سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درســـنامه ها و جـــزوه های ریاضـــی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

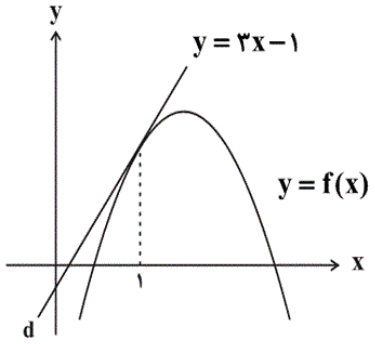
و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)
https://t.me/riazisara

ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)
https://www.instagram.com/riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۸۱- خط d در نقطهٔ $x=1$ بر نمودار تابع f مماس است. حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(f(x))^3-4f(x)}{x-1}$ کدام است؟



۱) ۲۴

۲) ۱۲

۳) ۴۸

۴) ۳۶

۸۲- تابع $f(x)=x^2[3\cos x]$ در $x_0=\pi$ ... ([ ])، نماد جزء صحیح است.)

۱) فقط مشتق راست دارد.

۲) فقط مشتق چپ دارد.

۳) نه مشتق راست و نه مشتق چپ دارد.

۴) مشتق‌پذیر است.

۸۳- تابع f به صورت $f(x)=\begin{cases}x^2 & ;\ x\le 0\\ x+1 & ;\ x>0\end{cases}$ تعریف شده است. تابع g کدام باشد تا تابع $f+g$ در $x=0$ مشتق داشته باشد؟

۱) $g(x)=\begin{cases}1-2x & ;x\le 0\\ 2x^2 & ;x>0\end{cases}$

۲) $g(x)=\begin{cases}x|x|-1 & ;x\le 0\\ -x-2 & ;x>0\end{cases}$

۳) $g(x)=\begin{cases}1+x & ;x\le 0\\ 2x & ;x>0\end{cases}$

۴) $g(x)=\begin{cases}2 & ;x\le 0\\ 1-x^2 & ;x>0\end{cases}$

۸۴- اگر $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x+1}$ باشد، مشتق تابع $g(x)=2xf(x)+(x^2-1)f'(x)$ در $x=4$ کدام است؟

۱) ۱۲

۲) ۱۸

۳) ۲۴

۴) ۴۸

۸۵- اگر $f(۲x)=g(x^۲)$ و $g'(x)=\frac{۳x}{x-۱}$ باشد، مقدار $f''(۴)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

۸۶- اگر $f(x)=\frac{\sqrt{۱-\sin ۲x}}{\sqrt{۱-\sin^۲ x}}$ باشد، مقدار $f'\left(\frac{۵\pi}{۳}\right)$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) $-\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) ۴

۸۷- اگر $f(x)=\frac{۲}{۳}\cos^۳ x+k\cos ۳x$ و $f''\left(\frac{\pi}{۳}\right)=\frac{۱}{۴}$ باشد، مقدار k کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $-\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

۸۸- از مبدأ مختصات مماسی بر منحنی $y=\text{Ln}x$ رسم می‌کنیم. شیب خط مماس کدام است؟

۱) e ۲) $\frac{۱}{e}$ ۳) $-e$ ۴) $-\frac{۱}{e}$

۸۹- اگر $f(x)=\frac{\sqrt{(x-۲)^۲(x+۱)}}{|x^۲-۳|}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰^-}\frac{f(۲-h)-f(۲)}{h}$ برابر کدام گزینه است؟

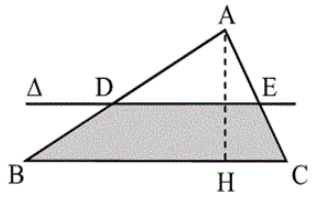
۱) $-\sqrt{۳}$ ۲) $-۲\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۹۰- اگر تابع f همواره مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=xe^x$ باشد، مشتق تابع $f(\text{Ln}x)$ به ازای $x=e^۳$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۵}{۲}$

www.kanoon.ir

۹۱- در مثلث ABC، ضلع $BC=۲۰$ و ارتفاع $AH=۱۲$ واحد است. خط Δ موازی BC با سرعت ثابت ۰/۲ واحد در ثانیه از آن دور می‌شود. سرعت افزایش مساحت ذوزنقه در لحظه‌ای که فاصلهٔ دو خط موازی ۹ واحد باشد، کدام است؟



۱) ۰/۸

۲) ۰/۹

۳) ۱

۴) ۱/۲

۹۲- مشتق تابع ضمنی $\cos\sqrt{y}=y^۲\sin x+\frac{۱}{۲}$ در نقطه‌ای به طول صفر روی منحنی کدام است؟ $(۰<y<\pi^۲)$

۱) $\frac{\pi^۵}{۲}$ ۲) $-\frac{\pi^۵}{۲}$ ۳) $\frac{-۴\pi^۵}{۲۴۳\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{-۴\pi^۵\sqrt{۳}}{۸۱}$

۹۳- دو نقطه روی منحنی تابع $f(x)=\frac{x+۲}{x+۱}$ وجود دارد به طوری که مماس بر نمودار f در آن نقاط، موازی مماس بر نمودار $f^{-۱}$ در نقطهٔ متناظر آن‌هاست. فاصلهٔ این دو نقطه کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۹۴- مشتق تابع $y=\sin^۳(\frac{\pi}{۴}+۲\tan^{-۱}x)$، به ازای $x=۱$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $\frac{-۳\sqrt{۲}}{۴}$

۹۵- مقدار مثبت a کدام باشد تا مساحت مثلثی که رئوس آن نقاط بحرانی تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x^۲-ax}$ است، برابر با ۳۲ شود؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۹۶- مقدار و نوع اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^۲-\sqrt{۲x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$، مینیمم ۲) $-\frac{۳}{۴}$، ماکزیمم ۳) $\frac{۱}{۲}$، مینیمم ۴) $\frac{۱}{۲}$، ماکزیمم

۹۷- شیب خطی که از نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x)=-\frac{۳x}{x^۲+۳}$ در بازهٔ $[-۲,۲]$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۳

www.kanoon.ir

۹۸- مبدأ مختصات برای تابع $y = |x| - |\sin x|$ چه نقطه‌ای است؟

۱) ماکزیمم و مشتق‌پذیر
۲) مینیمم و مشتق‌پذیر
۳) ماکزیمم و مشتق‌ناپذیر
۴) مینیمم و مشتق‌ناپذیر

۹۹- $x = ۱$ برای تابع $f(x) = x^{۱-x}$ چگونه نقطه‌ای است؟

۱) ماکزیمم نسبی
۲) می‌نیمم نسبی
۳) عطف
۴) عادی

۱۰۰- از چهارگوشهٔ یک ورق مستطیل شکل به ابعاد ۲ و ۴ ، چهار مربع به طول ضلع x جدا می‌کنیم، سپس از محل‌های بـرش ورق را تا می‌زنیم و یک جعبهٔ بدون در درست می‌کنیم. به ازای کدام مقدار x حجم جعبه بیشترین مقدار ممکن می‌شود؟

۱) $\frac{۳+\sqrt{۳}}{۳}$
۲) $\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}$
۳) $\frac{۳-\sqrt{۳}}{۳}$
۴) $\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲}$

۱۰۱- بیشترین مساحت ممکن برای مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که محیط آنها برابر $۲+\sqrt{۲}$ باشد، کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۴) $\sqrt{۲}$

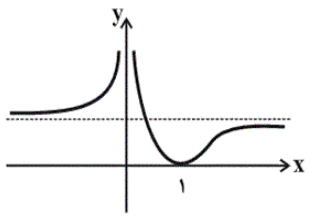
۱۰۲- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=\frac{۱-۸\sqrt{x}}{x}$ روی بازهٔ $(۰,a)$ رو به بالا است. بیشترین مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۱۶}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۹}$

