



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات
و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:

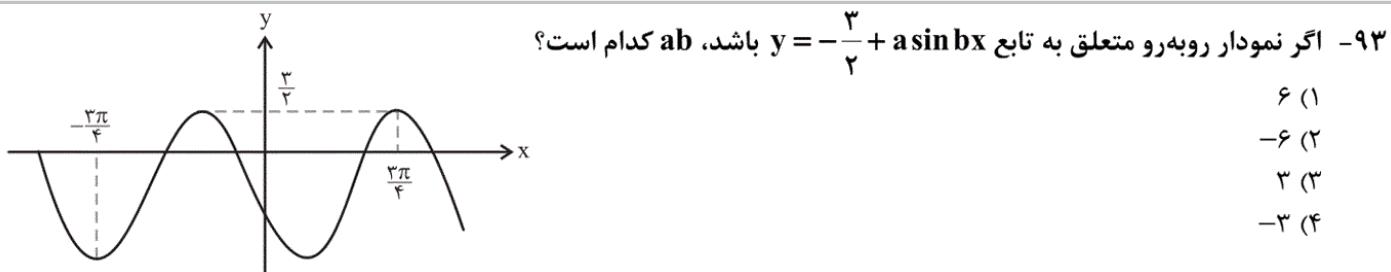


<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>



۹۷ - مجموع جواب‌های متمایز معادله $2\sin^3 x - 3\sin x + 1 = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$
۲) $\frac{3\pi}{2}$
۳) π
۴) 2π

۹۶ - اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ و $f(x) = \frac{ax^3 + \sqrt{x^4 + \Delta x}}{-x^n - ax - 1}$ آن‌گاه حد راست و چپ تابع f در $x = 1$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۱) ۰ و $+\infty$
۲) ۰ و $-\infty$
۳) $+\infty$ و $-\infty$
۴) $-\infty$ و $-\infty$

۹۲ - در تابع $f(x) = \frac{3x - \sqrt{x^2 + 16x}}{ax^n + b}$ باشد، آن‌گاه عدد حقیقی c کدام است؟ ($c \neq 0$)

۱) $\frac{2}{3}$
۲) $\frac{3}{4}$
۳) $\frac{4}{3}$
۴) $\frac{3}{2}$

۸۱ - قدر مطلق تفاضل حد چپ و حد راست تابع $y = \frac{x^2 - |x|}{|x|}$ در $x = 0$ کدام است؟

۱) ۰
۲) ۲
۳) ۲
۴) ۴

۸۴ - اگر $\lim_{x \rightarrow 1} f(x+1) = \frac{x^2 - x}{1 - \sqrt{x+1}}$ باشد، حاصل $f(x+1)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) -۱
۴) -۲

۸۵ - اگر حد کسر $\frac{4x^3 - x^n + x}{2x^3 - 3x^n + 7}$ با شرط $n \in \mathbb{N}$ وقتی $x \rightarrow \infty$ عددی مثبت باشد، آن‌گاه n کدام یک از اعداد زیر نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

-۹۱ بازه $(m, 2)$, بزرگ‌ترین بازه‌ای است که تابع $f(x) = x^3 - nx^2 + 4$ روی آن نزولی است. حاصل $m - n$, کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

-۱ (۲)

-۳ (۱)

-۹۹ اگر نقطه $A(2, 1)$ یکی از اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، عرض از مبدأ خط واصل اکسترمم‌های این تابع کدام است؟

۴ (۴)

۵ (۳)

۲ صفر

-۳ (۱)

$\{-1, 0, 1\}$ (۴)

$\{-1, 1\}$ (۳)

$\{-1, 0\}$ (۲)

$\{0, 1\}$ (۱)

-۹۵ یک توده باکتری پس از t ثانیه $m(t) = \sqrt{2t-1} + 3t$ است. آهنگ متوسط تغییر جرم توده باکتری در بازه زمانی $1 \leq t \leq 5$ با آهنگ لحظه‌ای تغییر جرم آن در کدام لحظه برابر است؟

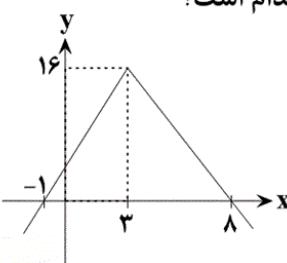
$t = 2/75$ (۴)

