

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات
و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:

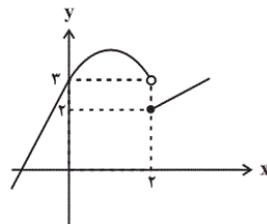
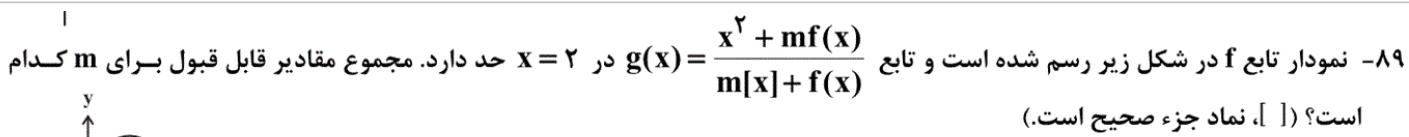
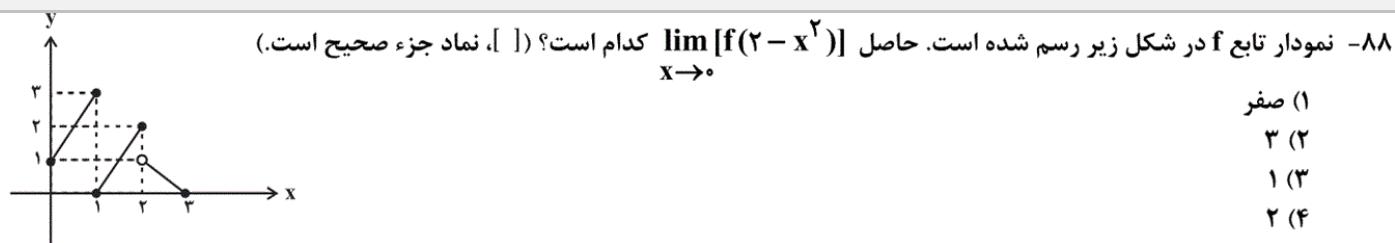


<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

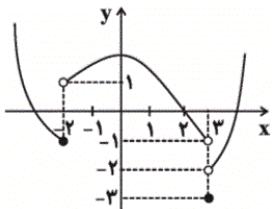
-۸۵- اگر بازه $(x - 4x^2, 1/4)$ یک همسایگی برای $1/8$ باشد، محدوده x کدام است؟
 (۰/۲, ۱) (۴) (۰/۱, ۰/۲) (۳) (۰/۶, ۰/۲) (۲) (۰/۲, ۰/۶) (۱)

-۸۷- اگر تابع f در نقطه $x = 1$ حد داشته باشد و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + f(x)}{f(x) - 1}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3f(x) - 7}{4 - f(x)}$ کدام است؟
 $\frac{5}{2}$ (۴) ۲ (۳) ۳ (۲) $\frac{3}{2}$ (۱)

-۹۰- مطابق شکل، مثلثی متساوی‌الاضلاع داریم که در هر مرحله، اوساط اضلاع آن را به هم متصل می‌کنیم تا مثلثی جدید تشکیل شود. در مرحله n ام اختلاف محیط مثلث رنگی ایجاد شده با عددی که محیط‌های مثلث‌های رنگی به آن نزدیک می‌شوند، کمتر از $\frac{1}{15^n}$ می‌شود.
 حداقل مقدار n کدام است؟ (طول ضلع مثلث مرحله اول را واحد در نظر بگیرید).
 ۸ (۱)
 ۹ (۲)
 ۱۰ (۳)
 ۱۱ (۴)



-۸۱- با توجه به نمودار مقابل، حاصل $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + f(2)$ برابر است با:



- ۱) ۱
- ۲) صفر
- ۳) ۲
- ۴) ۳

-۸۴- مجموع حد راست و چپ تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ هنگامی که $x \rightarrow 0$ کدام است؟ [] ، نماد جزء صحیح است.

۱۱) ۴

۱۰) ۳

۹) ۲

۸) ۱

-۸۲- اگر $x \geq 2$ ، $f(x) = [x] + x$ و تابع $g(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \geq 2 \\ ax + 1 & x < 2 \end{cases}$ در $x = 2$ حد داشته باشد، کدام است؟ [] ، نماد جزء صحیح است.

$-\frac{1}{2}) ۴$

$\frac{1}{2}) ۳$

-۱) ۲

۱) ۱

-۸۳- اگر دو تابع f و g در $x = 1$ حد داشته باشند و $\lim_{x \rightarrow 1} (f + 2g)(x) = \frac{9}{2}$ و $\lim_{x \rightarrow 1} (f \cdot g)(x) = -2$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} (f - g)(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

-۳) ۴

۳) ۳

-۲) ۲

۲) ۱

-۸۶- اگر تابع $f(x) = [4x] + 2a[-x]$ در $x = 2$ حد داشته باشد، آنگاه مقدار این حد کدام است؟ [] ، نماد جزء صحیح است.