۱۰۳- عرض از مبدأ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} ۳\sqrt[۳]{x} & ;x<-۱ \\ -\frac{۱}{۲}x^۲-\frac{۵}{۲} & ;x\geq -۱ \end{cases}$ در نقطهٔ عطف آن کدام است؟

۱) ۳-
۲) ۱-
۳) ۲-
۴) صفر

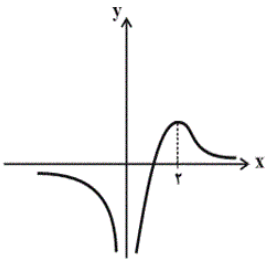
۱۰۴- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده‌است. ضابطهٔ $y=f(x)$ کدام می‌تواند باشد؟



۱) $\frac{x^۲-۱}{x}$
۲) $\frac{x^۲-۲x+۱}{x}$
۳) $\frac{x^۲-۲x+۱}{x^۲}$
۴) $\frac{x^۲-۱}{x^۲}$

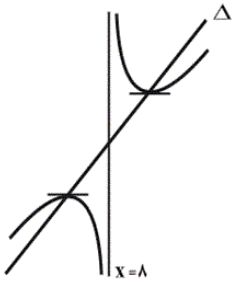
www.kanoon.ir

۱۰۵- شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=\frac{x+a}{x^2+b}$ را نمایش می‌دهد. حاصل $a+b$ کدام است؟



۱) ۲
۲) ۱
۳) صفر
۴) ۱-

۱۰۶- نمودار تابع $f(x)=\frac{2kx^2-8x+64}{x-8}$ به‌صورت زیر است. اگر $k\in\mathbb{R}-\{0\}$ و شیب خط Δ برابر ۸ باشد، k کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۰۷- حاصل انتگرال $\int_0^1 |3x-1|[3x]dx$ کدام است؟ ([ ]،نماد جزء صحیح است.)

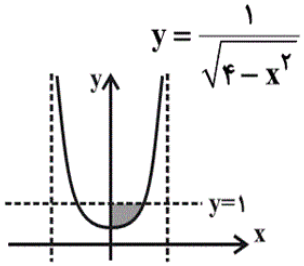
۱) $\frac{6}{7}$
۲) $\frac{7}{6}$
۳) ۱
۴) ۲

دیفرانسیل و انتگرال ، انتگرال - ۳ سوال -

۱۰۸- در تابع $f(x)=\sin^2 x$ در بازهٔ $[0,\pi]$، مقدار U_3 چند برابر π است؟

۱) $\frac{6}{5}$
۲) $\frac{5}{6}$
۳) $\frac{3}{4}$
۴) $\frac{4}{3}$

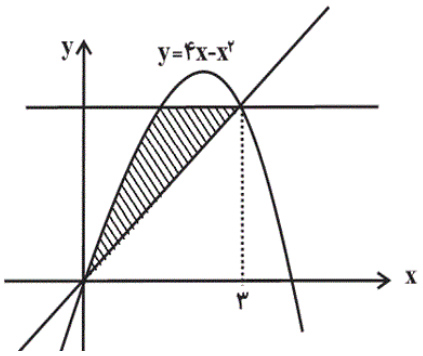
۱۰۹- در شکل مقابل، مساحت قسمت رنگ شده کدام است؟



۱) $\frac{1}{3}(3\sqrt{3}-\pi)$
۲) $\pi-\frac{\sqrt{3}}{3}$
۳) $3\pi-\frac{\sqrt{3}}{3}$
۴) $\frac{1}{3}(\pi-\sqrt{3})$

www.kanoon.ir

۱۱۰- در شکل زیر مساحت ناحیهٔ هاشورخورده کدام است؟



۱) $\frac{۷}{۶}$
۲) $\frac{۱۱}{۶}$
۳) $\frac{۱۷}{۶}$
۴) $\frac{۱۹}{۶}$

هندسه‌ي تحليلي ، مقاطع مخروطي - ۱ سوال -

۱۱۱- خط $y = ۲x + ۳$، یکی از مجانب‌های یک هذلولی است. اگر معادلهٔ محور غیرکانونی آن $x = -۱$ باشد، در این صورت معادلهٔ مجانب دیگر کدام است؟

۱) $y = ۲x + ۱$
۲) $y = -۲x + ۴$
۳) $y = -۲x + ۱$
۴) $y = -۲x - ۱$

هندسه‌ي تحليلي ، ماتريس، دترمينان و دستگاه - ۵ سوال -

۱۱۲- R_θ ماتریس دوران به زاویهٔ θ، حول مبدأ مختصات است. اگر داشته باشیم $R_{\frac{۳\pi}{۲}} = R_{\frac{\pi}{۲}}.R_\alpha.R_{\frac{\pi}{۴}}$، آنگاه $(R_\alpha)^۴$ کدام است؟

۱) I
۲) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{-\sqrt{۲}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}$
۳) $-I$
۴) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \frac{-\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}$

۱۱۳- اگر $A = \begin{bmatrix} ۰ & -۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $mA - nB = \begin{bmatrix} -۳ & -۴ \\ ۵ & ۰ \end{bmatrix}$، آنگاه زوج مرتب (m,n) کدام است؟

۱) $(-۳,-۲)$
۲) $(۳,۲)$
۳) $(۲,۳)$
۴) چنین زوج مرتبی وجود ندارد.

۱۱۴- اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & a & b \\ c & ۲ & -۱ \\ ۴ & a+۱ & ۵ \end{bmatrix}$ یک ماتریس متقارن باشد، آن‌گاه دترمینان ماتریس $۶A^{-۱}$ کدام است؟

۱) ۸
۲) -۸
۳) ۴
۴) -۴

www.kanoon.ir

۱۱۵- دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} yz & x^2 & x^2 \\ y^2 & xz & y^2 \\ z^2 & z^2 & xy \end{bmatrix}$ همواره برابر کدام است؟

۱) $\begin{vmatrix} yz & xy & xz \\ xy & xz & yz \\ xz & yz & xy \end{vmatrix}$

۲) $\begin{vmatrix} xz & yz & xy \\ yz & xz & xy \\ yz & xy & xz \end{vmatrix}$

۳) $\begin{vmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{vmatrix}$

۴) $\begin{vmatrix} x^2 & xz & xy \\ xz & y^2 & yz \\ xy & yz & z^2 \end{vmatrix}$

۱۱۷- فرض کنید A یک ماتریس مربعی وارون‌پذیر از مرتبهٔ ۲ باشد. به ازای چند مقدار حقیقی λ، عبارت $A^t=\lambda A$ ممکن است صحیح باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) هر مقدار ۴) هیچ مقدار

هندسه‌ي تحليلي ، دستگاه‌هاي معادلات خطي - ۴ سوال -

۱۱۸- اگر معادلات خطی سه مجهولی $\begin{cases} mx+ay+bz=0 \\ 2x-by+az=a-b \\ x+2ay+mz=a+1 \end{cases}$ معادلات سه صفحه باشند و هر سه صفحه از مبدأ مختصات بگذرند، این دستگاه معادلات دارای کدام ویژگی است؟

۱) به ازای هر m، جواب غیرصفر دارد.

۲) به ازای یک مقدار m، جواب منحصر به فرد دارد.

۳) به ازای هر m، جواب منحصر به فرد دارد.

۴) به ازای یک مقدار m، جواب غیرصفر دارد.

