4x + m}$  فقط دارای یک مجانب قائم باشد،  $m$  چند مقدار مختلف می تواند داشته باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

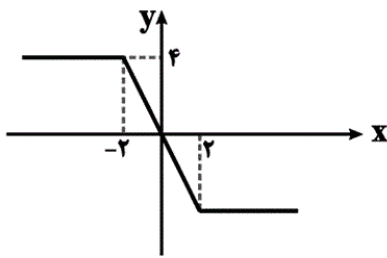


۸۶- اگر نمودار تابع  $y = \frac{ax}{x^2 - bx + c}$  به صورت زیر باشد، مقادیر  $a$ ،  $b$  و  $c$  چگونه است؟

- (۱)  $c > 0, a < 0, b = 1$   
(۲)  $c > 0, a < 0, b = 0$   
(۳)  $c < 0, a > 0, b = 1$   
(۴)  $c < 0, a > 0, b = 0$

ریاضی عمومی ، انتگرال - ۱ سوال -

۹۴- اگر نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت زیر باشد، حاصل  $\int_{-2}^5 |f(x)| dx$  کدام است؟



۱۲ (۱)

۲۰ (۲)

۱۶ (۳)

۸ (۴)

ریاضی عمومی، هندسه مختصاتی و منحنی های درجه دوم - ۱۳ سوال

۹۵- اگر  $f(x) = \begin{cases} 3 & ; -1 < x < 0 \\ \frac{x+1}{2} & ; 0 \leq x < 3 \end{cases}$ ، آن گاه حاصل  $\int_{-1}^3 f(x) dx$  کدام است؟

۶/۷۵ (۴)

۶/۲۵ (۳)

۵/۵ (۲)

۵ (۱)

۹۶- حاصل  $\int_{-2}^2 (\sqrt{4-x^2} + |x|) dx$  کدام است؟

۲π (۴)

π+۴ (۳)

۲(π+۲) (۲)

۴(π+۱) (۱)

۹۷- اگر  $F(x) = \int_1^x (t \cdot \log t) dt$ ، آن گاه  $F'(10)$  کدام است؟

۱ (۴)

۰/۱ (۳)

۱۰ (۲)

صفر (۱)

۹۸- اگر  $\int f(x) dx = x^2 + 2x + C$  و نمودار تابع  $f$  محورهای مختصات را با طول  $x$  و عرض  $y$  قطع کند، آن گاه مقدار

$x_0 + y_0$  کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۹۹- اگر  $\int \frac{x^2 + 6x}{(x+3)^2} dx = \frac{x^2 + f(x)}{x+3} + C$ ، آن گاه  $f(x)$  کدام است؟

$x - 9$  (۴)

$3x - 9$  (۳)

$3x + 9$  (۲)

$x + 9$  (۱)

۱۰۰- اگر  $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x+1}} dx = \frac{3\sqrt[3]{x}}{4} g(x) + C$  ، آن گاه  $g(x)$  کدام است؟

(۱)  $x - \frac{4}{3}\sqrt[3]{x^2}$  (۲)  $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - x$

(۳)  $x^2 - 3\sqrt[3]{x}$  (۴)  $x + 4\sqrt[3]{x}$

۸۷- اگر مبدأ مختصات و نقطه  $(\sqrt{2}, -\sqrt{6})$  دو سر یکی از قطرهای یک مربع باشند، عرض از مبدأ خطی که از دو رأس دیگر این مربع می‌گذرد، کدام است؟

(۱)  $2\sqrt{2}$  (۲)  $-2\sqrt{2}$  (۳)  $3\sqrt{2}$  (۴)  $-3\sqrt{2}$

۸۸- دستگاه  $\begin{cases} \frac{x}{2} = y - 1 = \frac{z - 2}{3} \\ x + y - 2z = 3 \end{cases}$  چند دسته جواب دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی‌شمار

۸۹- اگر  $a < k < b$  ، آن گاه خط به معادله  $x + 2y = k$  و دایره به معادله  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$  دو نقطه مشترک دارند. بیشترین مقدار  $b - a$  کدام است؟