۱۰) ۴

$-\frac{1}{2}) ۳$

۵) ۲

$\frac{1}{2}) ۱$

-۱۰۷- در مثلثی اندازه یک ضلع برابر 3 واحد و زاویه روبه رو به آن 30° درجه است. مجموع فواصل محل برخورد عمودمنصفهای اضلاع این مثلث تا رؤس آن کدام است؟

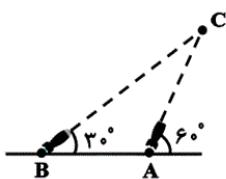
۹) ۴

۶) ۳

$\frac{4}{5}) ۲$

۳) ۱

-۱۰۳- مطابق شکل، موشک ۱ از نقطه A تحت زاویه 60° و موشک ۲ از نقطه B تحت زاویه 30° نسبت به سطح زمین، روی یک مسیر مستقیم پرتاب می‌شوند. اگر موشک ۱ بعد از طی یک کیلومتر به نقطه C برسد، موشک ۲ پس از طی چند کیلومتر به همان نقطه می‌رسد؟



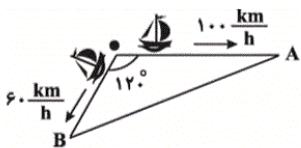
۱/۲) ۱

$\sqrt{2}) ۲$

۱/۵) ۳

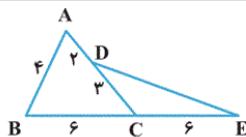
$\sqrt{3}) ۴$

۱۰۴ - دو قایق از یک نقطه در دریاچه، با سرعت‌های $\frac{60}{h}$ و $\frac{100}{h}$ کم/ ساعت، دور می‌شوند. بعد از نیم ساعت، دو قایق چند کیلومتر از هم فاصله دارند؟



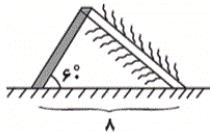
- ۷۰ (۱)
۳۵ $\sqrt{2}$ (۲)
۳۵ $\sqrt{3}$ (۳)
۶۰ (۴)

۱۰۵ - در شکل مقابل، اندازه DE کدام است؟



- $5\sqrt{2}$ (۱)
 $7\sqrt{2}$ (۲)
 $4\sqrt{2}$ (۳)
 $6\sqrt{2}$ (۴)

۱۰۶ - یک درخت بر اثر طوفان شکسته شده است؛ به طوری که تنۀ درخت با زمین زاویه 60° می‌سازد و طول آن (از زمین تا محل شکستگی) ۵ متر و فاصلۀ سر درخت تا پای آن ۸ متر است. طول درخت قبل از شکسته شدن چند متر بوده است؟



- ۱۳ (۱)
۱۲ (۲)
۱۱ (۳)
۱۰ (۴)

۱۰۷ - اگر در مثلث ABC ، $\cos \hat{A} = 2b$ و $a = \sqrt{2}b$ ، کدام است؟

- $\frac{4}{7}$ (۱)
 $\frac{3}{4}$ (۲)
 $\frac{1}{2}$ (۳)
 $\frac{1}{4}$ (۴)

۱۰۹ - در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC ، نقطۀ D روی ضلع AB به گونه‌ای قرار دارد که $AD = 2$ و $BD = 3$ است. اگر نقطۀ متغیر N روی ضلع BC قرار داشته باشد، اندازه کمترین مقدار $NA + ND$ کدام است؟

- ۸ (۱)
۷ (۲)
۶ (۳)
۵ (۴)

۱۱۰ - در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع ۸ واحد، نقطۀ D روی ضلع BC به فاصلۀ ۷ واحد از رأس A قرار دارد. فاصلۀ نقطۀ D از ضلع AB ، چند برابر فاصلۀ آن از ضلع AC است؟ ($BD < CD$)

- ۰/۸ (۱)
۰/۷۵ (۲)
۰/۶ (۳)
۰/۵ (۴)

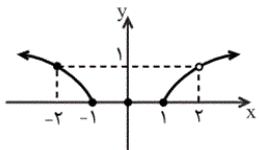
۱۰۱ - در مثلث ABC ، $\hat{A} = 60^\circ$ و $AC = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ ، $AB = 2\sqrt{2}$ است. اندازه زاویه B چند درجه است؟

- ۷۵ (۱)
۴۵ (۲)
۳۰ (۳)
۱۵ (۴)