$t = 2/5$ (۳)

$t = 2/25$ (۲)

$t = 2$ (۱)

-۹۸ اگر $f(x) = (\frac{x}{x+1})^3$ و شکل زیر، نمودار تابع $(gof)(x)$ باشد، آنگاه مشتق تابع $y = f(g(x))$ در $x = 1$ کدام است؟



-۱ (۱)

$-\frac{3}{4}$ (۲)

$\frac{3}{4}$ (۳)

۱ (۴)

-۸۷ آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \tan \pi x$ نسبت به تغییر x , وقتی x از $\frac{1}{3}$ به $\frac{1}{6}$ تغییر می‌کند، کدام است؟

-2π (۴)

2π (۳)

$-4\sqrt{3}$ (۲)

$4\sqrt{3}$ (۱)

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۱) صفر

-۸۸ بر منحنی تابع $y = \frac{3x-2}{x^2+5}$, چند مماس به موازات محور طول‌ها می‌توان رسم کرد؟

۱) صفر

$\frac{1}{6}$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

-۸۹ اگر $f(x) = \frac{x - \sqrt[3]{x^2}}{x + \sqrt[3]{x^2}}$, آنگاه $f'(x)$ کدام است؟

-۹۰ - اگر خط به معادله $y = 3x + 10$ در نقطه $(-1, 1)$ مماس باشد، a کدام است؟

۴ (۴)

۹ (۳)

-۴ (۲)

-۹ (۱)

-۸۶ - اگر $f(x) = 2x - a$ و مساحت مثلث محصور بین نمودارهای f و f^{-1} و محور x ها برابر ۲۷ باشد، آنگاه نمودار f محور طول‌ها را با کدام طول قطع می‌کند؟ ($a > 0$)

۲ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۶ (۱)

-۸۲ - نمودار تابع $f(x) = |2x - 8| - |x + 3|$ در یک بازه اکیداً صعودی است. ضابطه معکوس آن در این بازه کدام است؟
 $x - 11; x > -7$ (۴) $x + 11; x > -5$ (۳) $x - 11; x > -5$ (۲) $x + 11; x > -7$ (۱)

-۸۳ - اگر $g(x) = \tan x$ و $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$ باشد، آنگاه به ازای $\frac{-\pi}{2} < x < 0^\circ$ ، ضابطه تابع $f \circ g$ کدام است؟

-cos x (۴)

cos x (۳)

-sin x (۲)

sin x (۱)

-۹۴ - کدام یک از نقاط زیر، روی نمودار معکوس تابع $f(x) = x^3 + x$ قرار دارد؟
 $(\sqrt[4]{3}, 4\sqrt[4]{3})$ (۴) $(2, 10)$ (۳) $(6\sqrt{5}, \sqrt{5})$ (۲) $(0, -1)$ (۱)

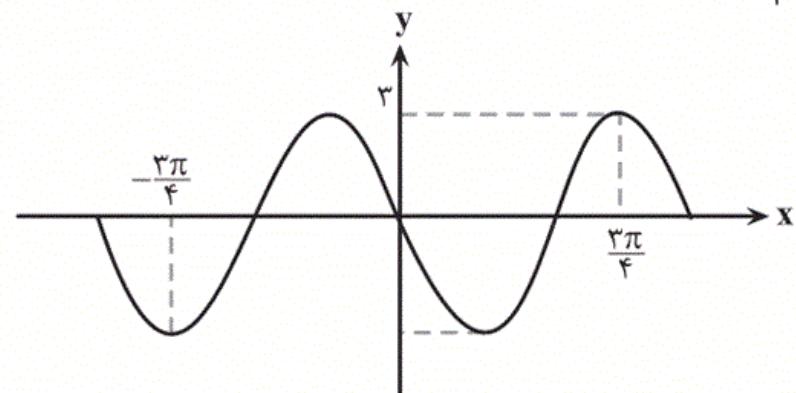
۹۳- گزینه «۲»

(جواب انتها ری)

با توجه به اینکه ورودی تابع $\sin x$ فقط در b ضرب شده است، بنابراین نمودار $\sin x$ در راستای محور x ها فشرده یا کشیده شده است و جایه جایی به سمت چپ و راست نداشته است. چون کل نمودار