۱۱۹- ماتریس افزودهٔ دستگاهی بعد از انجام عملیات سطری مقدماتی به صورت $\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ در آمده است، تعداد جواب‌های این دستگاه کدام است؟

۱) صفر ۲) بی‌شمار ۳) ۱ ۴) ۲

www.kanoon.ir

۱۲۰- اگر در دستگاه سه معادله سه مجهولی $\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=۳ \\ a''x+b''y+c''z=۱ \end{cases}$، معکوس ماتریس ضرایب به صورت $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و

مقدار $x=۲$ باشد، آنگاه z کدام است؟

۱) ۱۲- ۲) ۵- ۳) ۵ ۴) ۸

۱۱۶- $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & m \\ ۲m & ۰ & -۲ \\ ۴ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ یک ماتریس وارون‌پذیر است. اگر در ماتریس $A^{-۱}$، درایهٔ واقع در سطر سوم و ستون اول با درایهٔ واقع

در سطر دوم و ستون سوم برابر باشد، m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

ریاضیات گسسته ، نظریه ي اعداد - ۲ سوال -

۱۲۲- در رابطهٔ همنهشتی به پیمانهٔ ۲۹، عدد $a+۴۳$ به دستهٔ هم‌ارزی $[۲۱]$ تعلق دارد. مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی سه رقمی a کدام است؟

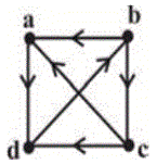
۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۱۰

۱۲۳- رابطهٔ $۴x^{۱۱}\overset{۷}{\equiv}۴x^{۵}+۳x-۶$ به ازای کدام یک از مقادیر x همواره برقرار است؟ $(k\in Z,(x,۷)=۱)$

۱) $x=۷k-۴$ ۲) $x=۷k-۳$ ۳) $x=۷k-۶$ ۴) $x=۷k-۵$

ریاضیات گسسته ، ترکیبات - ۲ سوال -

۱۲۴- گراف جهتدار مقابل مربوط به رابطهٔ R روی مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d\}$ است. در رابطهٔ RoR چند عضو (x,x) وجود دارد که $x\in A$ باشد؟



۱) سه ۲) دو

۳) یک ۴) هیچ

۱۲۵- با ارقام $۷,۵,۳,۲$ چند عدد طبیعی چهار رقمی شامل ارقام ۲ و ۵ می‌توان نوشت؟

۱) ۹۲ ۲) ۱۱۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۸۱

ریاضیات گسسته ، احتمال - ۵ سوال -

۱۲۶- ۶ نفر به طور متوالی در یک مصاحبهٔ استخدام شرکت کرده‌اند. اگر حتماً یک نفر از بین آن‌ها استخدام شود و شانس قبولی هر نفر، دو برابر نفر بعدی باشد، احتمال قبولی نفر آخر چقدر کم‌تر از احتمال قبولی نفر سوم است؟

۱) $\frac{۱}{۲۱}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۳۱}{۶۳}$ ۴) $\frac{۵}{۲۱}$

۱۲۷- در پرتاب یک تاس اگر ۶ ظاهر شود، مجاز به پرتاب تاس دوم هستیم، در غیر این صورت دو سکه پرتاب می‌کنیم؛ با کدام احتمال لااقل یک سکه رو ظاهر می‌شود؟

۱) $\frac{۵}{۸}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

۱۲۸- دو کیسه داریم، در کیسهٔ اول، ۳ مهره قرمز و ۲ مهرهٔ سبز و در کیسهٔ دوم، ۲ مهرهٔ قرمز و ۵ مهرهٔ سبز وجود دارد. یک مهره به تصادف از یکی از کیسه‌ها برداشته و در کیسهٔ دیگر می‌گذاریم و سپس یک مهره از کیسهٔ اخیر بیرون می‌کشیم. احتمال این که هر دو مهره سبز باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۲۱}{۶۳}$ ۲) $\frac{۲۳}{۷۰}$ ۳) $\frac{۴۵}{۱۴۲}$ ۴) $\frac{۶۴}{۱۲۳}$

۱۲۹- دو ظرف یکسان داریم که در اولی ۶ گوی آبی و ۳ گوی قرمز و در دومی ۳ گوی آبی و ۵ گوی قرمز وجود دارد. از یکی از ظرف‌ها، گویی بیرون می‌آوریم. اگر این گوی آبی باشد، با کدام احتمال از ظرف اول انتخاب شده است؟

۱) ۰/۴۸ ۲) ۰/۵۴ ۳) ۰/۶۰ ۴) ۰/۶۴

۱۳۰- در یک آزمایش که تکرار امتحان برنولی (پدیده دو حالته) برای رسیدن به اولین پیروزی است، احتمال آن که در تکرار دوم، اولین پیروزی حاصل شود، برابر $\frac{۲}{۹}$ است. بیش‌ترین احتمال برای آن که در تکرار چهارم اولین پیروزی به دست آید، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۸۱}$ ۲) $\frac{۴}{۸۱}$ ۳) $\frac{۶}{۸۱}$ ۴) $\frac{۸}{۸۱}$

ریاضیات گسسته ، مجموعه ، ضرب دکارتي و رابطه - ۱ سوال -

۱۲۱- مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ دارای چند افراز سه دسته‌ای می‌باشد؟

۱) ۲۵ ۲) ۵۰ ۳) ۴۰ ۴) ۱۵

www.kanoon.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۸۱- (علی سلامت)

$$\lim_{x\to 1}\frac{f^{3}(x)-4f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)(f(x)+2)(f(x)-2)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}(f(x)(f(x)+2))\times\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=2\times 4\times f'(1)$$

$$=8\times 3=24$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۲۴ و ۱۲۵)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۸۲- (سعید علم‌پور)

تابع در $x_0=\pi$ پیوسته است. زیرا داریم: $f(\pi)=\pi^{2}[-3]=-3\pi^{2}$

$$\lim_{x\to\pi^{-}}f(x)=\lim_{x\to\pi^{+}}f(x)=-3\pi^{2}$$

علاوه بر این در همسایگی $x_0=\pi$ ، ضابطهٔ تابع به صورت $f(x)=-3x^{2}$ خواهد بود که واضح است این تابع مشتق‌پذیر است.

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۳۶ و ۱۳۷)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

www.kanoon.ir

۸۳- (عادل حسینی)

به ازای هر ۴ ضابطهٔ داده شده برای g، تابع $f+g$ در $x=0$ پیوسته است. حال برای تابع f داریم:

$$f'(x)=\begin{cases}2x & ;x<0\\ 1 & ;x>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f'(x)=0,\ \lim_{x\to 0^+} f'(x)=1$$

بنابراین برای اینکه تابع $f+g$ در $x=0$ مشتق‌پذیر باشد، شیب نیم‌مماس چپ g در $x=0$ ، باید از شیب نیم‌مماس راست آن ۱ واحد بیشتر باشد.

ضابطهٔ تابع گزینهٔ «۲» ویژگی مورد نظر را دارد:

$$g(x)=\begin{cases}-x^2-1 & ;x\le 0\\ -x-2 & ;x>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow g'(x)=\begin{cases}-2x & ;x<0\\ -1 & ;x>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} g'(x)=0,\ \lim_{x\to 0^+} g'(x)=-1$$

$$\Rightarrow (f+g)'_-(0)=(f+g)'_+(0)=0$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۳۶ و ۱۳۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۸۴- (جهانبخش نیکنام)

راه حل اول:

$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{x^2+x}{x+1}+\frac{1}{x+1}=x+\frac{1}{x+1}$$

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow g(x)=2x\left(x+\frac{1}{x+1}\right)+(x^2-1)\left(1-\frac{1}{(x+1)^2}\right)$$

$$=2x^2+\frac{2x}{x+1}+x^2-1-\frac{x-1}{x+1}=3x^2-1+\frac{2x-x+1}{x+1}=3x^2$$

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.kanoon.ir

۸۵- (کاظم اجلالی)

$$f(2x)=g(x^2)\Rightarrow 2f'(2x)=2xg'(x^2)\Rightarrow f'(2x)=xg'(x^2)$$

$$\Rightarrow 2f''(2x)=g'(x^2)+2x^2g''(x^2)$$

بنابراین به ازای $x=2$ داریم: $2f''(4)=g'(4)+8g''(4)$

از طرف دیگر داریم:

$$\begin{cases} g'(x)=\dfrac{3x}{x-1}\Rightarrow g'(4)=\dfrac{12}{3}=4 \\ g''(x)=\dfrac{-3}{(x-1)^2}\Rightarrow g''(4)=\dfrac{-3}{9}=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2f''(4)=4+8(-\frac{1}{3})\Rightarrow f''(4)=\frac{2}{3}$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۴۵ و ۱۴۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۸۶- (علی شهرابی)