۱۰۲ - در مثلثی با طول دو ضلع $\sqrt{2}$ و $\sqrt{6}$ که زاویه بین آن‌ها 150° درجه است، شعاع دایره محیطی کدام است؟

- $2\sqrt{2}$ (۱)
 $\sqrt{14}$ (۲)
 $\sqrt{7}$ (۳)
 $\sqrt{2}$ (۴)

۹۱- نمودار تابع f به صورت زیر است. تابع f در همسایگی راست نقطه با کدام طول تعریف شده ولی در هیچ همسایگی چپ آن نقطه تعریف نشده است؟



-۱ (۲)

۲ (۴)

۱ (۱)

۳ صفر

۹۲- اگر $\lim_{x \rightarrow 0} -f(x+1) = 2$ باشد، آنگاه حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ?$ کدام است؟

۱ (۴) -۱ (۳)

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

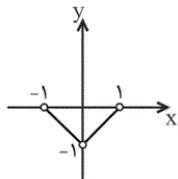
$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ (۱)

۹۳- در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 0 & : x \in \mathbb{Z} \\ -1 & : x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$ چقدر است؟

۱ (۴) -۲ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱) صفر



۹۴- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} [-f(x)]$ کدام است؟

۱ (۲)

-۲ (۴)

-۱ (۱)

۳ صفر

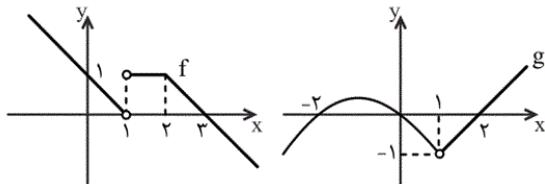
۹۵- حد راست تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{16-x^2} & |x| \leq 4 \\ |x-4| & |x| > 4 \end{cases}$ در نقطه $x=-4$ به اندازه ... واحد از حد چپ آن در این نقطه ... است.

۱ (۴) $8 + \sqrt{32}$

۲ (۲) $8, \text{ بیشتر}$

۱ (۱) $8, \text{ کمتر}$

۹۶- با توجه به نمودارهای زیر، در چند نقطه به طول x_0 ، $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x)$ موجود و برابر صفر است؟



۱) سه نقطه

۲) دو نقطه

۳) چهار نقطه

۴) پنج نقطه

- (۲) تفاضل دو تابع f و g حتماً در $x=a$ حد دارد.
 (۴) حاصل ضرب توابع f و g در $x=a$ حد دارد.

۹۷- اگر $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ وجود داشته باشد، آنگاه:

- (۱) باید هر دو تابع f و g در $x=a$ حد داشته باشند.
 (۳) ممکن است هر دو تابع در $x=a$ حد نداشته باشند.

۹۸- اگر $f(x) = [x]$ و $g(x) = x - [x]$ آنگاه برای تابع $(fog)(x)$ در $x=1$ کدام گزینه درست است؟

- (۲) حد چپ و راست موجود و برابر
 (۴) فقط مقدار وجود دارد.

- (۱) حد چپ و راست موجود ولی نابرابر
 (۳) حد چپ و راست موجود ولی نابرابر.

۹۹ - حاصل کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - [x]}{x + [x]}$$

۱) ۴

۳) صفر

۵) ۰ / ۵

۱) $\frac{1}{3}$

۱۰۰ - حاصل کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left[x + \frac{1}{x} \right]$$

۴) وجود ندارد.

۳) ۲

۲) صفر

۱) ۱

۱۱۲ - اگر میانه داده‌های ۸، ۱۵، ۳، ۱۹، ۶، ۴، برابر ۸ باشد، میانگین این داده‌ها حداقل چند است؟

۴) ۱۰

۳) ۹

۲) ۸

۱) ۷

۱۱۳ - با توجه به داده‌های ۲۳، ۲۱، ۲۰، ۰، ۲۴، که نشان‌دهنده تعداد فروش یک محصول در چند روز متوالی است؛ کدام یک از شاخص‌های زیر به عنوان معیار گرایش به مرکز برای تعداد فروش روزانه این محصول مناسب‌تر است؟

۴) دامنه میان چارکی

۳) میانه

۲) مد

۱) میانگین

x_i	۱۸	۲۱	۲۴	۲۷	۳۰
f_i	۳	۲	x	۶	۲

۱۱۴ - اگر میانگین داده‌های جدول مقابل $24/24$ باشد، x کدام است؟

۴) ۱۷

۳) ۱۲

۲) ۲

۱) ۷

۱۱۵ - اگر انحراف معیار داده‌های x_1, x_2, \dots, x_n برابر ۲ و ضریب تغییرات آنها برابر c باشد، ضریب تغییرات داده‌های

