

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات
و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

$$\text{تابع } f(x) = \frac{|x+1|}{x+1} \text{ در } x = -1 \text{ دارای ...}$$

- ۱) حدی برابر صفر است.
۲) حدی برابر ۱ است.
۳) حدی برابر -۱ است.
۴) حد نیست.

$$\text{باشد، مجموع مقادیر ممکن برای } a \text{ کدام است؟}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} a^2 x - 2x - 2a & , x \neq 1 \\ a - 2 & , x = 1 \end{cases}$$

-۳ (۴)

-۱ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

$$\text{باشد، کدامیک از توابع زیر در } x = 0 \text{ حد ندارد؟}$$

$$g(x) = \begin{cases} -2 & , x > 0 \\ 2 & , x < 0 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & , x \geq 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$$

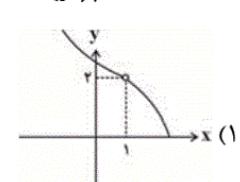
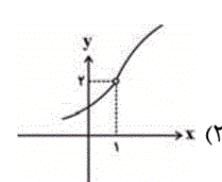
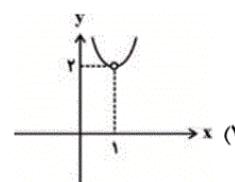
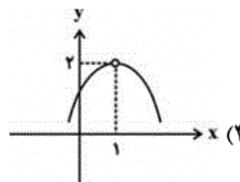
f^2 (۴)

$f - g$ (۳)

$f \times g$ (۲)

g^2 (۱)

۱۰۱ - اگر $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ باشد و در اطراف $x = 1$ داشته باشیم $\frac{f(x)-2}{1-x} <$ کدام گزینه می‌تواند نمودار تابع f در اطراف $x = 1$ باشد؟



۱۰۲ - با توجه به تابع $f(x) = \sqrt{x+4}$, چه تعداد از موارد زیر درست است؟

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$$

$$f(-4) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow (-4)^+} f(x) = 0$$

۴) صفر

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

الف) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

ب) $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

پ) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0 \\ -\sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$

ت) $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

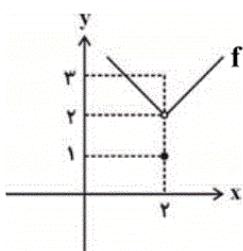
۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۰۴ - نمودار تابع f به صورت زیر است. اگر $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + g(x)]$ کدام است؟ ([، نماد جزء صحیح است.)



۱) صفر

۲ (۲)

۲ (۳)

۳ (۴)

۱۰۵ - $g(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$ باشد، کدام گزینه درست است؟

(۱) در $x = 0$ حد ندارد، g در $x = 0$ حد دارد و $f + g$ نیز در $x = 0$ حد ندارد.

(۲) در $x = 0$ حد ندارند، اما $f + g$ در $x = 0$ حد دارد.

(۳) در $x = 0$ حد ندارند، اما $f - g$ در $x = 0$ حد دارد.

(۴) در $x = 0$ حد ندارند، اما $f + g$ و $g \cdot f$.

۱۰۶ - حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \left(\left[\frac{\Delta}{x-1} \right] + \left[\frac{-\Delta}{x+2} \right] \right)$ کدام است؟ ([، نماد جزء صحیح است.)

-۹ (۴)

-۸ (۳)

-۷ (۲)

-۶ (۱)

۱۰۷ - حاصل $A = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{1 + 2 \sin x \cos x}{[x] \cos^2 x + \sin^2 x} \times \frac{2}{\cos x + \sin x}$ کدام است؟ ([، نماد جزء صحیح است].)

- $\sqrt{2}$ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲)

(۱) وجود ندارد.

۱۰۸ - اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5x^2 - a} & , \quad x \geq 1 \\ \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} & , \quad -2 < x < 1 \\ b[x] + \frac{|x+2|}{x+2} & , \quad x \leq -2 \end{cases}$ کدام است؟ ([، نماد جزء صحیح است].)

۲۰ (۴)

-۲۰ (۳)

-۱۹ (۲)

۱۹ (۱)

۱۰۹ - حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - [2x^2]}{x^2 - 5x + 6}$ کدام است؟ ([، نماد جزء صحیح است].)

-۱۲ (۴)

-۸ (۳)

-۴ (۲)

(۱) صفر

۱۱۰ - اگر تابع g یک سهمی با رأس $(0, 3)$ باشد و تابع $f(x) = \begin{cases} |x| - 7 & , \quad x \geq 2 \\ g(x) & , \quad x < 2 \end{cases}$ کدام است؟

۴) حد ندارد.