با دو اتحاد $1-\sin 2x=(\sin x-\cos x)^2$ و $1-\sin^2 x=\cos^2 x$،

ضابطهٔ f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=\frac{\sqrt{1-\sin 2x}}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}}{\sqrt{\cos^2 x}}=\frac{|\sin x-\cos x|}{|\cos x|}$$

در همسایگی $x=\frac{5\pi}{3}$ ، با تعیین علامت عبارت‌های داخل قدر مطلق

ضابطهٔ f به صورت زیر در می‌آید:

$$f(x)=\frac{\overbrace{|\sin x-\cos x|}^{-}}{\underbrace{|\cos x|}_{+}}=\frac{-\sin x+\cos x}{\cos x}=1-\tan x$$

$$\Rightarrow f'(x)=-(1+\tan^2 x)\Rightarrow f'\left(\frac{5\pi}{3}\right)=-(1+(-\sqrt{3})^2)=-4$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۳۸ تا ۱۴۱)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۸۷- (کاظم اجلالی)

$$f'(x) = -۲\sin x\cos^۲ x - ۳k\sin ۳x$$

$$f''(x) = -۲\cos^۳ x + ۴\sin^۲ x\cos x - ۹k\cos ۳x$$

$$f''\left(\frac{\pi}{۳}\right) = -۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^۳ + ۴\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۲\left(\frac{۱}{۲}\right) - ۹k(-۱) = \frac{۵}{۴} + ۹k$$

بنابراین: $\frac{۵}{۴} + ۹k = \frac{۱}{۴} \Rightarrow k = -\frac{۱}{۹}$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۳۸ تا ۱۴۱)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۸۸- (حبیب شفیعی)

نقطهٔ تماس $M\begin{vmatrix}\alpha\\ Ln\alpha\end{vmatrix}$ ، $y' = \frac{۱}{x} \Rightarrow m = \frac{۱}{\alpha}$

معادلهٔ خط مماس برحسب α : $y - Ln\alpha = \frac{۱}{\alpha}(x - \alpha)$

نقطهٔ (۰,۰) را در این معادله صدق می‌دهیم:

$$-Ln\alpha = \frac{۱}{\alpha}(-\alpha)$$

$$\Rightarrow Ln\alpha = ۱ \Rightarrow \alpha = e \Rightarrow m = \frac{۱}{e}$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۹ تا ۱۶۳)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

۸۹- (محمدمهدی وزیری)

با فرض $t = -h$ داریم:

$$\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۲-h)-f(۲)}{h} = \lim_{t\to ۰^+}\frac{f(۲+t)-f(۲)}{-t} = -f'_+(۲)$$

$$x > ۲ \Rightarrow f(x) = |x-۲|\times\frac{\sqrt{x+۱}}{|x^۲-۳|} = \underbrace{(x-۲)}_{\text{عامل صفر}}\times\frac{\sqrt{x+۱}}{|x^۲-۳|}$$

عبارت مورد نظر سؤال $= -f'_+(۲) = -\sqrt{۳}$ ⇐ $f'_+(۲) = \underbrace{۱}_{\text{مشتق عامل صفر}}\times\frac{\sqrt{۲+۱}}{\underbrace{|۴-۳|}_{\text{عوامل غیرصفر}}} = \sqrt{۳}$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحهٔ ۱۳۸)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۹۰- (محمدمهدی وزیری)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=2f'(x)=xe^x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}xe^x$$

$$(f(\ln x))'_{(x=e^3)}=\frac{1}{x}\times f'(\ln x)\Big|_{x=e^3}=\frac{1}{e^3}f'(\ln e^3)$$

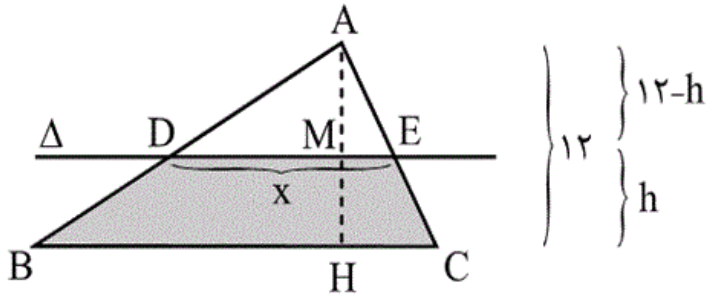
$$=\frac{1}{e^3}\times f'(3)=\frac{1}{e^3}\times\frac{1}{2}\times 3e^3=\frac{3}{2}$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۹ تا ۱۶۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۹۱- (سراسری ریاضی - ۹۴)

اگر ضلع $DE=x$ و ارتفاع $MH=h$ در نظر گرفته شود، برای حل مسأله در مرحلهٔ اول، متغیرها را مشخص می‌کنیم.



$$\begin{cases} h'_t=0/2 \\ S'_t=? \\ h_\circ=9 \end{cases}$$

حال مساحت ذوزنقه را برحسب این متغیرها محاسبه می‌کنیم.

$$S=\frac{1}{2}(DE+BC)MH=\frac{1}{2}(x+20)h$$

با استفاده از رابطهٔ تالس داریم:

$$\frac{x}{20}=\frac{12-h}{12}\Rightarrow x=\frac{60-5h}{3}$$

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.kanoon.ir

۹۲- (امیرهوشنگ خمسه)

$$f(x,y)=0 \Rightarrow y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}$$

$$f(x,y)=\cos\sqrt{y}-y^2\sin x-\frac{1}{2}$$

$$y'_x=-\frac{-y^2\cos x}{-\frac{1}{2\sqrt{y}}\sin\sqrt{y}-2y\sin x}$$

$$x_0=0 \Rightarrow \cos\sqrt{y}=\frac{1}{2} \xrightarrow{\sqrt{y}<\pi} \sqrt{y}=\frac{\pi}{3} \Rightarrow y=\frac{\pi^2}{9}$$

$$y'_x=-\frac{-\frac{\pi^4}{81}\times 1}{-\frac{1}{\frac{2\pi}{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-0}=\frac{\frac{\pi^4}{81}}{-\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}}=-\frac{4\pi^5\sqrt{3}}{729}=-\frac{4\pi^5}{243\sqrt{3}}$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۴ تا ۱۵۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۹۳- (محمدرضا شوکتی‌بیرق)

فرض کنیم (a,b) یکی از آن دو نقطهٔ واقع بر نمودار تابع f باشد. پس:

$$(f^{-1})'(b)=f'(a) \Rightarrow \frac{1}{f'(a)}=f'(a) \Rightarrow (f'(a))^2=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(a)=1 & \text{غیرقابل قبول} \\ f'(a)=-1 & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

$$f'(a)=\frac{-1}{(a+1)^2} \Rightarrow \frac{-1}{(a+1)^2}=-1 \Rightarrow (a+1)^2=1 \Rightarrow \begin{cases} a+1=1 \\ a+1=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=0 \Rightarrow b=2 \Rightarrow A(0,2) \\ a=-2 \Rightarrow b=0 \Rightarrow A'(-2,0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow AA'=\sqrt{(0+2)^2+(2-0)^2} \Rightarrow AA'=2\sqrt{2}$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۷ و ۱۵۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.kanoon.ir

-۹۴ (آریان حیدری)

$$y = \sin^{۳}(\frac{\pi}{۴} + ۲\tan^{-۱} x)$$

$$\Rightarrow y' = ۳\sin^{۲}(\frac{\pi}{۴} + ۲\tan^{-۱} x) \times \cos(\frac{\pi}{۴} + ۲\tan^{-۱} x) \times \frac{۲}{۱+x^{۲}}$$

$$\xrightarrow{x=۱} y'(۱) = ۳\sin^{۲}(\frac{\pi}{۴} + ۲(\frac{\pi}{۴}))\cos(\frac{\pi}{۴} + ۲(\frac{\pi}{۴})) \times \frac{۲}{۲}$$

$$= ۳(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = \frac{-۳\sqrt{۲}}{۴}$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۷ و ۱۵۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.kanoon.ir