۱) $5x_1 + 2, \dots, 5x_n + 2$ کدام است؟

$$\frac{5+2c}{5c} \quad (4)$$

$$\frac{5c}{5+2c} \quad (3)$$

$$\frac{5+c}{5c} \quad (2)$$

$$\frac{5c}{5+c} \quad (1)$$

۱۱۶ - اگر انحراف معیار داده‌های مثبت $3x, 3x, x$ و x برابر ۲ باشد، آن‌گاه ضریب تغییرات این داده‌ها کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$\frac{2}{5} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{2}{3} \quad (1)$$

۱۱۷ - ضریب تغییرات داده‌های ۴۱، ۴۲، ۴۱، ۳۹ و ۳۷ کدام است؟

$$\frac{4}{25} \quad (4)$$

$$\frac{2}{25} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{25} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{50} \quad (1)$$

۱۱۸ - در نمودار جعبه‌ای داده‌های ۹، ۲، ۷، ۱۰، ۱، ۳ و ۵، حاصل $\frac{Q_3 + Q_1}{IQR}$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۱۹ - در نمودار جعبه‌ای ۳۵ داده آماری، میانگین داده‌های دو طرف جعبه به ترتیب ۱۵ و ۱۸ است. اگر میانگین تمام داده‌ها ۱۶ باشد، آن‌گاه میانگین داده‌های داخل و روی جعبه تقریباً کدام است؟

۱۴/۶۱ (۴)

۱۵/۴۷ (۳)

۱۵/۵۷ (۲)

۱۶ (۱)

۱۲۰ - انحراف معیار امتیازهای بازیکنان دو تیم ۱۰ و ۲۰ نفره، به ترتیب ۵ و ۴ است. اگر میانگین امتیازهای بازیکنان این دو تیم برابر باشد، انحراف معیار امتیازهای کل بازیکنان دو تیم کدام است؟

$\sqrt{19}$ (۴)

$\sqrt{23}$ (۳)

$\sqrt{21}$ (۲)

$\sqrt{18}$ (۱)

۱۱۱ - کدام شاخص‌های آماری برای داده‌های ۸، ۹، ۵، ۷ و ۱ با هم برابرند؟

۱) میانگین و واریانس

۲) دامنه تغییرات و میانگین

۴) واریانس و دامنه تغییرات

۳) میانگین و انحراف معیار

(علی شهرابی)

-۸۵

باید دو عدد $1/4$ و $1/8$ در بازه باشند، پس:

$$\left. \begin{array}{l} 1 - 4x < 1/4 \Rightarrow 4x > -1/4 \Rightarrow x > -1/16 \\ 2 - x > 1/8 \Rightarrow x < 15/8 \end{array} \right\} \cap \rightarrow -1/16 < x < 15/8$$

(حسابان - صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

۴

۳

۲

۱

(عادل هسینی)

-۸۶

با فرض اینکه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = L$ باشد، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3f(x) - 4}{4 - f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 3f(x) - 4}{4 - \lim_{x \rightarrow 1} f(x)} = \frac{3L - 4}{4 - L} = 2 \Rightarrow L = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + f(x)}{f(x) - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 3}{2} = \frac{5}{2}$$

(حسابان - صفحه ۱۹)

۴

۳

۲

۱

(محمد پهوار محسنی)

در هر مرحله مثلث اصلی به ۴ مثلث همنهشت تقسیم می‌شود که هر کدام

با مثلث اولیه متشابه هستند، بنابراین مساحت مثلث $\frac{1}{4}$ برابر می‌شود در

$$k^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

نتیجه:

بنابراین طول ضلع مثلث در هر مرحله $\frac{1}{2}$ برابر می‌شود:

مرحله	۱	۲	۳	n
طول ضلع	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$(\frac{1}{2})^{n-1}$
محیط	۳	$3(\frac{1}{2})$	$3(\frac{1}{4})$	$3(\frac{1}{2})^{n-1}$

با توجه به جدول متوجه می‌شویم که جملات در حال نزدیک شدن به صفر هستند، بنابراین حد جملات صفر است:

$$\left| 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 0 \right| < \frac{1}{150} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{1}{450} \Rightarrow 2^{n-1} > 450$$

$$\Rightarrow 2^n > 900 \xrightarrow{\text{عدد طبیعی}} n \geq 10$$

(مسابان ا- صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۲۴)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(عادل مسینی)

در همسایگی $x=0$ ، مقدار تابع $y=2-x^2$ کمتر از ۲ است و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [f(2-x^2)] = \lim_{x \rightarrow 2^-} [f(x)]$$

حال از روی نمودار واضح است که مقدار تابع f در همسایگی چپ $x=2$ ، کمتر از ۲ است و در نتیجه $[f(x)]=1$ است. ۴ ۳ ۲ ۱