به اندازه $\frac{3}{2}$ در راستای محور y ها جایه جا شده، پس اگر نمودار را

به اندازه $\frac{3}{2}$ بالا ببریم به صورت زیر خواهد بود:



$$\Rightarrow |a| = 3 \Rightarrow a = \pm 3$$

فاصله نقاط $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{-3\pi}{4}$ به اندازه $1/5$ برابر دوره تناوب تابع است. بنابراین:

$$\frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}T \Rightarrow T = \pi$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2$$

با توجه به اینکه تابع بعد از x^0 نزولی است، بنابراین $a^0 < b^0$ است. یعنی a و b مختلف علامت هستند.

$$\begin{cases} a = 3, b = -2 \Rightarrow ab = -6 \\ a = -3, b = 2 \Rightarrow ab = -6 \end{cases}$$

۴

۳

۲✓

۱

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \Rightarrow (2\sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$$

$$\xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi} \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$$

۴

۳

۲✓

۱

باید درجه عبارت صورت و مخرج یکسان باشد تا $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ شود.

بنابراین $n = 2$ است. حال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + \sqrt{x^4 + 5x}}{-x^2 - ax - 1} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + x^2}{-x^2} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a+1)x^2}{-x^2} = 1$$

$$\Rightarrow a+1 = -1 \Rightarrow a = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2x^2 + \sqrt{x^4 + 5x}}{-(x-1)^2} = \frac{-2 + \sqrt{6}}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2x^2 + \sqrt{x^4 + 5x}}{-(x-1)^2} = \frac{-2 + \sqrt{6}}{0^-} = -\infty$$

بنابراین حد راست و چپ تابع در $x=1$ برابر $-\infty$ است.

۴

۳

۲✓

۱

«۱- گزینه»

(شهرام ولایی)

برای محاسبه حد در بی‌نهایت از جمله با درجه بزرگتر استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - |x|}{ax^n} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{ax^n} = 2$$

$$\Rightarrow n = 1, a = 2$$

چون c عدد حقیقی و مخالف صفر است، باید حد مخرج کسر صفر باشد،
چون حد صورت صفر است.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - \sqrt{x^2 + 16x}}{2x + b} = c \Rightarrow 4 + b = 0 \Rightarrow b = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - \sqrt{x^2 + 16x}}{2x - 4} : \frac{\cdot}{\cdot} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{9x^2 - x^2 - 16x}{2(x-2)(3x + \sqrt{x^2 + 16x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8x}{2(3x + \sqrt{x^2 + 16x})} = \frac{2}{3} = c$$

۱

۲

۳

۴ ✓

«۱- گزینه»

(فرهاد وغایبی)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - |x|}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x-1)}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - |x|}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x+1)}{-x} = -1$$

$$\Rightarrow |\lim_{x \rightarrow 0^+} y - \lim_{x \rightarrow 0^-} y| = 0$$

۱

۲

۳

۴ ✓

«۲- گزینه»

(حسین طاپیلو)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x+1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{1 - \sqrt{x+1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)(1+\sqrt{x+1})}{-x} = 2$$

۱

۲

۳ ✓

۴

$$\Rightarrow \begin{cases} n > 3 \Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^n}{-3x^n} = \frac{1}{3} \\ n = 3 \Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - x^3 + x}{2x^3 - 3x^3 + 2} = -3 \\ n < 3 \Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3}{2x^3} = 2 \end{cases}$$

پس به ازای $n = 3$ حاصل حد عددی منفی است.

۴

۳✓

۲

۱

«۹۱- گزینه» ۱

(مهرداد ملوندی)

$$f'(x) = 3x^2 - 2nx = 3x\left(x - \frac{2n}{3}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2n}{3} \end{cases}$$

از آنجا که بازه $(m, 2)$ بزرگترین بازه‌ای است که تابع f روی آن نزولی است، پس:

$$\begin{cases} m = 0 \\ \frac{2n}{3} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ n = 3 \end{cases} \Rightarrow m - n = -3$$

۴

۳

۲

۱✓

«۹۹- گزینه» ۳

(شهرام ولایی)

نقطه $A(2, 1)$ روی تابع $f(x)$ قرار دارد. پس باید در معادله آن صدق کند:

$$A(2, 1) \Rightarrow 8 + 4b + d = 1 \Rightarrow 4b + d = -7$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 3(2)^2 + 2b(2) = 0 \Rightarrow 12 + 4b = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = -3 \\ d = 5 \end{cases}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

نقاط $A(2, 1)$ و $B(0, 5)$ روی خط واصل اکسترمم‌های این تابع قرار دارند.

