

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات
و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

۱۰۱- مجموع ریشه‌های معادله \bar{O} کدام است؟

$$\begin{bmatrix} x & -1 & 1 \\ x & 2 & 1 \\ -1 & 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ x \\ -1 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

۳ (۴) -۳ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۱)

۱۰۲- اگر $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 13 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ باشند، آنگاه دترمینان ماتریس $A^{-1}B$ کدام است؟

۵۲ (۴) ۲۶ (۳) ۱۳ (۲) $\frac{13}{2}$ (۱)

۱۰۳- اگر $\alpha A - \beta I = A^{-1}$ باشد، آنگاه حاصل $\alpha - \beta$ کدام است؟

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

-۴ (۴) ۴ (۳) ۳ (۲) -۳ (۱)

۱۰۴- به ازای کدام مقدار m ، دستگاه معادلات $\begin{bmatrix} m & 3 \\ 2 & m+5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ 2n+1 \end{bmatrix}$ می‌تواند بی‌شمار جواب داشته باشد؟

-۶ (۴) -۳ (۳) -۲ (۲) ۱ (۱)

۱۰۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $\frac{1}{\lambda} A^2$ کدام است؟

۷۲ (۴) ۲۲ (۳) ۹ (۲) $\frac{9}{\lambda}$ (۱)

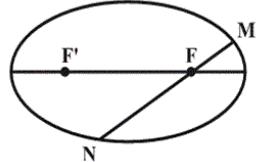
۱۰۶- شعاع دایره‌ای که با دایرۀ $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ هم مرکز و برخط $3x + 4y = 4$ مماس باشد، کدام است؟

$\frac{6}{5}$ (۴) ۱ (۳) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۱)

۱۰۷- دو دایرۀ ۱: $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ و ۲: $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 1$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

(۴) مماس داخل (۳) متقاطع (۲) متقاطع (۱) متخارج

- ۱۰۸ - در شکل زیر F و F' کانون‌های یک بیضی هستند، که طول قطرهای بزرگ و کوچک آن به ترتیب برابر ۱۰ و ۶ است. محیط مثلث MNF' کدام است؟



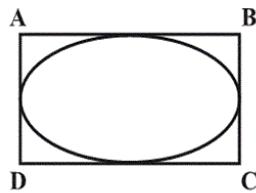
۱۲ (۲)

۱۰ (۱)

۲۰ (۴)

۱۶ (۳)

- ۱۰۹ - در شکل زیر، یک بیضی به خروج از مرکز $\frac{\sqrt{6}}{3}$ درون یک مستطیل محاط شده است. طول قطر این مستطیل، چند برابر طول ضلع بزرگ مستطیل است؟



$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۲)

$\sqrt{3}$ (۱)

$\sqrt{2}$ (۴)

$\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۳)

- ۱۱۰ - به ازای کدام مقدار m ، خط $x = 2$ خط هادی سهمی به معادله $y^2 + 6y + 4x + m = 0$ است؟

۱۳ (۴)

۵ (۳)

۱ (۲)

-۳ (۱)

- ۱۱۱ - اگر $a + 7^{41}$ مضرب ۱۳ باشد، آنگاه کوچکترین عدد طبیعی a کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

- ۱۱۲ - باقی‌مانده تقسیم عدد طبیعی a بر اعداد ۶ و ۷ به ترتیب برابر ۴ و ۳ است. باقی‌مانده تقسیم عدد طبیعی a بر ۲۱ کدام است؟

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

- ۱۱۳ - اگر باقی‌مانده تقسیم 2^{45} بر ۱۷، برابر a باشد، آنگاه عدد $3a + 2$ به کدام دسته هم‌نهشتی به پیمانه ۴ تعلق دارد؟

۲۰۲۱ (۴)

۲۰۲۰ (۳)

۱۳۹۹ (۲)

۱۳۹۸ (۱)

- ۱۱۴ - مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد سه‌ رقمی n که به ازای آن، دو عدد $5n - 4$ و $4n + 4$ نسبت به هم اول نباشند، کدام است؟

۲۵ (۴)

۱۷ (۳)

۱۵ (۲)

۱۰ (۱)

- ۱۱۵ - چند عدد شش رقمی به صورت $51x5y2$ وجود دارد، به طوری که بر ۳۶ بخش‌پذیر باشد؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

- ۱۱۶ - مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی سه رقمی x که در معادله $2^{12} = 9y + 9x$ صدق می‌کند، چقدر است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)



- ۱۱۷ - گراف شکل مقابل دارای چند دور است؟

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)

- ۱۱۸ - گرافی ساده از مرتبه ۸ و اندازه ۱۱، فقط دارای رئوسی از درجه‌های ۲، ۳ و ۴ است. اگر تعداد رأس‌های درجه ۲ در این گراف، دو واحد بیشتر از تعداد رأس‌های درجه ۴ باشد، آنگاه این گراف چند رأس از درجه ۳ دارد؟