با توجه به نمودار تابع f واضح است که:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$$

حال تابع g در $x = 2$ هنگامی حد دارد که حدهای چپ و راست آن در این نقطه برابر باشند:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + mf(x)}{m[x] + f(x)} = \frac{4 + 3m}{m + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + mf(x)}{m[x] + f(x)} = \frac{4 + 2m}{2m + 2}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{برابری حدود} \\ \text{چپ و راست}}} \frac{3m + 4}{m + 3} = \frac{m + 2}{m + 1}$$

$$\Rightarrow 3m^2 + 7m + 4 = m^2 + 5m + 6$$

$$\Rightarrow 2m^2 + 2m - 2 = 0 \Rightarrow m^2 + m - 1 = 0$$

معادله فوق ۲ جواب دارد که مجموع آنها برابر ۱ است.

(مسابان ا- صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۳۴)

۴

۳

۲

۱

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1, \quad f(3) = -3$$

پس حاصل عبارت مورد نظر برابر $-(-1) + (-3) = -1 - 3 = -4$ است.

(مسابان ا- صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۳۹)

۴

۳

۲

۱

$$x \rightarrow \frac{1}{\delta}^- \Rightarrow x < \frac{1}{\delta} \Rightarrow \frac{1}{x} > \delta \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\delta}^-} \left[\frac{1}{x} \right] = [\delta^+] = \delta$$

$$x \rightarrow \frac{1}{\delta}^+ \Rightarrow x > \frac{1}{\delta} \Rightarrow \frac{1}{x} < \delta \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\delta}^+} \left[\frac{1}{x} \right] = [\delta^-] = \delta$$

۴

۳

۲

۱

(علی شعبانی)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2^+} (f + g)(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^+} ([x] + x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^4 - x) = (2 + 2) + (4 - 2) = 6 \\
 \lim_{x \rightarrow 2^-} (f + g)(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^-} ([x] + x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax + 1) = (1 + 2) + 2a + 1 = 2a + 4 \\
 \lim_{x \rightarrow 2^+} (f + g)(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (f + g)(x) \Rightarrow 6 = 2a + 4 \Rightarrow a = 1
 \end{aligned}$$

(سایبان ا- صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

(امیر هوشمند فردوسی)

فرض می‌کنیم $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = L'$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = L$ است، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f - g)(x) = \frac{9}{2} \Rightarrow L - L' = \frac{9}{2} \Rightarrow L = L' + \frac{9}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f \cdot g)(x) = -2 \Rightarrow LL' = -2 \Rightarrow (L' + \frac{9}{2})L' = -2$$

$$\Rightarrow L'^2 + \frac{9}{2}L' + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} L' = -4 \Rightarrow L = \frac{1}{2} \\ L' = -\frac{1}{2} \Rightarrow L = 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f + 2g)(x) = L + 2L' = \begin{cases} \frac{1}{2} + 2 \times (-4) = -\frac{15}{2} \\ 4 + 2 \times (-\frac{1}{2}) = 3 \end{cases}$$

(سایبان ا- صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

باید حد چپ و راست در $x = 2$ برابر باشند:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} ([4x] + 2a[-x]) = [8^+] + 2a \underbrace{[(-2)^-]}_{-3} = 8 - 6a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} ([4x] + 2a[-x]) = [8^-] + 2a \underbrace{[(-2)^+]}_{-2} = 8 - 4a$$

$$\Rightarrow 8 - 6a = 8 - 4a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} ([4x] + [-x]) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} ([4x] + [-x]) = 5 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} ([4x] + [-x]) = 5$$

نکته: قرینه 2^+ , -2^- است و قرینه $2^-, -2^+$ است.

(مسابان ا- صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۲۶)

۴

۳

۲✓

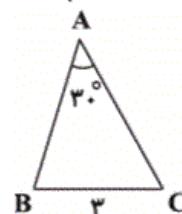
۱

-۱۰۷

(سینا محمدپور)

محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث، در حقیقت مرکز دایرة محیطی مثلث است. از طرفی می‌دانیم مرکز دایرة محیطی هر مثلث، از سه رأس آن به یک فاصله بوده و این فاصله برابر با شعاع دایرة محیطی است. پس خواسته مسئله سه برابر شعاع دایرة محیطی مثلث است. طبق

قضیه سینوس‌ها در مثلث ABC داریم:



$$\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{3}{\sin 30^\circ} = 2R \Rightarrow R = 3 \Rightarrow 2R = 6$$