روشن است که عرض از مبدأ این خط برابر ۵ می‌باشد.

۴

۳✓

۲

۱

دامنه تعریف این تابع، مجموعه اعداد حقیقی یعنی $(-\infty, +\infty)$ است. از تابع مشتق می‌گیریم، داریم:

$$y = \frac{1}{14}x^{\frac{14}{3}} - \frac{1}{2}x^{\frac{2}{3}}$$

$$y' = \frac{1}{3}x^{\frac{11}{3}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x^{\frac{4}{3}} - 1)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{3}\left(\frac{x^{\frac{4}{3}} - 1}{\sqrt[3]{x}}\right)$$

$$\text{صورت} = 0 \Rightarrow x^{\frac{4}{3}} - 1 = 0 \Rightarrow (x^{\frac{2}{3}} - 1)(x^{\frac{2}{3}} + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{\frac{2}{3}} - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \\ x^{\frac{2}{3}} + 1 = 0 \Rightarrow \text{غ.ق.ق.} \end{cases}$$

$$\text{خرج} = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x = 0$$

در $x = \pm 1$ مشتق صفر است و در $x = 0$ مشتق وجود ندارد. پس مجموعه

طول نقاط بحرانی تابع عبارتند از: $\{-1, 0, 1\}$

۴✓

۳

۲

۱

$$= \frac{3+15-(4)}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر:

$$m'(t) = \frac{2}{2\sqrt{2t-1}} + 3 = \frac{1}{\sqrt{2t-1}} + 3 \Rightarrow m'(t) = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2t-1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{2t-1} = 2 \Rightarrow 2t-1 = 4$$

$$\Rightarrow 2t = 5 \Rightarrow t = \frac{5}{2} = 2.5$$

۴

۳✓

۲

۱

$$y = (g \circ f)(x)$$

$$\Rightarrow y' = f'(x) \times g'(f(x)) \xrightarrow{x=1} y'(1) = f'(1) \times g'(f(1))$$

$$f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^3 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \times 3\left(\frac{x}{x+1}\right)^2$$

$$\xrightarrow{x=1} f'(1) = \frac{1}{4} \times 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{16}$$

از طرفی $f(1) = \frac{1}{8}$ است، پس $g'(f(1)) = g'\left(\frac{1}{8}\right)$ را نیز می‌خواهیم. با

توجه به شکل $\frac{1}{8} = 4$ است. چون شاخه سمت چپ تابع g ، حالت

خطی داشته و مشتق آن برابر با شب خط است.

$$f'(1) \times g'(f(1)) = \frac{3}{16} \times 4 = \frac{3}{4}$$

۴

۳✓

۲

۱

$$I = \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{6} \Rightarrow y_1 = \tan \pi x_1 = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow y_2 = \tan \pi x_2 = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}} = 4\sqrt{3}$$

۴

۳

۲

۱✓

«۳-گزینه» ۸۸

(محمد بهیرایی)

اگر خط مماس در یک نقطه، موازی محور x ها باشد، شبیخ خط مماس (مشتق تابع) در آن نقطه برابر صفر است، یعنی باید بررسی کرد که در چند نقطه، مشتق این تابع صفر می‌شود.

$$y = \frac{3x - 2}{x^2 + 5} \Rightarrow y' = \frac{3(x^2 + 5) - 2x(3x - 2)}{(x^2 + 5)^2} = \frac{-3x^2 + 4x + 15}{(x^2 + 5)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow -3x^2 + 4x + 15 = 0$$

$$\Delta = (4)^2 - 4(-3)(15) > 0 \Rightarrow \text{معادله دو ریشهٔ متمایز دارد}$$

۴

۳✓

۲

۱

«۴-گزینه» ۸۹

(کاظم آبادی)

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x} - 1)}{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x} + 1)} \xrightarrow{x \neq 0} f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}(\sqrt[3]{x} + 1) - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}(\sqrt[3]{x} - 1)}{(\sqrt[3]{x} + 1)^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{\frac{2}{3} - 0}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{3}$$