۴ (۲) یا ۴

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

- ۱۱۹ - شخصی می‌خواهد یک مهمانی ۵ نفره از میان ۹ نفر از دوستان خود برگزار کند. اگر امکان دعوت از دو فرد A و B با هم وجود نداشته باشد، به چند طریق می‌تواند مهمان‌ها را انتخاب کند؟

۱۲۶ (۴)

۹۱ (۳)

۷۰ (۲)

۴۲ (۱)

- ۱۲۰ - ۴ نوع گل در اختیار داریم. به چند طریق می‌توانیم ۷ شاخه گل از میان آن‌ها انتخاب کنیم به‌گونه‌ای که این شاخه‌ها دقیقاً به ۳ نوع گل تعلق داشته باشند؟

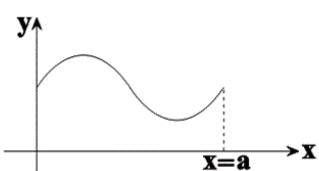
۸۰ (۴)

۶۰ (۳)

۲۰ (۲)

۱۵ (۱)

- ۹۶ - در شکل مقابل با افزایش مقادیر x از $x=a$ تا $x=0$ ، مقدار مشتق تابع چگونه تغییر می‌کند؟



۱) افزایش - کاهش

۲) افزایش - کاهش - افزایش

۳) کاهش - افزایش

۴) کاهش - افزایش - کاهش

- ۹۷ - عرض از مبدأ خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = (x-2)\sqrt{x^2 + 5}$ در نقطه $x=2$ واقع بر آن، کدام است؟

-۶ (۴)

-۵ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱)

- ۹۸ تعداد نقاط مشتق ناپذیر تابع $g(x) = |x| + a$ و $f(x) = \sqrt{x^2 + ax + 1}$ با هم برابر است. چند مقدار صحیح برای a وجود دارد؟

۴) صفر

۳) بی‌شمار

۲) ۱

۱) ۲

- ۹۳ حاصل حد راست تابع $f(x) = \frac{[2-x]}{\sqrt{x+6}-x}$ در نقطه $x=3$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است).

- ∞ ۴)

+ ∞ ۳)

-۱ ۲)

۰) صفر

- ۹۴ حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2+1)^2 - (x^2-1)^2}{(2x+1)^2 + (2x-1)^2}$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ ۴)

۲ ۳)

۰) صفر

+ ∞ ۱)

- ۹۵ اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^m[\frac{1}{x}] + 6x^n - 1}{4x^m - (1+n)x^m + 5} = \frac{3}{2}$ باشد، حاصل mn کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است).

۱ ۲)

-۱ ۱)

۴) هر مقدار حقیقی می‌تواند باشد.

$\frac{1}{2}$ ۳)

- ۹۶ اگر $x = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟ $g(x) = (1 - \sin x)f'(x) - f(x)\cos x$ ، مقدار تابع $f(x) = \frac{1}{\cos x} + \tan x$

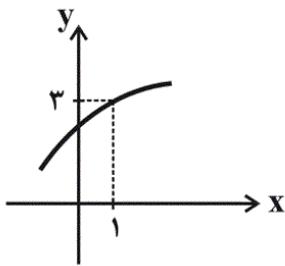
$\frac{1}{2}$ ۴)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳)

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲)

$-\frac{1}{2}$ ۱)

- ۱۰۰ - نمودار تابع f به صورت زیر می‌باشد. اگر $y = f(3x)$ باشد، مشتق تابع $y = f(x) + 3$ به ازای $x = 1$ کدام است؟



۱۰ (۲)

است؟

۲۱ (۴)

۵ (۱)

۱۵ (۳)

- ۸۱ - اگر دامنه تابع $g(x) = 3f(2x-1) + 3$ باشد، دامنه تابع $y = f(2x-1) - 2$ کدام است؟

[−۳, ۱] (۴)

[−۳, ۱] (۳)

[−۳, ۱] (۲)

[−۱, ۳] (۱)

- ۸۲ - اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$ و $g(x) = \sqrt{x+2} + 1$ باشند، با کدام یک از انتقال‌های زیر نمودار $f \circ g$ بر نمودار g منطبق می‌شود؟

۹ واحد به چپ، ۱ واحد به پایین

۹ واحد به بالا

۹ واحد به راست، ۱ واحد به پایین

۹ واحد به بالا

- ۸۳ - نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -(2-x)^3$ از کدام ناحیه نمی‌گذرد؟

۴) چهارم

۳) سوم

۲) دوم

۱) اول

- ۸۴ - اگر بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x) = |x-a| - |x-b|$ در آن اکیداً نزولی است، به صورت $[-3, 5]$ باشد، دو تایی مرتب (a, b)

کدام است؟

(−۳, ۵) (۴)

(−۵, ۳) (۳)

(۵, −۳) (۲)

(۳, −۵) (۱)

- ۸۵ - اگر عبارت $b + ax^3 + 3x^4$ بر $(x^2 - 1)$ بخش‌پذیر باشد، زوج مرتب (a, b) کدام است؟

۴) اطلاعات مسئله ناقص است.