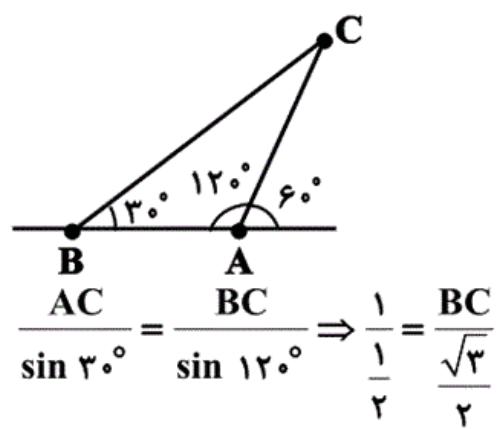
(هندسه ا- روابط طولی در مثلث- صفحه‌های ۶۵ تا ۶۷)

۴✓

۳

۲

۱



$$\Rightarrow BC = \sqrt{3}$$

(هندسه - ۲ - روابط طولی در مثلث - صفحه‌های ۶۵ تا ۶۲)

۴ ✓

۳

۲

۱

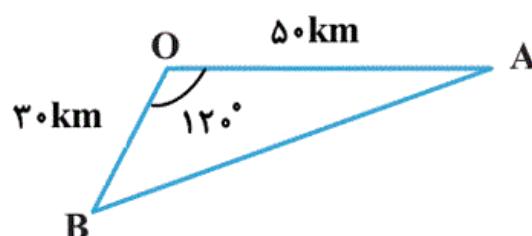
(سیدسروش کریمی مداحی)

- ۱۰۴

ابتدا مسافت طی شده، توسط هر قایق را محاسبه می‌کنیم:

$$OA = 100 \times 0 / 5 = 50 \text{ km}, \quad OB = 60 \times 0 / 5 = 30 \text{ km}$$

حال به کمک قضیه کسینوس‌ها داریم:



$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 120^\circ$$

$$\Rightarrow AB^2 = 2500 + 900 - 2 \times 50 \times 30 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 4900$$

$$\Rightarrow AB = 70 \text{ km}$$

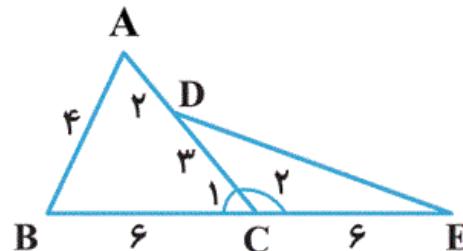
(هندسه - ۲ - روابط طولی در مثلث - صفحه‌های ۶۶ تا ۶۹)

۴

۳

۲

۱ ✓



مطابق شکل شکل می باشد. بنابراین $\cos \hat{C}_1 = -\cos \hat{C}_2$ است. به کمک قضیه کسینوس ها مقدار $\cos \hat{C}_1$ را می باییم:

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos \hat{C}_1 \\ \Rightarrow 16 &= 25 + 36 - 2 \times 5 \times 6 \times \cos \hat{C}_1 \\ \Rightarrow \cos \hat{C}_1 &= \frac{3}{4} \Rightarrow \cos \hat{C}_2 = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

در نتیجه با توجه به قضیه کسینوس ها در مثلث CDE داریم:

$$\begin{aligned} DE^2 &= CD^2 + CE^2 - 2 \times CD \times CE \times \cos \hat{C}_2 \\ \Rightarrow DE^2 &= 9 + 36 - 2 \times 3 \times 6 \times \left(-\frac{3}{4}\right) = 72 \Rightarrow DE = 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

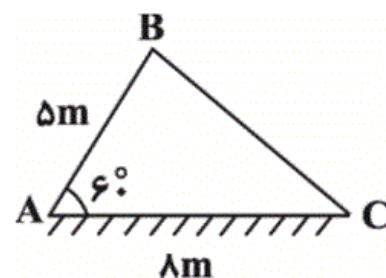
(هنرسه - روابط طولی در مثلث - صفحه های ۶۹ تا ۷۰)

۴

۳✓

۲

۱



طول درخت برابر $AB + BC$ است. داریم:

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos 60^\circ \\ &= 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \times \frac{1}{2} \Rightarrow BC^2 = 25 + 64 - 40 = 49 \Rightarrow BC = 7 \end{aligned}$$

طول درخت = $AB + BC = 5 + 7 = 12m$

(هنرسه - روابط طولی در مثلث - صفحه های ۶۹ تا ۷۰)

۴

۳

۲✓

۱

کافیست رابطه کسینوس‌ها را نوشته و تمام اضلاع را برحسب b در آن

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \quad \text{جایگذاری کنیم:}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2}b)^2 = b^2 + (2b)^2 - 2b(2b)\cos \hat{A}$$

$$\Rightarrow 2b^2 = 5b^2 - 4b^2 \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{3b^2}{4b^2} = \frac{3}{4}$$