۹۵-

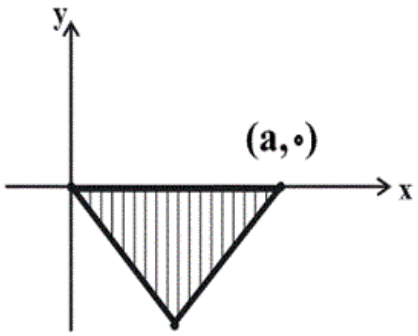
دامنهٔ تابع f، $\mathbb{R}$ است و برای مشتق آن داریم:

$$f'(x)=\frac{۲x-a}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-ax)^۲}}$$

برای پیدا کردن طول نقاط بحرانی، $f'(x)=۰$ قرار می‌دهیم:

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=\frac{a}{۲}$$

هم‌چنین مقادیری که در دامنهٔ تابع f' قرار ندارند، جزء طول نقاط بحرانی تابع f هستند. بنابراین $x=۰$ و $x=a$ نیز طول نقاط بحرانی تابع f هستند. در نتیجه مختصات رئوس مثلث مورد نظر $(۰,۰)$، $(a,۰)$ و $(\frac{a}{۲},-\sqrt[۳]{\frac{a^۲}{۴}})$ هستند.



$$(\frac{a}{۲},-\sqrt[۳]{\frac{a^۲}{۴}})$$

مساحت این مثلث را برابر با ۳۲ قرار می‌دهیم:

$$S=\frac{۱}{۲}a\sqrt[۳]{\frac{a^۲}{۴}}=۳۲\Rightarrow\sqrt[۳]{\frac{a^۵}{۴}}=۶۴$$

$$\Rightarrow a^۵=(۲^۶)^۳\times۲^۲=۲^{۲۰}\Rightarrow a=۲^۴=۱۶$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۲ تا ۱۸۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.kanoon.ir

۹۶-

دامنهٔ f، $[۰,+\infty)$ است.

$$f'(x)=۲x-\frac{۱}{\sqrt{۲x}}$$

$$\xrightarrow{f'(x)=۰} ۲x=\frac{۱}{\sqrt{۲x}} \Rightarrow ۲x\sqrt{۲x}=۱ \Rightarrow (\sqrt{۲x})^{۳}=۱$$

$$\Rightarrow \sqrt{۲x}=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

طول نقطهٔ اکسترمم تابع:

با تشکیل جدول تغییرات رفتار داریم:

x	۰		$\frac{۱}{۲}$	
$f'(x)$		$-$	۰	$+$
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$

$$;f(\frac{۱}{۲})=-\frac{۳}{۴}$$

نقطهٔ $(\frac{۱}{۲},-\frac{۳}{۴})$، مینیمم نسبی تابع است.

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۴ تا ۱۸۷)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۹۷- (محمد پیمانی)

ابتدا نقاط بحرانی بازهٔ $(-۲,۲)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{۳(x^۲-۳)}{(x^۲+۳)^۲}\xrightarrow{f'(x)=۰}x^۲=۳\Rightarrow x=\pm\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f(-\sqrt{۳})=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\\ f(\sqrt{۳})=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\end{cases}$$

از طرفی مقادیر تابع در ابتدا و انتهای بازه $[-۲,۲]$ به‌ترتیب برابرند با $f(-۲)=\frac{۶}{۷}$ و $f(۲)=-\frac{۶}{۷}$. در نتیجه $(-\sqrt{۳},\frac{\sqrt{۳}}{۲})$ نقطهٔ ماکزیمم مطلق و $(\sqrt{۳},-\frac{\sqrt{۳}}{۲})$ نقطهٔ مینیمم مطلق است. حال شیب خط گذرا از این دو نقطه را حساب می‌کنیم:

$$m=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}-(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})}{-\sqrt{۳}-\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{-۲\sqrt{۳}}=-\frac{۱}{۲}$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۷۰ تا ۱۷۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.kanoon.ir

۹۸- (محمدرضا شوکتی‌بیرق)

تابع داده شده را در بازهٔ $\left(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right)$ به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y=|x|-|\sin x|=\begin{cases}-x+\sin x & ;-\frac{\pi}{۲}<x<۰\\ x-\sin x & ;۰\le x<\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow y'=\begin{cases}-۱+\cos x & ;-\frac{\pi}{۲}<x<۰\\ ۱-\cos x & ;۰\le x\le\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنیم y' در بازهٔ $\left(-\frac{\pi}{۲},۰\right)$ منفی و در بازهٔ $\left(۰,\frac{\pi}{۲}\right)$ مثبت و در $x=۰$ برابر صفر است. لذا مبدأ مختصات برای تابع داده شده یک نقطهٔ مینیمم نسبی و مشتق‌پذیر است.

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۴ تا ۱۸۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۹۹- (کاظم اجلالی)

مشتق تابع را در $x=۱$ محاسبه می‌کنیم:

$$y=x^{۱-x}\Rightarrow \text{Ln}y=\text{Ln}\left(x^{(۱-x)}\right)=(۱-x)\text{Ln}x$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم.}}\frac{y'}{y}=-\text{Ln}x+\frac{۱-x}{x}\Rightarrow y'=y\left(-\text{Ln}x+\frac{۱-x}{x}\right)$$

$$y'=x^{۱-x}\left(-\text{Ln}x+\frac{۱-x}{x}\right)=-x^{۱-x}\left(\text{Ln}x+\frac{x-۱}{x}\right)$$

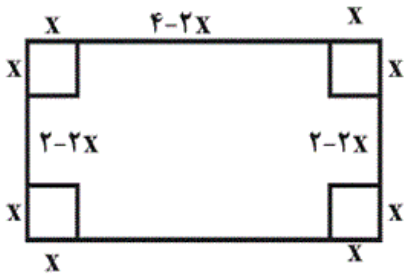
$$\Rightarrow y'(۱)=۰$$

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۱۰۰- (کاظم اجلالی)

مطابق شکل زیر ابعاد جعبه x، $۲-۲x$ و $۴-۲x$ خواهد بود.



بنابراین حجم جعبهٔ بدون در برابر است با:

$$V = x(۲-۲x)(۴-۲x)\ ,\ ۰<x<۱$$

حال به کمک مشتق حجم جعبه را بیشترین مقدار ممکن می‌کنیم:

$$V' = ۴\left(۳x^۲ - ۶x + ۲\right)$$

$$V'(x) = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۶x + ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{۳+\sqrt{۳}}{۳} \quad \text{غ.ق.ق} \\ x = \dfrac{۳-\sqrt{۳}}{۳} \end{cases}$$

توجه کنید که $\lim\limits_{x\to ۰^+} V(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} V(x) = ۰$ است، پس مقدار $V\left(\dfrac{۳-\sqrt{۳}}{۳}\right)$ که مقداری مثبت است، ماکزیمم مطلق تابع V می‌باشد.

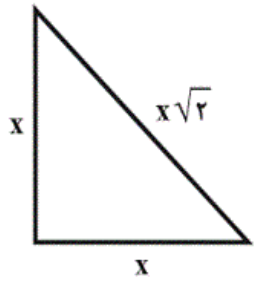
(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۷۳ تا ۱۷۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.kanoon.ir

۱۰۱- (عادل حسینی)

اگر محیط مثلث قائم‌الزاویه ثابت باشد، بیشترین مساحت آن زمانی رخ می‌دهد که مثلث متساوی‌الساقین نیز باشد:



$$\text{محیط} = ۲x + x\sqrt{۲} = x\left(۲ + \sqrt{۲}\right) = ۲ + \sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow x = ۱$$

$$\Rightarrow S_{max} = \frac{x^{۲}}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۷۳ تا ۱۷۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۰۲- (عادل حسینی)

$$f'(x) = \frac{۴\sqrt{x} - ۱}{x^{۲}} \Rightarrow f''(x) = \frac{۲ - ۶\sqrt{x}}{x^{۳}}$$

برای اینکه جهت تقعر تابع رو به بالا باشد، لازم است $f''(x) > ۰$ باشد.