(۳) صفر

۱ (۲)

-۱ (۱)

۱۱۱ - اگر $\lim_{x \rightarrow a} (\sqrt{(f+g)(x)} - \frac{g(x)+1}{f(x)})$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = ۳$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = ۶$ کدام است؟

$\frac{7}{3}$ (۴)

$\frac{3}{5}$ (۳)

$\frac{4}{3}$ (۲)

$\frac{7}{2}$ (۱)

۱۱۲ - دو تابع $f(x) = x^2 + ax + b$ و $g(x) = x + c$ مفروضند. اگر $f(1) = g(1) = ۰$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}$ کدام است؟

(۴) تعریف نشده

۲ (۳)

-۱ (۲)

(۱) صفر

-۹۶- حاصل کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است).

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^{\gamma} + x}{x^{\gamma} - [\sin \frac{\pi x}{2}]}$$

۱) ۴

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

۲) ۲

۱) صفر

-۹۷- اگر تابع $f(x) = a[\frac{\gamma}{x}] - [-3x] - 1$ دارای حد باشد، مقدار a چقدر است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است).

۱) صفر

$$2 \quad (3)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

-۹۸- حاصل کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\gamma \sin x - 1}{1 + \cos^{\gamma} \frac{x}{2}}$$

$$\frac{2+\sqrt{2}}{3} \quad (4)$$

$$\frac{3}{2+\sqrt{2}} \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$\frac{2}{3} \quad (1)$$

-۹۹- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt[3]{f(x) + g(x)})^{\gamma}$ باشد، حاصل کدام است؟ $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

$$\sqrt{27} \quad (4)$$

$$9 \quad (3)$$

$$6 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

-۱۰۰- حاصل کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin^{\gamma} \frac{x}{2}}{2x - \pi}$$

۱) صفر

$$\frac{1}{3\pi} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{3\pi} \quad (2)$$

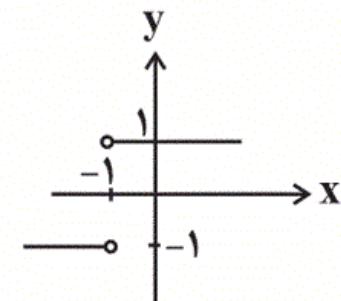
$$\frac{1}{\pi} \quad (1)$$

(مبتنی نادری)

«۴» - گزینه «۴

نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > -1 \\ -1 & , \quad x < -1 \end{cases}$$



با توجه به شکل، تابع $f(x)$ در $x = -1$ حد ندارد.

(ریاضی ۲، هر و پیوستگی، صفحه‌های ۱۲۰ تا ۱۲۷)

۴

۳

۲

۱

(محمد بیدایی)

«۲» - گزینه «۲

برای محاسبه حد تابع $f(x)$ وقتی $x \rightarrow 1$ از ضابطه اول استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (a^2 x - 2x - 2a) = a^2 - 2 \times 1 - 2a = 1$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow (a - 3)(a + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 3 + (-1) = 2$$

(ریاضی ۲، هر و پیوستگی، صفحه‌های ۱۲۰ تا ۱۲۷)

۴

۳

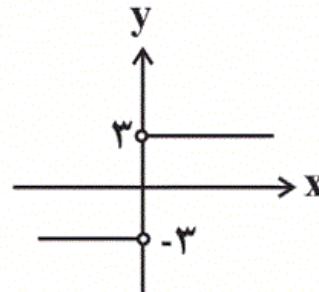
۲

۱

تابع $f - g$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(f - g)(x) = \begin{cases} 3 & , \quad x > 0 \\ -3 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

نمودار آن به شکل زیر است:



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f - g)(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} (f - g)(x) = -3$$

\Rightarrow در $x = 0$ حد ندارد.

(ریاضی ۲، هد و پیوستگی، صفحه‌های ۱۲۰ تا ۱۲۷)

۴

۳✓

۲

۱

«۲- گزینه»

اگر از سمت راست به $x = 1$ نزدیک شویم در این صورت $x - 1 > 0$ ، پس

در نامساوی داده شده مخرج $x - 1$ در نتیجه باید $x - 2 < 0$ باشد

در نتیجه اگر $x \rightarrow 1^+$ آنگاه $f(x) \rightarrow 2^+$ همچنین اگر از سمت چپ به

$x = 1$ نزدیک شویم در این صورت $x - 1 < 0$ پس $x - 2 > 0$ در نتیجه

$$\text{در نامساوی } x - 2 < 0 \text{ باید } f(x) - 2 < 0 \text{ باشد، یعنی } x \rightarrow 1^-$$

آنگاه $f(x) \rightarrow 2^-$. بنابراین گزینه «۲» می‌تواند درست باشد.