(۲, ۱) (۳)

(۰, −۳) (۲)

(−۳, ۰) (۱)

- ۸۶ - دورهٔ تناوب تابع $y = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$ کدام است؟

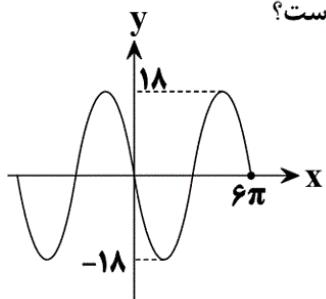
۴) دورهٔ تناوب ندارد.

π (۳)

$\frac{\pi}{2}$ (۲)

$\frac{\pi}{4}$ (۱)

-۸۷ اگر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = b \sin(ax)$ به صورت زیر باشد، کمترین مقدار $a + b$ کدام است؟



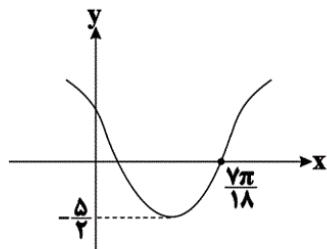
$$-\frac{5\pi}{3} \quad (۲)$$

$$-\frac{1}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{5\pi}{3} \quad (۱)$$

$$-18 \quad (۳)$$

-۸۸ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos(3x + b)$ را نشان می‌دهد. با فرض این‌که $a, b \in (0, \pi)$ باشد، نمودار این تابع



محور y ها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

$$1/25 \quad (۲)$$

$$1/5 \quad (۴)$$

$$1 \quad (۱)$$

$$0/75 \quad (۳)$$

-۸۹ حاصل عبارت $A = (\tan 55^\circ - 1)(1 - \tan 80^\circ)$ کدام است؟

$$-2\sqrt{2} \quad (۴)$$

$$-4 \quad (۳)$$

$$-3\sqrt{3} \quad (۲)$$

$$-2 \quad (۱)$$

-۹۰ کدام گزینه جزء جواب‌های کلی معادله $\cos 5x = \sin x$ می‌باشد؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{8} \quad (۴)$$

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (۳)$$

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \quad (۲)$$

$$\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \quad (۱)$$

-۹۱ جواب‌های معادله $\sin x + \cos 2x = 1$ بر روی دایره مثلثاتی، کدام چندضلعی را ایجاد می‌کنند؟

(۲) مربع

(۱) مستطیل

(۴) مثلث متساوی الساقین

(۳) ذوزنقه متساوی الساقین

-۹۲ جواب کلی معادله $\sin^6 x + \cos^6 x = 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) کدام است؟

$$x = \frac{k\pi}{2} \quad (۴)$$

$$x = k\pi - \frac{\pi}{2} \quad (۳)$$

$$x = k\pi \quad (۲)$$

$$x = \frac{2k\pi}{3} \quad (۱)$$

$$\begin{bmatrix} x & -1 & 1 \\ x & 2 & 1 \\ -1 & 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ x \\ -1 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x^2 + 3 & x+1 & 2x+6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ x \\ -1 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

$$\Rightarrow [2x^2 + 6 + x^2 + x - 2x - 6] = \bar{O} \Rightarrow 3x^2 - x = 0$$

$$\Rightarrow x(3x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

بنابراین مجموع ریشه‌های معادله برابر $\frac{1}{3}$ است.

(ماتریس و کاربردها)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$|A| = 13 \times 2 - 6 \times 4 = 2 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$$

$$|B| = 5 \times 4 - 3 \times (-2) = 26$$

$$|A^{-1}B| = |A^{-1}| |B| = \frac{1}{2} \times 26 = 13$$

(ماتریس و کاربردها)

۴

۳

۲

۱

ابتدا وارون ماتریس A را محاسبه می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 3 \times 4 - (-2) \times (-5) = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

حال با توجه به معادله داده شده داریم:

$$\alpha A - \beta I = A^{-1} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3\alpha & -2\alpha \\ -5\alpha & 4\alpha \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

۴

۳

۲

۱

دستگاه معادلات در صورتی بی‌شمار جواب دارد که

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$$

باشد، بنابراین داریم:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{m}{\gamma} = \frac{\gamma}{m+\delta} \Rightarrow m(m+\delta) = \gamma \Rightarrow m^2 + \delta m - \gamma = 0$$

$$\Rightarrow (m+\gamma)(m-\gamma) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -\gamma \\ m = \gamma \end{cases}$$

اگر $m = \gamma$ باشد، آنگاه داریم:

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{1}{\gamma} = \frac{n}{2n+1} \Rightarrow 2n+1 = \gamma n \Rightarrow 1 = \gamma n$$

غیرممکن

اگر $m = -\gamma$ باشد، آنگاه داریم:

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{-\gamma}{\gamma} = \frac{n}{2n+1} \Rightarrow n = -\gamma(2n+1)$$

$$\Rightarrow \gamma n = -\gamma \Rightarrow n = -\frac{\gamma}{\gamma}$$

پس تنها به ازای $n = -\frac{\gamma}{\gamma}$ و $m = -\gamma$ دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

(ماتریس و کاربردها)

۴✓

۳

۲

۱

ماتریس A یک ماتریس مربعی از مرتبه ۳ است، بنابراین داریم:

$$\left| \frac{1}{\lambda} A^2 \right| = \left(\frac{1}{\lambda} \right)^3 |A|^2 = \left(\frac{1}{\lambda} \right)^3 \times 24^2 = \left(\frac{1}{\lambda} \times 24 \right)^3 \times \frac{1}{\lambda} = \frac{9}{\lambda}$$

(ماتریس و کاربردها)

۴

۳

۲

۱✓

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0 \Rightarrow \text{مرکز دایره } O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (1, -1)$$

شعاع دایره برابر فاصله نقطه $O(1, -1)$ از خط $3x + 4y - 4 = 0$ است.