(هنرسه ۲- روابط طولی در مثلث- صفحه‌های ۶۹ تا ۷۱)

 ۴ ۳ ۲ ۱

برای به دست آوردن کمترین مقدار $NA + ND$ ، نقطه A را نسبت به BC بازتاب می‌دهیم و نقطه حاصل را A' می‌نامیم. محل تلاقی $A'D$ با BC را N می‌نامیم از آنجا که $A'N = AN$ ، کمترین مقدار $NA + ND$ برابر با طول $A'D$ است. بنابراین طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث $A'BD$ داریم:

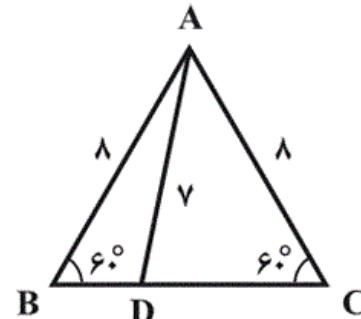
$$A'D^2 = A'B^2 + BD^2 - 2A'B \times BD \times \cos 120^\circ$$

$$\Rightarrow A'D^2 = 25 + 9 - 2 \times 5 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 49 \Rightarrow A'D = 7$$

(هنرسه ۲- روابط طولی در مثلث- صفحه‌های ۶۹ تا ۷۱)

 ۴ ۳ ۲ ۱

طبق فرض سؤال، ضلع AB به نقطه D نزدیک‌تر است. با توجه به قضیه کسینوس‌ها اندازه پاره خط‌های BD و CD مشخص می‌شود.



$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 \times AB \times BD \times \cos 60^\circ$$

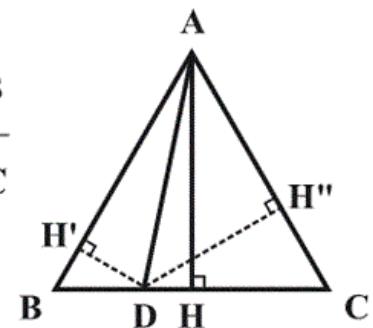
$$\Rightarrow 49 = 64 + BD^2 - 2 \times 8 \times BD \times \frac{1}{2} \Rightarrow BD^2 - 8BD + 15 = 0$$

$$\Rightarrow (BD - 3)(BD - 5) = 0 \xrightarrow{BD < CD} \begin{cases} BD = 3 \\ CD = 5 \end{cases}$$

حال با نوشتن نسبت مساحت در مثلث‌های ACD و ABD داریم:

$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}} = \frac{\frac{1}{2} BD \times AH}{\frac{1}{2} CD \times AH} = \frac{\frac{1}{2} DH' \times AB}{\frac{1}{2} DH'' \times AC}$$

$$\Rightarrow \frac{DH'}{DH''} = \frac{BD}{CD} = \frac{3}{5} = 0.6$$



(هنرمه ۲- روابط طولی در مثلث- صفحه‌های ۶۶ تا ۶۹)

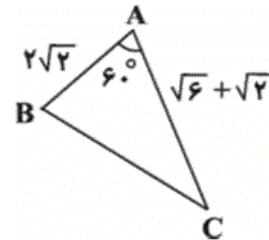
آمار و احتمال- اجباری

۴

۳

۲✓

۱



ابتدا با کمک قضیه کسینوس‌ها طول ضلع BC را می‌یابیم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos A$$

$$\Rightarrow BC^2 = 8 + 8 + 4\sqrt{3} - 2(2\sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \times \left(\frac{1}{2}\right) = 12$$

$$\Rightarrow BC = 2\sqrt{3}$$

حال به کمک قضیه سینوس‌ها، اندازه \hat{C} و از آنجا زاویه B را می‌یابیم:

$$\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sin \hat{C}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$$

$$\Rightarrow \sin \hat{C} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \hat{C} = 45^\circ \\ \hat{C} = 135^\circ \end{cases} \quad (\text{غ ق ق})$$

$$\Rightarrow \hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$$

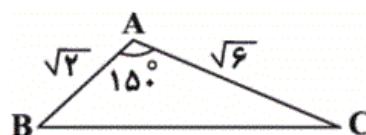
(هندسه ۲ - روابط طولی در مثلث - صفحه‌های ۶۲ تا ۶۹)

۴✓

۳

۲

۱



با توجه به شکل، اندازه ضلع سوم را محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \\ \Rightarrow a^2 &= 2 + 6 - 2 \times \sqrt{6} \times \sqrt{2} \times \cos 15^\circ \\ &= 8 - 2\sqrt{12} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8 + 6 = 14 \Rightarrow a = \sqrt{14} \end{aligned}$$

حال با توجه به قضیه سینوس‌ها در مثلث داریم:

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin A} \\ \Rightarrow R &= \frac{\sqrt{14}}{2 \times \sin 15^\circ} = \sqrt{14} \end{aligned}$$

(هندسه ۲ - روابط طولی در مثلث - صفحه‌های ۶۹ تا ۷۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

-۹۱

(کتاب آبی)

با توجه به شکل، تابع در همسایگی راست ۱ تعریف شده ولی در همسایگی چپ آن تعریف نشده است.