(ریاضی ۲، هد و پیوستگی، صفحه‌های ۱۲۰ تا ۱۲۷)

۴

۳

۲✓

۱

موارد (الف) و (پ) و (ت) درست هستند، در مورد (ب) چون دامنه تابع

$\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = -4$ وجود ندارد، پس $f(x) = -4$ برابر است، حد چپ در $x = -4$ وجود ندارد.

(ریاضی ۲، حد و پیوستگی، صفحه‌های ۱۲۰ تا ۱۲۷)

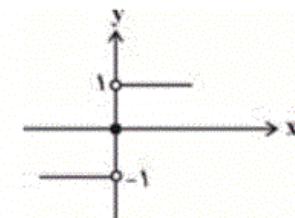
۴

۳

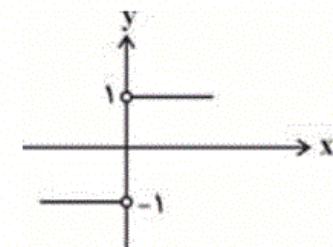
۲✓

۱

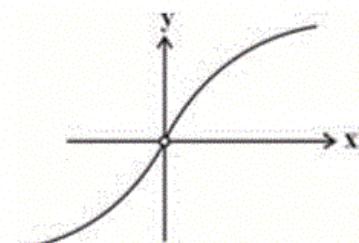
$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



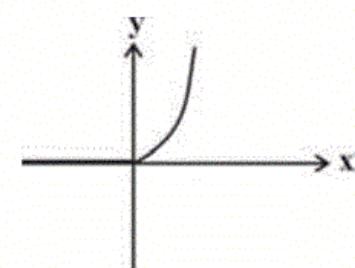
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0 \\ -\sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



از روی نمودارهای رسم شده مشخص است که توابع موارد (الف) و (ب)

در نقطه $x = 0$ حد ندارند.

(ریاضی ۲، حد و پیوستگی، صفحه‌های ۱۲۰ تا ۱۲۷)

۴

۳

۲✓

۱

«۴-گزینه» ۱۰۴

در تابع g داریم:

$$x \rightarrow 2 \Rightarrow (x-2)^2 \rightarrow 0^+ \Rightarrow (x-2)^2 + 1 \rightarrow 1^+$$

در تابع f با توجه به نمودار، وقتی $x \rightarrow 2$ ، نمودار تابع با مقادیر

$$x \rightarrow 2 \Rightarrow f(x) \rightarrow 2^+$$

بیشتر از ۲ به ۲ نزدیک می‌شود، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + g(x)] = [2^+ + 1^+] = [3^+] = 3$$

بنابراین داریم:

(ریاضی ۲، هد و پیوستگی، صفحه‌های ۱۳۸ تا ۱۳۶)

۴✓

۳

۲

۱

(محمد بهیرایی)

«۴-گزینه» ۱۰۵

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) :$$

وجود ندارد:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) :$$

وجود ندارد:

۴

۳

۲✓

۱

(سینا محمدپور)

«۴-گزینه» ۱۰۶

$$\text{وقتی } (-1)^- \rightarrow x \text{ داریم: } \frac{5}{x-1} \rightarrow -\frac{5}{2}. \text{ پس:}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \left[\frac{5}{x-1} \right] = \left[-\frac{5}{2} \right] = -3$$

حال برای محاسبه جزء صحیح دیگر داریم:

$$x < -1 \Rightarrow x+2 < 1 \Rightarrow \frac{1}{x+2} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{-5}{x+2} < -5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \left[\frac{-5}{x+2} \right] = -6$$

بنابراین جواب مسئله برابر است با:

(ریاضی ۲، هد و پیوستگی، صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۳۴)

۴✓

۳

۲

۱

$$x \rightarrow -\frac{\pi}{4} \Rightarrow -1 < x < 0 \Rightarrow [-\frac{\pi}{4}] = -1$$

$$\Rightarrow \frac{1 + 2 \sin x \cos x}{-\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)}$$

$$\Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{2(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{2}{\sin x - \cos x} = \frac{2}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{-\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

(ریاضی ۲، حد و پیوستگی، صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۳۷)

✓

۳

۲

۱

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(2x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{5x^2 - a} = \sqrt{5-a}$$

در $x = 1$ حد دارد، بنابراین:

$$\sqrt{5-a} = \frac{1}{2} \Rightarrow 5-a = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 5 - \frac{1}{4} = \frac{19}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} = \frac{15}{3} = 5$$