بنابراین داریم:

$$R = \frac{|3(1) + 4(-1) - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{5}{5} = 1$$

(آشنازی با مقاطع مفروతی)

۴

۳ ✓

۲

۱

ابتدا مرکز و شعاع هر یک از دایره‌ها را به دست می‌آوریم:

$$C_1 : x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$$

مرکز: $O_1(2, -2)$

$$\text{شعاع } R_1 = \frac{1}{2} \sqrt{(-4)^2 + 4^2 - 4(-1)} = 3$$

$$C_2 : x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$$

مرکز: $O_2(1, -1)$

$$\text{شعاع } R_2 = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + 2^2 - 4(1)} = 1$$

$$O_1O_2 = \sqrt{(1-2)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{2}$$

دو دایره متقابلند $\Rightarrow |R_1 - R_2| < O_1O_2$

(آشنازی با مقاطع مفروతی)

۴ ✓

۳

۲

۱

می‌دانیم مجموع فواصل هر نقطهٔ واقع بر بیضی از دو کانون آن برابر طول قطر

بزرگ بیضی است، بنابراین داریم:

$$\Delta MNF' \text{ محیط} = MN + MF' + NF' = (MF + NF) + MF' + NF'$$

$$= (MF + MF') + (NF + NF') = 10 + 10 = 20$$

(آشنایی با مقاطع مفروత)

✓

۳

۲

۱

«۲- گزینه»

طول اضلاع بزرگ و کوچک این مستطیل به ترتیب برابر طول قطرهای بزرگ

و کوچک بیضی است، بنابراین داریم:

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\text{قطر مستطیل}}{\text{ضلع بزرگ مستطیل}} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2}}{AB} = \frac{\sqrt{4a^2 + 4b^2}}{2a}$$

$$= \sqrt{\frac{4a^2 + 4b^2}{4a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(آشنایی با مقاطع مفروత)

۳

۲✓

۱

ابتدا معادله سهمی را به حالت متعارف (استاندارد) تبدیل می کنیم:

$$y^2 + 6y + 4x + m = 0 \Rightarrow y^2 + 6y + 9 = -4x - m + 9$$

$$\Rightarrow (y+3)^2 = -4\left(x - \frac{9-m}{4}\right)$$

سهمی افقی است و دهانه آن رو به چپ باز می شود. داریم:

$$S\left(\frac{9-m}{4}, -3\right) : \text{رأس سهمی}$$

$$4a = 4 \Rightarrow a = 1$$

$$x = \frac{9-m}{4} + 1 = \frac{13-m}{4} : \text{معادله خط هادی}$$

$$\xrightarrow{x=2} \frac{13-m}{4} = 2 \Rightarrow m = 5$$

(آشنایی با مقاطع مفروضی)

۴

۳

۲

۱

$$y^2 = 49 \equiv -3 \xrightarrow{\text{بتوان}} y^2 \equiv -27 \equiv -1$$

$$\xrightarrow{\text{بتوان}} y^{42} \equiv -1 \equiv -14$$

$$\xrightarrow{\frac{+y}{(y, 13)=1}} y^{41} \equiv -2 \Rightarrow y^{41} + a \equiv a - 2 \equiv 0 \Rightarrow a \equiv 2$$

بنابراین کوچکترین عدد طبیعی a ، برابر ۲ است.

(آشنایی با نظریه اعداد)

۴

۳

۲

۱

$$\begin{aligned} a &= 6k + 4 \xrightarrow{\times 7} 7a = 42k + 28 \\ a &= 7k' + 3 \xrightarrow{\times 6} 6a = 42k' + 18 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} a = 42 \underbrace{(k - k')}_{q} + 10$$

$$\Rightarrow a = 21 \times \underbrace{q}_{q'} + 10 = 21q' + 10$$

(آشنایی با نظریه اعداد)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$2^4 = 16 \equiv -1 \xrightarrow{\text{به توان } 11} 2^{44} \equiv -1$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2^{45} \equiv -2 \equiv 15 \Rightarrow a = 15$$

$$3a + 2 = 3(15) + 2 = 47 \equiv 3$$

در بین گزینه‌های داده شده، باقی‌مانده تقسیم ۱۳۹۹ بر ۴، برابر ۳ است.