(۱) ۸ (۲)  $6\sqrt{5}$

(۳) ۴ (۴)  $3\sqrt{5}$

۹۰- دایره‌ای به شعاع ۴ که مرکز آن در ربع اول واقع است، بر محور  $y$ ها و نیمساز ربع دوم و چهارم مماس است. مجموع طول و عرض مرکز این دایره کدام است؟

(۱)  $4\sqrt{2}$  (۲) ۴ (۳) ۸ (۴)  $2\sqrt{2}$

۹۱- اگر نقاط  $(\sqrt{2} + 2, 1)$  و  $(\sqrt{2} - 2, 1)$  کانون‌های یک بیضی و  $(\sqrt{2}, 3)$  یکی از رأس‌های آن باشد، طول قطر بزرگ این بیضی کدام است؟

(۱)  $8\sqrt{2}$  (۲)  $6\sqrt{3}$

(۳)  $4\sqrt{2}$  (۴)  $4\sqrt{3}$

۹۲- در یک بیضی، طول قطر کوچک واسطه هندسی بین فاصله کانونی و طول قطر بزرگ است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (۱)$$

۹۳- از کانون‌های هذلولی  $\frac{x^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$  عمودهایی بر محور کانونی رسم می‌کنیم تا هذلولی را در چهار نقطه قطع کنند.

مساحت شکلی که این چهار نقطه رأس‌های آن هستند، کدام است؟

$$۴۵ \quad (۴)$$

$$۴۸ \quad (۳)$$

$$۶۰ \quad (۲)$$

$$۹۰ \quad (۱)$$

۸۱- گزینه «۴»

(مهری ملارمضانی)

$$f(x) = 3x^3 - x \Rightarrow f'(x) = 9x^2 - 1$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$$

(کاربردهای مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه ۱۴)

۴

۳

۲

۱

۸۲- گزینه «۲»

(رضا آژاد)

$$f'(x) = x^3 + 3x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 3x - 4) = 0$$

$$x = 0, x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -4 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = \frac{1}{4} + 1 - 2 + 1 = \frac{1}{4}$$

$$f(-1) = \frac{1}{4} - 1 - 2 + 1 = -\frac{7}{4} \Rightarrow \text{کمترین مقدار}$$

$$f(2) = 4 + 8 - 8 + 1 = 5 \Rightarrow \text{بیشترین مقدار}$$

$$\text{مقدار بیشترین و کمترین مقدار} = 5 - \left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$$

(کاربردهای مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶)

۴

۳

۲

۱

چون  $f$  در نقطه  $x = -1$  مشتق پذیر است. پس  $f'(-1) = 0$ .

$$f'(x) = 5x^2 + 8ax + 3a^2 \Rightarrow f'(-1) = 3a^2 - 8a + 5 = 0$$

$$\Rightarrow a = 1, a = \frac{5}{3}$$

اگر  $a = 1$ ، آن گاه جدول تعیین علامت  $f'(x)$  به صورت زیر است.

$$f'(x) = 5x^2 + 8x + 3$$

$x$	$-1$	$-\frac{3}{5}$
$f'(x)$	+   -	-   +

اگر  $a = \frac{5}{3}$ ، آن گاه جدول تعیین علامت  $f'(x)$  به صورت زیر است.

$$f'(x) = 5x^2 + \frac{40}{3}x + \frac{25}{3} = \frac{5}{3}(3x^2 + 8x + 5)$$

$x$	$-\frac{5}{3}$	$-1$
$f'(x)$	+   -	-   +

در حالت  $a = 1$  تابع  $f$  در  $x = -1$  ماکزیمم نسبی دارد و در حالت  $a = \frac{5}{3}$

تابع  $f$  در  $x = -1$  می نیمم نسبی دارد.