۴✓

۳

۲

۱

«۴-گزینه»

(آرش ریمی)

مختصات نقطه تماس، در معادله خط مماس صدق می‌کند، پس:

$$y = 3x + 10 \xrightarrow{x=-1} y = 3(-1) + 10 = 7 \Rightarrow A(-1, 7)$$

مختصات نقطه تماس در معادله منحنی نیز صدق می‌کند، پس:

$$7 = -a - b + 2 \Rightarrow a + b = -5 \quad (1)$$

شیب خط مماس، برابر با مشتق تابع به ازای طول نقطه تماس است، پس:

$$\begin{cases} y' = 3ax^2 + b \xrightarrow{x=-1} m_1 = 3a + b \\ y = 3x + 10 \Rightarrow m_2 = 3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{m_1=m_2} 3a + b = 3 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 3 \\ a + b = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -9 \end{cases}$$

۱✓

۳

۲

۱

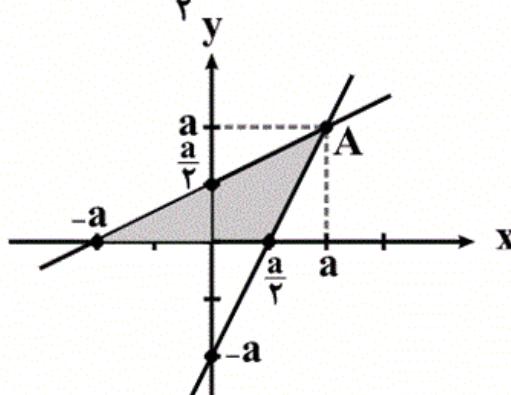
«۲-گزینه»

(شهرام ولایی)

ابتدا نقطه تقاطع دو تابع f و f^{-1} را می‌یابیم:

$$y = f(x) = 2x - a \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+a}{2}$$

$$2x - a = \frac{x+a}{2} \Rightarrow x = a \Rightarrow y = a \Rightarrow A(a, a)$$



$$S = \frac{\frac{3a}{2} \times a}{2} = 27 \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$$

$$f(x) = 2x - 6$$

$$2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

بنابراین نمودار $f(x)$ محور طول‌ها را در $x = 3$ قطع می‌کند.

۱

۳

۲✓

۱

$$f(x) = \begin{cases} -(2x - 4) + (x + 3) = -x + 11 & , \quad x < -3 \\ -(2x - 4) - (x + 3) = -3x + 5 & , \quad -3 \leq x \leq 4 \\ (2x - 4) - (x + 3) = x - 11 & , \quad x > 4 \end{cases}$$

بنابراین تابع در بازه $x > 4$ صعودی است (خط با شیب مثبت)

جای x و y را عوض می‌کنیم

$$y = x - 11 \Rightarrow x = y + 11 \longrightarrow y = x + 11$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = x + 11$$

برد تابع f در این بازه، همان دامنه f^{-1} می‌باشد. برای تعیین دامنه f^{-1}

برد f را در این بازه تعیین می‌کنیم:

$$y = x - 11 \xrightarrow{x > 4} x - 11 > 4 - 11 \Rightarrow x - 11 > -7$$

$$\Rightarrow f(x) > -7$$

۴

۳

۲

۱✓

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} \Rightarrow (fog)(x) = \sqrt{\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}} \\ g(x) = \tan x \end{cases}$$

$$\frac{1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}}{(fog)(x) = \sqrt{\cos^2 x \tan^2 x}}$$

$$= \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x| \xrightarrow{\frac{-\pi}{2} < x < 0} (fog)(x) = -\sin x$$

۴

۳

۲✓

۱

نکته: اگر نقطه $A(x, y)$ روی نمودار تابع معکوس پذیر $y = f(x)$ قرار

داشته باشد، نقطه (x, y) روی نمودار معکوس تابع f قرار دارد. با توجه

به نکته بالا، در گزینه «۲»، داریم:

$$f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^3 + \sqrt{5} = \sqrt{5}(5+1) = 6\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow A(\sqrt{5}, 6\sqrt{5}) \in f \Rightarrow A'(6\sqrt{5}, \sqrt{5}) \in f^{-1}$$

۴

۳

۲✓

۱