بنابراین داریم:

$$3a + 2 \in [1399]_4$$

(آشنایی با نظریه اعداد)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\longrightarrow d \mid 61 \Rightarrow \begin{cases} d=1 \\ d=61 \end{cases}$$

$$61 \mid 4n - 5 \Rightarrow 4n - 5 \equiv 0 \Rightarrow 4n \equiv 5 \equiv -56$$

$$\frac{+4}{(4,61)=1} \rightarrow n \equiv -14 \equiv 47 \Rightarrow n = 61k + 47$$

بزرگترین عدد ۳ رقمی n به ازای $k = 15$ به دست می‌آید:

$$k = 15 \Rightarrow n = 61 \times 15 + 47 = 962 \Rightarrow 17 = \text{مجموع ارقام}$$

(آشنایی با نظریه اعداد)

۴

۳

۲

۱

اگر عددی بر ۳۶ بخش‌پذیر باشد، آنگاه بر اعداد ۴ و ۹ بخش‌پذیر است.

عددی بر ۴ بخش‌پذیر است که دو رقم سمت راست آن بر ۴ بخش‌پذیر

باشد، پس عدد دو رقمی $\overline{y2}$ باید بر ۴ بخش‌پذیر باشد که در نتیجه y

یک رقم فرد است. از طرفی عددی بر ۹ بخش‌پذیر است که مجموع ارقام

آن بر ۹ بخش‌پذیر باشد. داریم:

$$\overline{51x5y2} \equiv 0 \Rightarrow x + y + 13 \equiv 0 \Rightarrow x + y \equiv -13 \equiv 5 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 14 \end{cases}$$

$$y = 1 \Rightarrow x = 4 \quad y = 3 \Rightarrow x = 2$$

$$y = 5 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 9 \end{cases} \quad y = 7 \Rightarrow x = 7$$

$$y = 9 \Rightarrow x = 5$$

بنابراین ۶ عدد شش رقمی با مشخصات مورد نظر وجود دارد.

(آشنایی با نظریه اعداد)

۴

۳

۲

۱

$$16x + 9y = 2^{12} \Rightarrow 16x \equiv 2^{12} = 2^4 \times 2^8$$

$$\frac{\div 16}{(16, 9) = 1} \rightarrow x \equiv 2^8 = 256 \Rightarrow x \equiv 2 + 5 + 6 \equiv 13 \equiv 4$$

$$\Rightarrow x = 9k + 4$$

کوچکترین عدد طبیعی سه رقمی x به ازای $k = 11$ حاصل می‌شود:

$$k = 1 \Rightarrow x = 9 \times 11 + 4 = 103 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 4$$

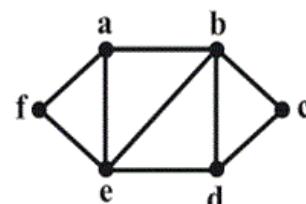
(آشنایی با نظریه اعداد)

۴

۳

۲

۱



اگر رئوس گراف را مطابق شکل نام‌گذاری کنیم، آنگاه دورهای این گراف

عبارت‌اند از:

دورهای به طول ۳: afea, abea, bdeb, bedb

دورهای به طول ۴: abdea, abefa, bcdeb

دورهای به طول ۵: abcdea, abdefa

دور به طول ۶: abcdefa

بنابراین در مجموع ۱۰ دور در این گراف وجود دارد.

(گراف و مدل‌سازی)

۴

۳

۲

۱

فرض کنید تعداد رأس‌های درجه ۳ و ۴ در این گراف به ترتیب برابر x و

y باشد. در این صورت تعداد رأس‌های درجه ۲ برابر $2 + y$ است و داریم:

$$p = \lambda \Rightarrow x + y + 2 + y = \lambda \Rightarrow x + 2y = 6$$

$$2q = 22 \Rightarrow 3x + 4y + 2(y + 2) = 22$$

$$\Rightarrow 3x + 6y = 18 \Rightarrow x + 2y = 6$$

با توجه به اینکه تعداد رأس‌های فرد یک گراف همواره عددی زوج است،

پس مقدار x یعنی تعداد رأس‌های درجه ۳ برابر ۲ یا ۴ است.

(گراف و مدل‌سازی)

۴ ✓

۳

۲

۱

دو حالت برای انتخاب مهمان‌ها وجود دارد:

حالت اول: هیچ کدام از دو فرد A و B دعوت نشوند. در این صورت

مهمان‌ها از میان ۷ نفر دیگر انتخاب می‌شوند که تعداد انتخاب‌ها برابر است

با:

$$\binom{7}{5} = 21$$

حالت دوم: یک نفر از میان A و B انتخاب شود. در این صورت ۴ مهمان

دیگر از میان ۷ نفر باقی‌مانده انتخاب می‌شوند که تعداد انتخاب‌ها برابر است

با:

$$\binom{2}{1} \binom{7}{4} = 2 \times 35 = 70$$

بنابراین تعداد روش‌های انتخاب مهمان‌ها برابر است با:

$$21 + 70 = 91$$

(ترکیبیات)