(کاربردهای مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه های ۱۷ و ۱۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

(وفید رافتی)

$$f'(x) = (2x - 4)e^{-2x} + (-2e^{-2x})(x^2 - 4x)$$

$$= e^{-2x}(2x - 4 - 2x^2 + 8x)$$

$$f'(x) = e^{-2x}(-2x^2 + 10x - 4)$$

$$f''(x) = (-2e^{-2x})(-2x^2 + 10x - 4) + e^{-2x}(-4x + 10)$$

$$= e^{-2x}(4x^2 - 20x + 8 - 4x + 10)$$

$$f''(x) = \underbrace{e^{-2x}}_{\text{فاقد ریشه}} \underbrace{(4x^2 - 24x + 18)}_{\Delta > 0} = 0$$

مجموع طول نقاط عطف تابع  $f$ ، برابر با مجموع ریشه‌های معادله درجه دوم

$$4x^2 - 24x + 18 = 0 \text{ است، یعنی:}$$

$$-\frac{b}{a} = \frac{24}{4} = 6$$

(کاربردهای مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۹۰ تا ۹۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

(علی پرنیان)

دو حالت امکان پذیر است:

حالت اول:  $x = 1$  ریشه مخرج هم باشد که در این صورت:

$$1^2 - 4(1) + m = 0 \Rightarrow m = 3$$

حالت دوم: مخرج ریشه مضاعف داشته باشد که در این صورت:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4(1)(m) = 0 \Rightarrow m = 4$$

(کاربردهای مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۹۵ تا ۹۸)

۴

۳ ✓

۲

۱



## ۸۶- گزینه «۴»

(علی پریان)

ریشه‌های  $x = -\alpha$  و  $x = \alpha$  ریشه‌های مخرج کسر هستند؛ یعنی مخرج کسر دو ریشه قرینه دارد، پس:

$$x^2 - bx + c = 0 \xrightarrow{\text{دو ریشه قرینه}} \begin{cases} b = 0 \\ c < 0 \end{cases}$$

با توجه به گزینه‌ها فقط گزینه «۴»  $b = 0$  و  $c < 0$  است و نیازی به بررسی  $a$  نیست.

(کاربردهای مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۹۵ تا ۹۸)

۴

۳

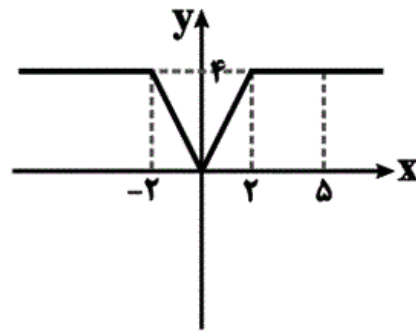
۲

۱

## ۹۴- گزینه «۲»

(امیرحسین تقی‌زاده)

ابتدا نمودار  $y = |f(x)|$  را رسم می‌کنیم:



$$\int_{-2}^5 |f(x)| dx = \frac{2 \times 4}{2} + \frac{2 \times 4}{2} + 3 \times 4 = 4 + 4 + 12 = 20$$

(انتگرال) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۵۳ تا ۱۵۸)

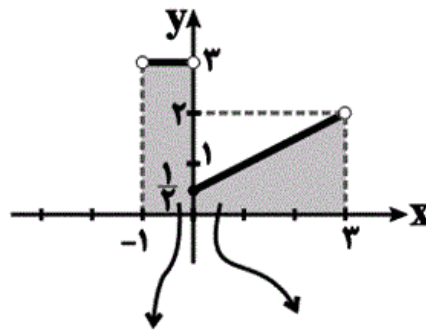
۴

۳

۲

۱

با رسم نمودار تابع  $f$ ، داریم:



$$S_1 = 1 \times 3 = 3 \quad S_2 = \frac{(\frac{1}{2} + 2) \times 3}{2} = \frac{15}{4} = 3.75$$

$$\int_{-1}^3 f(x) dx = S_1 + S_2 = 3 + 3.75 = 6.75$$

(هندسه مقدماتی و منحنی‌های درجه دوم) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۵۳ تا ۱۵۸)