داریم:

$$\frac{۲ - ۶\sqrt{x}}{x^{۳}} > ۰ \xrightarrow{D_{f'} = D_{f''} = (۰,+\infty)} ۲ - ۶\sqrt{x} > ۰ \Rightarrow \sqrt{x} < \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow x < \frac{۱}{۹} \xrightarrow{x>۰} x \in \left(۰, \frac{۱}{۹}\right)$$

بنابراین بیشترین مقدار a، $\frac{۱}{۹}$ است.

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۰ تا ۱۸۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.kanoon.ir

۱۰۳- (عادل حسینی)

می‌دانیم طول نقطهٔ عطف نمودار تابع $y=\sqrt[۳]{x}$، $x=۰$ است. پس با توجه به محدود کردن دامنهٔ آن به $x<-۱$ و هم‌چنین اینکه سهمی نقطهٔ عطف ندارد، طول نقطهٔ عطف نمودار تابع f، قطعاً $x=-۱$ است و داریم:

$$f(-۱)=-\frac{۱}{۲}(۱)-\frac{۵}{۲}=-۳$$

تابع f در $x=-۱$ پیوسته است. بنابراین کافی است شیب خط مماس بر آن را در $x=-۱$ به‌دست آوریم:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}} & ;x<-۱\\ -x & ;x\geq -۱\end{cases}$$

تابع در $x=-۱$ مشتق‌پذیر نیز می‌باشد و $f'(-۱)=۱$ است. بنابراین خط مماس بر نمودار تابع در نقطهٔ $(-۱,-۳)$ به‌صورت زیر است:

$$y=x-۲$$

عرض از مبدا این خط برابر -۲ است.

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۲ تا ۱۸۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۴- (عادل حسینی)

$x=۰$ مجانب قائم نمودار تابع است، به طوری که در همسایگی آن علامت f یکسان است، بنابراین $x=۰$، باید ریشهٔ مضاعف عبارت مخرج باشد. از طرفی نمودار تابع در $x=۱$ بر محور xها مماس است یعنی $x=۱$ باید ریشهٔ مضاعف عبارت صورت باشد.

در نتیجه ضابطهٔ $y=f(x)$ را می‌توان به‌صورت $f(x)=\frac{(x-۱)^۲}{x^۲}=\frac{x^۲-۲x+۱}{x^۲}$ در نظر گرفت.

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.kanoon.ir

۱۰۵- (فرامرز سپهری)

$x=0$ مجانب قائم نمودار است و از آنجا که در دو طرف آن علامت تابع یکسان است، $x=0$ باید ریشهٔ مضاعف عبارت مخرج باشد، بنابراین $b=0$ است.

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x+a}{x^2}=\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}$$

$x=2$ نیز طول نقطهٔ اکسترمم نسبی نمودار تابع است. پس $f'(2)=0$ باید باشد:

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{2a}{x^3}\Rightarrow f'(2)=-\frac{1}{4}-\frac{a}{4}=0\Rightarrow a=-1$$

$$\Rightarrow a+b=-1$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۰۶- (سامان سلامیان)

می‌بینیم خط Δ نقاط اکسترمم نسبی تابع را به هم وصل کرده است که در این دو نقطه مماس افقی و مشتق برابر صفر است. از تابع مشتق می‌گیریم:

$$y'=\frac{(4kx-8)(x-8)-1(2kx^2-8x+64)}{(x-8)^2}=0$$

$$\Rightarrow 4kx^2-32kx-8x+64-2kx^2+8x-64=0$$

$$\Rightarrow 2kx^2-32kx=2kx(x-16)=0\Rightarrow x=0,16$$

$$A\begin{cases}x=0\\y=-8\end{cases}$$

$$B\begin{cases}x=16\\y=\frac{512k-8(16)+64}{(16-8=8)}=64k-16+8=64k-8\end{cases}$$

$$\text{شیب خط }\Delta=m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{64k-8-(-8)}{16-0}$$

$$=\frac{64k}{16}=4k=8\Rightarrow k=2$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۱۰۷- (حمید معنوی)

$$0<x<1\Rightarrow 0<3x<3$$

$$\Rightarrow\begin{cases}0<3x<1\Rightarrow[3x]=0\Rightarrow 0<x<\frac{1}{3}\\ 1\le 3x<2\Rightarrow[3x]=1\Rightarrow\frac{1}{3}\le x<\frac{2}{3}\\ 2\le 3x<3\Rightarrow[3x]=2\Rightarrow\frac{2}{3}\le x<1\end{cases}$$

$$\int_0^1 |3x-1|[3x]dx$$

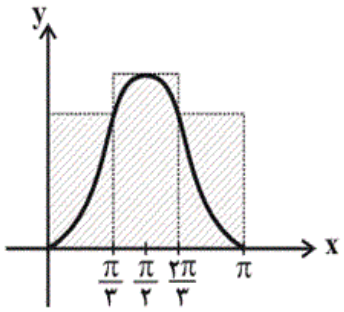
$$=\int_0^{\frac{1}{3}}(1-3x)(0)dx+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}(3x-1)(1)dx+\int_{\frac{2}{3}}^{1}(3x-1)(2)dx$$

$$=0+\left(\frac{3x^2}{2}-x\right)\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}+(3x^2-2x)\Big|_{\frac{2}{3}}^{1}$$

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۰۸- (حمید علیزاده)

نمودار تابع f و مجموع ریمان بالای آن در بازهٔ $[0,\pi]$ در شکل زیر مشخص شده است:



بنابراین داریم:

$$U_3=\frac{\pi}{3}\left(f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=\frac{\pi}{3}\left(\frac{3}{4}+1+\frac{3}{4}\right)=\frac{5\pi}{6}$$

(دیفرانسیل- انتگرال: صفحه‌های ۲۲۷ تا ۲۳۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۱۰۹- (حمید علیزاده)

ابتدا طول نقطهٔ برخورد خط $y=۱$ با تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$y_۱=y_۲\Rightarrow\frac{۱}{\sqrt{۴-x^۲}}=۱\Rightarrow ۴-x^۲=۱\overset{x>۰}{\Rightarrow}x=\sqrt{۳}$$

$$S=\int_۰^{\sqrt{۳}}(۱-\frac{۱}{\sqrt{۴-x^۲}})dx=(x-\sin^{-۱}\frac{x}{۲})\Big|_۰^{\sqrt{۳}}$$

$$=\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۳}(۳\sqrt{۳}-\pi)$$

(دیفرانسیل- انتگرال: صفحه‌های ۲۴۱ تا ۲۴۷)

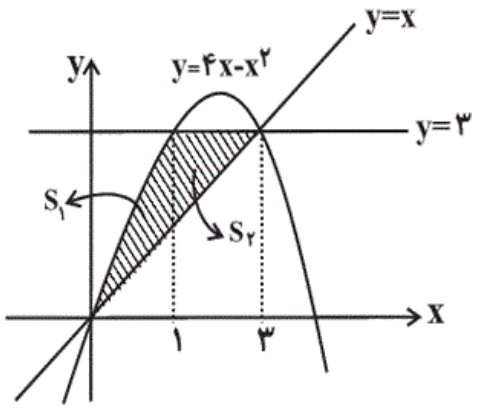
۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۱۰- (بهرام طالبی)