۴

۳

۲

۱

فرض کنید تعداد شاخه گل‌های انتخاب شده از این ۴ نوع گل را با x_1 ,

x_2 ، x_3 و x_4 نشان دهیم. در هر روش انتخاب، تعداد شاخه گل‌های

انتخاب شده از یک نوع باید برابر صفر بوده و از ۳ نوع گل دیگر، حداقل

یک شاخه انتخاب شود. اگر $= ۰$ باشد، آنگاه داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 = ۷$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی} = \binom{۷-۱}{۳-۱} = \binom{۶}{۲} = ۱۵$$

با توجه به اینکه می‌توان تعداد شاخه گل‌های انتخابی از هر یک از ۳ نوع دیگر

را نیز برابر صفر فرض کرد، بنابراین تعداد راه‌های انتخاب این شاخه گل‌ها

برابر است با:

$$4 \times 15 = 60$$

(ترکیبیات)

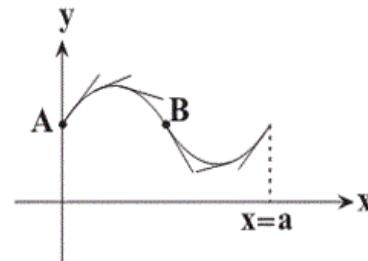
۴

۳ ✓

۲

۱

با توجه به شکل، مقدار مشتق تابع $y = f(x)$ که همان شیب خط مماس برنمودار است، از نقطه A تا B پیوسته کاهش می‌یابد و سپس از B به بعد در حال افزایش است.



(مشتق)

۴

۳✓

۲

۱

طول نقطه در صورت سؤال داده شده و عرض آن هم $f(2) = 0$ است. برای

تعیین شیب از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)\sqrt{x^2 + 5} - 0}{x - 2} \\ &= \sqrt{2^2 + 5} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow m = 3 \end{aligned}$$

حال معادله خط مماس را می‌نویسیم:

$$\left. \begin{array}{l} A(2, 0) \\ m = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = 3(x - 2) \Rightarrow y = 3x - 6$$

$$\xrightarrow{\text{عرض از مبدأ}} y = -6$$

(مشتق)

۴✓

۳

۲

۱

ابتدا تعداد نقاط مشتق ناپذیر تابع را بسته به مقادیر مختلف a تعیین می‌کنیم:

اگر $a > 0$ باشد، آن‌گاه شکل نمودار به صورت  می‌شود که یک نقطه

مشتق ناپذیر دارد و اگر $a < 0$ باشد، شکل نمودار به صورت

می‌شود که سه نقطه مشتق ناپذیر دارد.



حال برای f نیز می‌دانیم که ریشه‌های زیر را دیگال نقاط مشتق ناپذیر

هستند. پس اگر ریشه‌های عبارت درجه دوم $x^2 + ax + 1$ را تعیین کنیم،

همان نقاط مشتق ناپذیری خواهند بود که بسته به علامت دلتای آن، می‌تواند

صفر، ۱ و یا ۲ باشد.

پس تنها حالتی که مطلوب مسئله رخ می‌دهد، یک نقطه مشتق ناپذیری است.

$$a > 0 \quad (I)$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow a^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$$

غیر

پس تنها عدد صحیح قابل قبول، $a = 2$ است.

(مشتق)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[2-x]}{\sqrt{x+6}-x} &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-2}{\sqrt{x+6}-x} \times \frac{\sqrt{x+6}+x}{\sqrt{x+6}+x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-2(\sqrt{x+6}+x)}{x+6-x} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-2(6)}{-(x^2-x-6)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{12}{(x-3)(x+2)} = +\infty
 \end{aligned}$$

توجه کنید که در همسایگی راست نقطه ۳، تابع $y = [2-x]$ برخط

$y = -2$ منطبق است:

$$3 < x < 4 \Rightarrow -4 < -x < -3 \Rightarrow -2 < 2-x < -1 \Rightarrow [2-x] = -2$$

(هرهای نامتناهی - مر در بی‌نهایت)

۴

۳ ✓

۲

۱

ابتدا اتحادهای صورت و مخرج را باز می‌کنیم:

$$\frac{(x^4+1)^4 - (x^4-1)^4}{(2x+1)^4 + (2x-1)^4} = \frac{(x^4+2x^2+1) - (x^4-2x^2+1)}{(4x^4+4x+1) + (4x^4-4x+1)} = \frac{4x^2}{8x^4+2}$$

حال حاصل حد کسر را می‌یابیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{8x^4+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{8x^4} = \frac{1}{2}$$

(هرهای نامتناهی - مر در بی‌نهایت)

۴ ✓

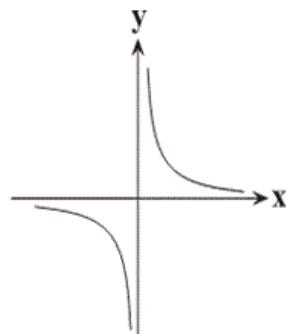
۳

۲

۱

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

می‌دانیم:



با توجه به نمودار مشخص است که:

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow 0^- \Rightarrow \left[\frac{1}{x} \right] = -1$$

حال حد عبارت داده شده را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 \left[\frac{1}{x} \right] + 6x^2 - 1}{4x^4 - (1+n)x^m + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3 + 6x^2 - 1}{4x^4 - (1+n)x^m + 5} = \frac{3}{2}$$

از طرفی با توجه به این‌که حاصل حد فوق برابر یک عدد حقیقی شده است،

می‌توان نتیجه گرفت که درجه بزرگ‌ترین جمله عبارت صورت و مخرج با

هم برابرند.