۴

۳

۲

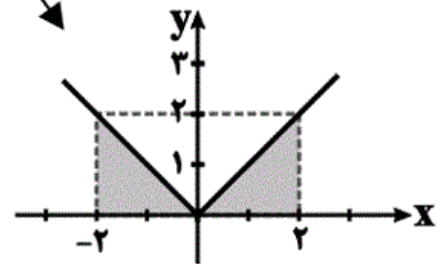
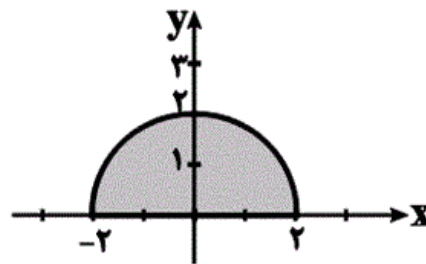
۱

حاصل انتگرال موردنظر برابر است با:

$$\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx + \int_{-2}^2 |x| dx = \frac{\pi(2^2)}{2} + \frac{(2 \times 2)}{2} + \frac{(2 \times 2)}{2}$$

$$= 2\pi + 4 = 2(\pi + 2)$$

$\Downarrow$   
 نیم‌دایره‌ای به شعاع ۲ و مرکز (۰,۰)



(هندسه مقدماتی و منحنی‌های درجه دوم) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۵۱ تا ۱۵۸)

۴

۳

۲

۱

$$F(x) = \int_1^x t \cdot \log t dt \Rightarrow F'(x) = x \cdot \log x$$

$$\Rightarrow F'(1) = 1 \cdot \log 1 = 0$$

(هندسه مفصلاتی و منحنی‌های درجه دوم) (ریاضی عمومی، صفحه ۱۶۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\int f(x) dx = x^2 + 2x + C \Rightarrow f(x) = (x^2 + 2x + C)' = 2x + 2$$

$$\int y_0 = f(0) = 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x_0) = 0 \Rightarrow 2x_0 + 2 = 0 \Rightarrow x_0 = -1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow x_0 + y_0 = -1 + 2 = 1$$

(هندسه مفصلاتی و منحنی‌های درجه دوم) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۶۷ تا ۱۷۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\int \frac{x^2 + 6x + 9 - 9}{x^2 + 6x + 9} dx = \int \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 6x + 9} dx - \int \frac{9}{x^2 + 6x + 9} dx$$

$$= \int (1) dx - \int 9(x+3)^{-2} dx = x - \frac{9(x+3)^{-1}}{-1} + C = x + \frac{9}{x+3} + C$$

$$= \frac{x^2 + 3x + 9}{x+3} + C \Rightarrow f(x) = 3x + 9$$

(هندسه مفصلاتی و منحنی‌های درجه دوم) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۶۷ تا ۱۷۱)

۴

۳

۲ ✓

۱

می‌دانیم:

$$x-1 = (\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)$$

بنابراین داریم:

$$\int \frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} dx = \int (\sqrt[3]{x}-1) dx$$

$$= \int (x^{\frac{1}{3}} - 1) dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - x + C$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - x + C = \frac{3\sqrt[3]{x}}{4} g(x) + C$$

$$\Rightarrow g(x) = x - \frac{4}{3} \sqrt[3]{x^2}$$

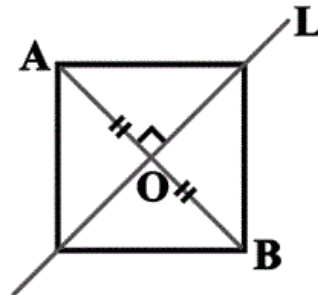
(هندسه مفصلاتی و منحنی‌های درجه دوم) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۶۷ تا ۱۷۱)

۴

۳

۲

۱ ✓



$$A(0,0), B(-\sqrt{6}, \sqrt{2}) \Rightarrow O\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$m_{AB} = \frac{0 - \sqrt{2}}{0 + \sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow m_L = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow L: y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}\left(x + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \xrightarrow{x=0} y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

(هندسه مفصلاتی و منحنی‌های درجه دوم) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۰۸ تا ۱۱۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\frac{x}{2} = y - 1 = \frac{z - 2}{3} = t \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t + 1 \\ z = 3t + 2 \end{cases} \xrightarrow{x + y - 2z = 3}$$

$$(2t) + (t + 1) - 6t - 4 = 3 \Rightarrow -3t - 3 = 3$$

$$\Rightarrow -3t = 6 \Rightarrow t = -2$$

پس دستگاه یک دسته جواب دارد.  $(x = -4, y = -1, z = -4)$ .