۱

۳

۲ ✓

۱

ابتدا مقدار جزء صحیح را مشخص می‌نماییم:

$$(x \rightarrow 2^+) \Rightarrow (2x^2 \rightarrow 8^+) \Rightarrow [2x^2] = 8$$

حال به بررسی حد می‌پردازیم. با جایگذاری به حالت $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ می‌رسیم

پس ساده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 5x + 6} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x+2)}{x-3} = \frac{2(4)}{-1} = -8 \end{aligned}$$

(ریاضی ۲، حد و پیوستگی، صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۳۸)

۴

۳✓

۲

۱

$$g(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow x_s = \frac{-b}{2a} = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$g(x) = ax^2 + c \xrightarrow{S(0,3)} 3 = 0 + c \Rightarrow c = 3$$

$$\Rightarrow g(x) = ax^2 + 3$$

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 7 & , x \geq 2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (|x| - 7) \\ = 2 - 7 = -5 \\ ax^2 + 3 & , x < 2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^2 + 3) \\ = 4a + 3 \end{cases}$$

چون f در $x = 2$ حد دارد، پس حد چپ و راست برابرند.

$$4a + 3 = -5 \Rightarrow 4a = -8 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow g(x) = -2x^2 + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} -2x^2 + 3 = 1$$

(ریاضی ۲، حد و پیوستگی، صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۳۸)

۴

۳

۲✓

۱

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\sqrt{(f+g)(x)} - \frac{g(x)+1}{f(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{(f+g)(x)} - \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)+1}{f(x)}$$

$$= \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)} - \frac{\lim_{x \rightarrow a} g(x) + 1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

۱✓

۳

۲

۱

با توجه به اینکه $f(1) = 0$ است، اگر 1 و α دو ریشه تابع $f(x)$ باشند ($\alpha \neq 1$ ، داریم:

$$f(x) = (x-1)(x-\alpha) \quad (1)$$

$$g(x) = x + c \xrightarrow{g(1)=0} c = -1 \Rightarrow g(x) = x - 1 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-\alpha)}{x-1} = \gamma$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} x - \alpha = 1 - \alpha = \gamma \Rightarrow \alpha = -1 \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(1),(3)} \begin{cases} f(x) = (x-1)(x+1) = x^2 - 1 \\ f(x) = x^2 + ax + b \end{cases} \Rightarrow a = 0, b = -1$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{c} = 0$$

(ریاضی ۲، هد و پیوستگی، صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۶)

۱

۳

۲

۱✓

سینوس هر زاویه همواره کوچکتر یا مساوی ۱ است، در نتیجه:

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow \sin \frac{\pi x}{2} \rightarrow 1^- \Rightarrow [\sin(\frac{\pi}{2})^+] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x}{x^2 - [\sin(\frac{\pi x}{2})]} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x+1)}{x^2 - 0} = \frac{1 \times 2}{1} = 2$$

(ریاضی ۲، حد و پیوستگی، صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۳۸)

 ۴ ۳ ۲ ۱

$$x \rightarrow 2^+ \Rightarrow 0 < \frac{2}{x} < 1 \Rightarrow \frac{2}{x} \rightarrow 1^-$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = a[1^-] - [(-6)^-] - 1 = 0 - (-7) - 1 = 6$$

$$x \rightarrow 2^- \Rightarrow 1 < \frac{2}{x} < 2 \Rightarrow \frac{2}{x} \rightarrow 1^+$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = a[1^+] - [(-6)^+] - 1 = a + 6 - 1 = a + 5$$

شرط حد داشتن در $x = 2$ برابری حد چپ و راست است. بنابراین:

$$a + 5 = 6 \Rightarrow a = 1$$

(ریاضی ۲، حد و پیوستگی، صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۳۸)

 ۴ ۳ ۲ ۱

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x - 1}{1 + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{2} - 1}{1 + (\cos \frac{\pi}{4})^2} = \frac{2 \times 1 - 1}{1 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

(ریاضی ۲، حد و پیوستگی، صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۶)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(علی فرسندي)

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt[3]{f(x) + g(x)})^2 = (\sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x)})^2 \\ = (\sqrt[3]{20+7})^2 = 3^2 = 9$$

(ریاضی ۲، مر و پیوستگی، صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۶)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(علی فرسندي)

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\pi - \pi} = \frac{1}{\pi}$$

(ریاضی ۲، مر و پیوستگی، صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۶)

 ۴ ۳ ۲ ۱