لذا $m = 3$ بوده و خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3 + 6x^2 - 1}{-(1+n)x^3 + 4x^2 + 5} = \frac{3}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3}{-(1+n)x^3} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{(1+n)} = \frac{3}{2} \Rightarrow n = \frac{1}{3} \Rightarrow mn = 1$$

(هرهای نامتناهی - هر در بی‌نهایت)

۴

۳

۲ ✓

۱

با توجه به ضابطه g , در می‌یابیم تابع g مشتق تابع

$$h(x) = (1 - \sin x)f(x)$$

$$h(x) = (1 - \sin x) \left(\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} \right) = \frac{(1 - \sin x)}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos x}{\cos x} = \cos x$$

$$\Rightarrow g(x) = h'(x) = -\sin x \Rightarrow g\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(مشتق)

۱

۲

۳✓

۴

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1) + 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f(x) - 1)(f(x) - 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f(x) - f(1))(f(x) - 1)}{x - 1}$$

$$= f'(1) \times \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - 1) = 3f'(1)$$

$$\Rightarrow 3f'(1) = 1 \circ \Rightarrow f'(1) = \Delta$$

$$y = f(3x) \Rightarrow y' = 3f'(3x) \xrightarrow{x=\frac{1}{3}} y' = 3f'(1) = 3 \times \Delta = 1\Delta$$

(مشتق)

۱

۲✓

۳

۴

ابتدا دامنه f را به دست آورده و سپس از روی آن دامنه

$$g(x) = 3f(4x - 2) - 3$$

$$-2 \leq x \leq 6 \Rightarrow -4 \leq 2x \leq 12 \Rightarrow -5 \leq 2x - 1 \leq 11$$

پس دامنه f به صورت $[-5, 11]$ می‌باشد. برای به دست آوردن دامنه g

$$-5 \leq 4x - 2 \leq 11 \Rightarrow -3 \leq 4x \leq 13 \Rightarrow -\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{13}{4}$$

(تابع)

۴

۳

۲

۱

$$f(x) = \sqrt{(x-1)^2 - 9}, \quad g(x) = \sqrt{x+2} + 1$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \in [-2, +\infty) \mid \sqrt{x+2} + 1 \in (-\infty, -2] \cup [4, +\infty)\}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+2} + 1 \geq 4 \Rightarrow x+2 \geq 9 \Rightarrow x \geq 7 \Rightarrow D_{fog} = [7, +\infty)$$

$$(fog)(x) = \sqrt{x-7} \Rightarrow (fog)(x+9) + 1 = g(x)$$

پس نمودار تابع fog باید ۹ واحد به چپ و ۱ واحد به بالا انتقال یابد تا بر نمودار تابع g منطبق شود.

(تابع)

۴

۳

۲

۱

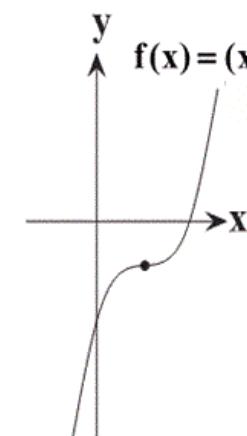
ضابطه تابع را به صورت

$$f(x) = (x-2)^3 - 1$$

برای رسم آن، نمودار تابع $y = x^3$ را

۲ واحد به راست و یک واحد به پایین

می‌بریم:



همان‌طور که می‌بینید نمودار تابع از ناحیه دوم عبور نمی‌کند.

(تابع)

۴

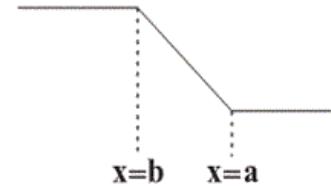
۳

۲

۱

چون تابع به صورت آبشاری یا سرسره‌ای است و قرار است نزولی باشد، پس باید $a > b$ باشد، این توابع بین ریشه‌های عبارت داخل قدرمطلق اکیداً یکنوا هستند پس ۵ و ۳- همان ریشه‌ها هستند:

$$\left. \begin{array}{l} a=5 \\ b=-3 \end{array} \right\} \Rightarrow (a,b)=(5,-3)$$



(تابع)

۴

۳

۲✓

۱

چون $b + ax^3 + 3x^4$ بر $(x-1)^2$ بخش‌پذیر است بر عامل‌های آن یعنی بر $x+1$ و $x-1$ نیز بخش‌پذیر است. پس:

$$P(x) = 3x^4 + ax^3 + b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P(1) = 0 \Rightarrow 3 + a + b = 0 \\ P(-1) = 0 \Rightarrow 3 - a + b = 0 \end{array} \right. \Rightarrow a = 0, b = -3$$