$x=۳\Rightarrow y=۴(۳)-(۳)^۲=۳\Rightarrow$ معادلهٔ خط افقی $y=۳$

$\Rightarrow$ معادلهٔ خط مورب $y=x$

$$\begin{cases}y=۴x-x^۲\\ y=۳\end{cases}\Rightarrow ۴x-x^۲=۳\Rightarrow x^۲-۴x+۳=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\ x=۳\end{cases}$$



$$S=S_۱+S_۲=\int_۰^۱(۴x-x^۲-x)dx+\int_۱^۳(۳-x)dx$$

$$S=(\frac{۳x^۲}{۲}-\frac{۱}{۳}x^۳)\Big|_۰^۱+(۳x-\frac{۱}{۲}x^۲)\Big|_۱^۳$$

$$=(\frac{۳}{۲}-\frac{۱}{۳})+\left((۹-\frac{۹}{۲})-(۳-\frac{۱}{۲})\right)=\frac{۷}{۶}+۲=\frac{۱۹}{۶}$$

(دیفرانسیل- انتگرال: صفحه‌های ۲۴۱ تا ۲۴۷)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

www.kanoon.ir

محل تلاقی مجانب با محور غیرکانونی، مختصات مرکز هذلولی را می‌دهد:

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow y = 2(-1) + 3 = 1 \Rightarrow \text{مرکز} : (-1,1)$$

در هذلولی‌های افقی و قائم، شیب مجانب‌ها قرینه‌اند، پس شیب مجانب دیگر $m = -2$ است.

$$\text{معادلهٔ مجانب دیگر} : y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = -2(x + 1)$$

$$\Rightarrow y = -2x - 1$$

(هندسه تحلیلی- مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۷۰ تا ۷۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.kanoon.ir

۱۱۲-

نکته:

$$R_\alpha . R_\beta = R_{(\alpha+\beta)} \quad (۱)$$

$$R_\alpha^n = R_{n\alpha} \quad (۲)$$

$$R_{\frac{\pi}{۴}} . R_\alpha . R_{\frac{\pi}{۲}} \overset{(۱)}{=\!=} R_{(\frac{\pi}{۴}+\alpha+\frac{\pi}{۲})} \overset{\text{طبق فرض}}{=\!=} R_{\frac{۳\pi}{۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{۳\pi}{۴} + \alpha = \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow \alpha = \frac{۳\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow R_\alpha^۴ = R_{\frac{۳\pi}{۴}}^۴ \overset{(۲)}{=\!=} R_{۳\pi} = \begin{bmatrix} \cos ۳\pi & -\sin ۳\pi \\ \sin ۳\pi & \cos ۳\pi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} = -I$$

(هندسه تحلیلی- ماتریس و دترمینان: صفحهٔ ۱۱۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۰ & -۲m \\ m & ۳m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n & ۰ \\ -n & ۲n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳ & -۴ \\ ۵ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -n & -۲m \\ m+n & ۳m-۲n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳ & -۴ \\ ۵ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} n = ۳ \\ m = ۲ \end{cases}$$

(هندسه تحلیلی- ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۹۶ تا ۹۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.kanoon.ir

۱۱۴- (نوید مجیدی)

$$A=\left[\begin{array}{ccc|} ۱ & a & b \\ c & ۲ & -۱ \\ ۴ & a+۱ & ۵ \end{array}\right] \xrightarrow{A\text{متقارن است}} \begin{cases} b=۴ \\ a+۱=-۱ \\ c=a \end{cases}$$

$$\Rightarrow A=\left[\begin{array}{ccc|} ۱ & -۲ & ۴ \\ -۲ & ۲ & -۱ \\ ۴ & -۱ & ۵ \end{array}\right] \xrightarrow{\text{بسط نسبت به سطر اول}}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۵ \end{vmatrix}+۲\begin{vmatrix} -۲ & -۱ \\ ۴ & ۵ \end{vmatrix}+۴\begin{vmatrix} -۲ & ۲ \\ ۴ & -۱ \end{vmatrix}$$

$$=(۱۰-۱)+۲(-۱۰+۴)+۴(۲-۸)=-۲۷$$

با توجه به این که $|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}$، پس خواهیم داشت:

$$|۶A^{-۱}|=۶^{۳}\times(-\frac{۱}{۲۷})=-\frac{۲۱۶}{۲۷}=-۸$$

(هندسه تحلیلی- ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۰۶ و ۱۱۹ و دستگاه معادلات خطی: صفحهٔ ۱۳۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۱۱۵- (نصیر مجبی‌نژاد)

در دترمینان ماتریس A، از x، y و z به ترتیب در سطرهای اول، دوم و سوم، فاکتور گرفته سپس x، y و z را به ترتیب در ستون‌های اول، دوم و سوم ضرب می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} yz & x^2 & x^2 \\ y^2 & xz & y^2 \\ z^2 & z^2 & xy \end{vmatrix} = xyz \begin{vmatrix} \frac{yz}{x} & x & x \\ y & \frac{xz}{y} & y \\ z & z & \frac{xy}{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz & xy & xz \\ xy & xz & yz \\ xz & yz & xy \end{vmatrix}$$

(هندسه تحلیلی- ماتریس و دترمینان: مشابه تمرین ۵- قسمت (هـ) صفحهٔ ۱۲۸)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۱۷- (نوید مجیدی)

می‌دانیم که دترمینان هر ماتریس مربعی با دترمینان ترانهاده‌اش برابر است،

پس داریم:

$$A^t = \lambda A \Rightarrow |A^t| = |\lambda A| = \lambda^2 |A| \Rightarrow |A| = \lambda^2 |A|$$

$$\xrightarrow{|A| \neq 0} \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

(هندسه تحلیلی- ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۱۹ و ۱۲۵)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.kanoon.ir

$$|A| = \begin{vmatrix} m & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & m \end{vmatrix} = m^2 + 6$$

$m^2 + 6$ همواره مخالف صفر است، بنابراین دستگاه به ازای هر m جواب منحصر به فرد صفر دارد.

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

-۱۱۹ (سیدعادل رضا مرتضوی)

چون دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه برابر صفر است و دو صفحهٔ $x + y + 2z = 4$ و $-2x - 2y - 4z = -8$ بر هم منطبقند، پس دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۴۰ و ۱۴۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.kanoon.ir

-۱۲۰

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=۳ \\ a''x+b''y+c''z=۱ \end{cases} \xrightarrow[\text{می‌نویسیم.}]{\text{دستگاه را به صورت ماتریسی}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix} d \\ ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}}_{B}$$

$$AX=B \rightarrow A^{-۱}(AX)=A^{-۱}B$$

$$\Rightarrow (A^{-۱}A)X=A^{-۱}B \Rightarrow IX=A^{-۱}B$$

$$\Rightarrow X=A^{-۱}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d \\ ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d-۳ \\ ۵ \\ ۲d-۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=d-۳ \\ y=۵ \\ z=۲d-۲ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x=۲} ۲=d-۳ \Rightarrow d=۵$$

$$z=۲d-۲ \xrightarrow{d=۵} z=۲(۵)-۲=۸ \Rightarrow z=۸$$

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۸ و ۱۳۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.kanoon.ir

۱۱۶- (محمدعلی نادرپور)

فرض کنیم $A^{-1}=[b_{ij}]_{3\times 3}$ و A_{ij} برابر ij- امین همسازهٔ ماتریس A باشد،

داریم:

$$b_{ij}=\frac{1}{|A|}A_{ji}$$

$$b_{31}=b_{23}\Rightarrow \frac{1}{|A|}A_{13}=\frac{1}{|A|}A_{32}\Rightarrow \begin{vmatrix} 2m & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & m \\ 2m & -2 \end{vmatrix}$$

$$m^2-2m+1=0\Rightarrow m=1$$

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۶)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۲۲- (نوید مجیدی)

با توجه به مفهوم سؤال می‌توانیم بنویسیم: $a+43\overset{29}{\equiv}21$

$$\Rightarrow a\overset{29}{\equiv}21-43\Rightarrow a\overset{29}{\equiv}-22\overset{29}{\equiv}7\Rightarrow a=7+29t, t\in Z$$