(هندسه مقدماتی و منحنی‌های درجه دوم) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

مرکز دایره  $(2, 1)$  است و شعاع آن ۳. پس فاصله مرکز دایره از خط  $x + 2y = k$  باید کمتر از ۳ باشد.

$$d = \frac{|2 + 2 - k|}{\sqrt{5}} < 3$$

$$\Rightarrow \frac{|k - 4|}{\sqrt{5}} < 3 \Rightarrow |k - 4| < 3\sqrt{5}$$

$$-3\sqrt{5} < k - 4 < 3\sqrt{5} \Rightarrow 4 - 3\sqrt{5} < k < 4 + 3\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \max(b - a) = (4 + 3\sqrt{5}) - (4 - 3\sqrt{5}) = 6\sqrt{5}$$

(هندسه مقدماتی و منحنی‌های درجه دوم) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۲۱ تا ۱۲۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

بنابراین طول مرکز آن برابر با شعاع دایره است یعنی  $O \left| \beta \right|$  مرکز آن است. فاصله  $O$  از خط  $y + x = 0$  برابر با شعاع دایره است (چون دایره بر این خط مماس است)، پس:

$$\frac{|4 + \beta|}{\sqrt{2}} = 4 \Rightarrow \begin{cases} \beta = 4\sqrt{2} - 4 \\ \beta = -4\sqrt{2} - 4 < 0 \end{cases} \text{ غ ق ق} \Rightarrow O \left| \begin{matrix} 4 \\ 4\sqrt{2} - 4 \end{matrix} \right|$$

$$\Rightarrow x_0 + y_0 = 4\sqrt{2}$$

(هندسه مقدماتی و منحنی‌های درجه دوم) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۲۱ تا ۱۲۵)

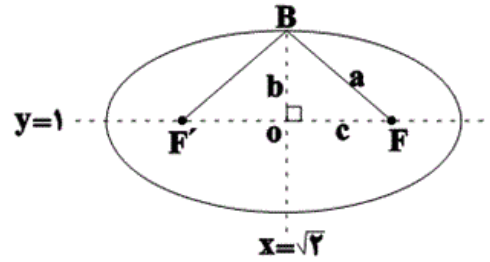
۴

۳

۲

۱ ✓

چون  $yF = yF'$ ، پس بیضی افقی است.  
طول  $BF$  برابر با نصف قطر بزرگ است، داریم:



$$BF = a = \sqrt{(\sqrt{2} + 2 - \sqrt{2})^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$a = 2\sqrt{2} \Rightarrow \text{قطر بزرگ} = 2a = 4\sqrt{2}$$

(هندسه مقدماتی و منحنی‌های درجه دوم) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۳۵ تا ۱۳۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$(2b)^2 = 2c \times 2a \Rightarrow 4b^2 = 4ac \Rightarrow b^2 = ac$$

خروج از مرکز در بیضی برابر است با:

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{ac}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{c}{a}}$$

$$\Rightarrow e = \sqrt{1 - e} \Rightarrow e^2 + e - 1 = 0$$

$$\Rightarrow e = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ e = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0 \end{array} \right. \text{ غرق}$$

(هندسه مقدماتی و منحنی‌های درجه دوم) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۳۷ و ۱۳۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

(امیرحسین تقی زاده)

این هذلولی افقی، دارای پارامترهای  $\begin{cases} a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 \\ b^2 = 9 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$  است و می دانیم:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 25 \Rightarrow c = 5$$

شکل حاصل مستطیلی است که وتر کانونی و فاصله کانونی اندازه اضلاع آن

هستند. یعنی مستطیلی به ابعاد  $\frac{2b^2}{a} = \frac{9}{2}$ ،  $2c = 10$  پس مساحت آن برابر

$$10 \times \frac{9}{2} = 45$$

است با:

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