(تابع)

۴

۳

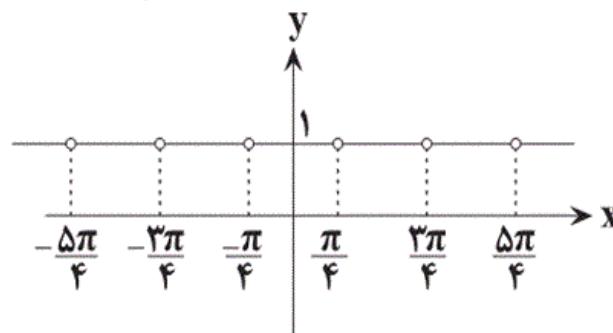
۲✓

۱

با توجه به اتحاد $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ ، این تابع به صورت ثابت

$y = x + \frac{\pi}{2}$ در دامنهٔ تابع نیستند،

بنابراین نمودار تابع به صورت زیر و دورهٔ تناوب آن $\frac{\pi}{2}$ است.



(تابع، مثلثات)

۴

۳

۲✓

۱

دوره تناوب تابع 4π و ماکریم آن برابر $|b|$ است که 18 می‌شود:

$$\begin{cases} \frac{2\pi}{|a|} = 6\pi \Rightarrow |a| = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{3} \\ |b| = 18 \Rightarrow b = \pm 18 \end{cases}$$

چون نمودار در همسایگی مبدأ نزولی است؛ پس a و b مختلف العلامت هستند.

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{3}, b = 18 \Rightarrow a + b = \frac{53}{3} \\ \text{یا} \\ a = \frac{1}{3}, b = -18 \Rightarrow a + b = -\frac{53}{3} \end{cases} \Rightarrow \min(a + b) = -\frac{53}{3}$$

(مثلثات)

۴

۳

۲✓

۱

کمترین مقدار تابع $y = a \cos \theta$ با فرض $a > 0$ برابر $(-a)$ است، پس با

$$\text{توجه به نمودار تابع، داریم: } a = \frac{\Delta}{2}$$

همچنین نمودار تابع، محور x ها را با طول $\frac{7\pi}{18}$ قطع کرده است، لذا داریم:

$$f\left(\frac{7\pi}{18}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{2} \cos\left(3 \times \frac{7\pi}{18} + b\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{7\pi}{6} + b\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{7\pi}{6} + b = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$b = k\pi - \frac{2\pi}{3} \xrightarrow[k=1]{<b<\pi} b = \frac{\pi}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{\Delta}{2} \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\xrightarrow[x=0]{\text{تلاقی با محور } y} f(0) = \frac{\Delta}{2} \cos(0 + \frac{\pi}{3}) = \frac{\Delta}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\Delta}{4} = 1/25$$

(مثلثات)

۴

۳

۲✓

۱

اگر به رابطه 80° و 55° توجه کنیم داریم:

$$\begin{aligned} 55^\circ + 80^\circ &= 135^\circ \Rightarrow \tan(55^\circ + 80^\circ) = \tan 135^\circ \\ \Rightarrow \frac{\tan 55^\circ + \tan 80^\circ}{1 - \tan 55^\circ \tan 80^\circ} &= -1 \Rightarrow \tan 55^\circ + \tan 80^\circ = \tan 55^\circ \tan 80^\circ - 1 \\ \Rightarrow \tan 55^\circ + \tan 80^\circ - \tan 55^\circ \tan 80^\circ &- 1 = -1 \\ \Rightarrow \tan 55^\circ (1 - \tan 80^\circ) - (1 - \tan 80^\circ) &= -1 \\ \Rightarrow (1 - \tan 80^\circ)(\tan 55^\circ - 1) &= -1 \end{aligned}$$

(مسئلات)

 ۱ ۲ ۳ ۴ ✓

$$\cos \Delta x = \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \Delta x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \Delta x = 2k\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \\ x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \end{cases} \end{aligned}$$

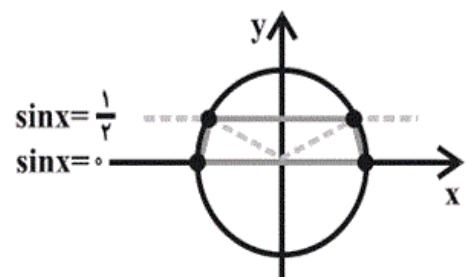
(مسئلات)

 ۱ ۲ ۳ ۴ ✓

$$\sin x + \cos 2x = 1 \Rightarrow \sin x = 1 - \cos 2x \Rightarrow \sin x = 2 \sin^2 x$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x(2 \sin x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$



جواب‌ها را روی دایرهٔ مثلثاتی نشان می‌دهیم. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید،

شکل حاصل یک ذوزنقهٔ متساوی الساقین است.

(مثلثات)

۴

۳

۲

۱

می‌دانیم $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$ است. پس:

$$1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x \cos^2 x = 0 \Rightarrow (\sin x \cdot \cos x)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

(مثلثات)

۴

۳

۲

۱