کوچک‌ترین عدد سه رقمی a به ازای $t=4$ به دست می‌آید و در این صورت

خواهیم داشت: $a_{min}=7+4\times 29=7+116=123$

$\Rightarrow$ مجموع ارقام $=1+2+3=6$

(ریاضیات گسسته- نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

www.kanoon.ir

$$۴x^{۱۱} \overset{۷}{\equiv} ۴x^{۵} + ۳x - ۶ \xrightarrow{(۱)} ۴x^{۵} \overset{۷}{\equiv} ۴x^{۵} + ۳x - ۶ \Rightarrow ۳x \overset{۷}{\equiv} ۶$$

$$\Rightarrow x \overset{۷}{\equiv} ۲ \Rightarrow x \overset{۷}{\equiv} -۵ \Rightarrow x = ۷k - ۵ \qquad (k \notin \mathbb{Z})$$

(ریاضیات گسسته- نظریه اعداد؛صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۱۲۴ (نوید مجیدی)

ماتریس مربوط به رابطهٔ R به صورت $M = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \end{array}$ است. برای اینکه

مشخص کنیم چند عضو (x,x) در رابطهٔ RoR وجود دارند، باید درایه‌های روی قطر

اصلی $M^۲$ را به دست آوریم، یعنی هر سطر را در ستون نظیرش ضرب کنیم. داریم:

$$M^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & & & \\ & ۰ & \bigcirc & \\ & \bigcirc & ۰ & \\ & & & ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین در رابطهٔ ROR هیچ عضوی با خودش رابطه ندارد.

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات؛ صفحه‌های ۵۸ تا ۶۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.kanoon.ir

۱۲۵- (رحمت عین‌علیان)

S : مجموعهٔ اعداد طبیعی ۴ رقمی با ارقام مورد نظر

A : مجموعهٔ اعداد طبیعی ۴ رقمی با ارقام مورد نظر فاقد رقم ۲

B : مجموعهٔ اعداد طبیعی ۴ رقمی با ارقام مورد نظر فاقد رقم ۵

مطلوب سؤال، به دست آوردن مقدار $|\bar{A}\cap\bar{B}|$ است:

$$|\bar{A}\cap\bar{B}|=|S|-|A\cup B|=|S|-(|A|+|B|-|A\cap B|)$$

$$\begin{cases}|S|=۴^۴,|A|=|B|=۳^۴\\|A\cap B|=۲^۴\end{cases}$$

$$|\bar{A}\cap\bar{B}|=۴^۴-(۲\times ۳^۴-۲^۴)=۲۵۶-۱۶۲+۱۶=۱۱۰$$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۶۴ و ۶۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۲۶- (سیدعادل‌رضا مرتضوی)

$$\underset{\text{نفر آخر}}{\underline{P}},\underline{۲P},\underline{۴P},\underset{\text{نفر سوم}}{\underline{۸P}},\underline{۱۶P},\underset{\text{نفر اول}}{\underline{۳۲P}}$$

$$P+۲P+\cdots+۳۲P=۱\Rightarrow ۶۳P=۱\Rightarrow P=\frac{۱}{۶۳}$$

$$P\text{ (نفر سوم)}-P\text{ (نفر آخر)}=۸P-P=۷P=۷\times\frac{۱}{۶۳}=\frac{۷}{۶۳}=\frac{۱}{۹}$$

(جبر و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۹۵ تا ۱۰۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.kanoon.ir

-۱۲۷ (حمید کروسی)

احتمال نیامدن ۶ در پرتاب تاس برابر $\frac{۵}{۶}$ و احتمال این که در پرتاب دو سکه، حداقل یک بار رو بیاید برابر $\frac{۳}{۴}$ است. احتمال پیشامد مورد نظر با توجه به مستقل بودن دو پیشامد برابر است با $\frac{۵}{۸} = \frac{۵}{۶} \times \frac{۳}{۴}$.

(ریاضیات گسسته- احتمال: صفحه‌های ۸۳ تا ۸۵)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۱۲۸- (رسول محسنی‌منش)

احتمال مورد نظر تابع آن است که ابتدا کدام کیسه انتخاب شود. با انتخاب هر کیسه و برداشتن یک مهره از آن و افزودن مهره به کیسهٔ دوم، ترکیب کیسهٔ دوم دچار تغییر می‌شود. در صورتی که ابتدا مهرهٔ سبز از کیسهٔ اول انتخاب شود، در کیسهٔ دوم ۲ مهرهٔ قرمز و ۶ مهره سبز و در صورتی که ابتدا مهرهٔ سبز از کیسهٔ دوم انتخاب شود، در کیسهٔ اول ۳ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ سبز وجود خواهد داشت. با استفاده از قانون احتمال کل داریم:

$$P(\text{هر دو سبز}) = P(\text{دومی سبز و اولی سبز}) = \frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۵}\times\frac{۶}{۸} + \frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۷}\times\frac{۳}{۶} = \frac{۲۳}{۷۰}$$

(ریاضیات گسسته- احتمال: صفحهٔ ۸۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۱۲۹- (نوید مجیدی)

گیریم A پیشامد انتخاب ظرف اول، B پیشامد انتخاب ظرف دوم و C پیشامد آن باشد که گوی انتخابی آبی است. احتمال مورد نظر برابر است با $P(A \mid C)$، پس بنابر قاعدهٔ بیز داریم:

$$P(A \mid C) = \frac{P(A)P(C \mid A)}{P(A)P(C \mid A) + P(B)P(C \mid B)} = \frac{\frac{۱}{۲} \times \frac{۶}{۹}}{\frac{۱}{۲} \times \frac{۶}{۹} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۸}}$$

$$= \frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۳} + \frac{۳}{۱۶}} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۴۸}{۲۵} = \frac{۱۶}{۲۵} = ۰/۶۴$$

توجه کنید که احتمال انتخاب هر ظرف برابر $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد.

(ریاضیات گسسته- احتمال: صفحه‌های ۸۶ تا ۹۰)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.kanoon.ir

۱۳۰- (محمدعلی نادرپور)

اگر احتمال پیروزی در هر بار امتحان برنولی را p بگیریم، احتمال شکست آن برابر $(۱-p)$ است. پس داریم: $p \times (۱-p) =$ (اولین پیروزی در تکرار دوم) p

$$(۱-p)p = \frac{۲}{۹} \Rightarrow \begin{cases} p_۱ = \frac{۱}{۳} \\ p_۲ = \frac{۲}{۳} \end{cases}$$

$$P(A) = P \text{ (اولین پیروزی در تکرار چهارم)} = (۱-p)^۳ \times p$$

$$p_۱ = \frac{۱}{۳} \Rightarrow P(A) = (\frac{۲}{۳})^۳ \times \frac{۱}{۳} = \frac{۸}{۸۱}$$

$$p_۲ = \frac{۲}{۳} \Rightarrow P(A) = (\frac{۱}{۳})^۳ \times \frac{۲}{۳} = \frac{۲}{۸۱}$$

پس بیش‌ترین احتمال برابر $\frac{۸}{۸۱}$ است.

(ریاضیات گسسته- توزیع‌های گسسته احتمال: صفحه‌های ۹۴ تا ۹۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.kanoon.ir

۱۲۱- (سیدمحسن فاطمی)

افرازهای سه دسته‌ای $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ به صورت‌های کلی زیر است:

الف) دو دستهٔ یک عضوی و یک دستهٔ سه عضوی: $\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۳}}{۲!}=۱۰$

ب) دو دستهٔ دو عضوی و یک دستهٔ یک عضوی: $\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}}{۲!}=۱۵$

بنابراین کل تعداد افرازها برابر است با: $۱۰+۱۵=۲۵$

تذکر: چون در هر یک از دو وضعیت، دو دسته با تعداد عضو برابر وجود دارد، پس تعداد حالت‌ها بر جایگشت آن‌ها (!۲) تقسیم می‌شود.

(جبر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۶۵ و ۶۶)

✓۱ ۲ ۳ ۴

www.kanoon.ir