در $x = -1$: تابع در همسایگی چپ ۱ - تعریف شده ولی در همسایگی راست آن تعریف نشده است.

در $x = 0$: تابع در همسایگی این نقطه تعریف نشده است.

در $x = 2$: تابع در همسایگی محدود این نقطه تعریف شده است. پس هم در همسایگی راست و هم در همسایگی چپ ۲ تعریف شده است.

(مسابقات اولیه ۱۳۳۴ تا ۱۳۳۵)

۴

۳

۲

۱ ✓

(کتاب آبی)

با توجه به خواص انتقال افقی برای رسم نمودار تابع $f(x+1)$ کافی است نمودار تابع f را یک واحد به چپ انتقال دهیم، بنابراین برای محاسبه حد تابع $y = f(x+1)$ در $x = 0$ کافی است، حد تابع $y = f(x)$ را در

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x+1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \quad x = 1 \text{ محاسبه کنیم:}$$

از طرفی برای رسم نمودار تابع $-f(x+1)$ کافی است نمودار تابع $f(x+1)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم، پس $\lim_{x \rightarrow 0} -f(x+1) = -2$ خواهد بود:

$$\lim_{x \rightarrow 0} -f(x+1) = -2 \quad \text{قرینه } \lim_{x \rightarrow 0} f(x+1) \text{ خواهد بود:}$$

(مسابان - صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۳۷)

۴

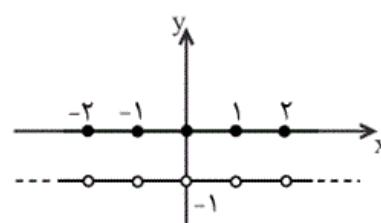
۳

۲ ✓

۱

(کتاب آبی)

راه حل اول: از روش ترسیم استفاده می‌کنیم:



با توجه به نمودار در هر نقطه صحیح یا غیر صحیح، تابع دارای حد -1

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} f(x) = -1 + (-1) = -2 \quad \text{است، پس:}$$

راه حل دوم: دقت می‌کنیم که در میل کردن $x \rightarrow x$ ، x عدد صحیح نخواهد بود، چه x عددی صحیح باشد چه غیر صحیح، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 \quad (x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z})$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = -1 \quad (x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z})$$

پس مجموع آنها -2 خواهد بود.

(مسابان - صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۳۷)

۴

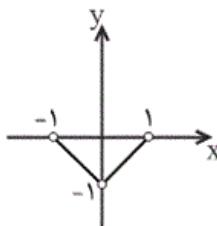
۳ ✓

۲

۱

(کتاب آبی)

با توجه به نمودار تابع f ، وقتی x از دو طرف (چپ و راست) به صفر نزدیک شود، تابع f با مقادیر بزرگتر از -1 به -1 نزدیک می‌شود.



يعنى $[-f(x)] = 0$ ، پس $1 < f(x) < 0$ در نتیجه.

$$\lim_{x \rightarrow 0} [-f(x)] = 0$$

پس داریم:

(مسابان ا- صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۳۷)

۴

۳✓

۲

۱

(کتاب آبی)

حد راست و چپ تابع f را در نقطه $x = -4$ می‌یابیم:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{16-x^2} & -4 \leq x \leq 4 \\ x-4 & x > 4 \text{ یا } x < -4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-4)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-4)^+} \sqrt{16-x^2} = \lim_{x \rightarrow (-4)^+} \sqrt{16-16} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow (-4)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-4)^-} (x-4) = -8$$

حد راست به اندازه ۸ واحد از حد چپ آن، بیشتر است.

(مسابان ا- صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۳۷)

۴

۳

۲✓

۱

اگر هر دو تابع f و g در $x = x_0$ حد داشته باشند، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x))$$

در $x = x_0$ حد داشته باشند و حد حداقل یکی از آنها در این نقطه صفر باشد، حد تابع $f \cdot g$ نیز در این نقطه صفر است. با این توضیح از آنجا که:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

پس حد تابع $f \cdot g$ در $x = 3$ ، $x = 0$ ، $x = -2$ و $x = 2$ صفر است.

اما اگر حداقل یکی از دو تابع f و g در $x = x_0$ حد نداشته باشد، دیگر قضیه حد حاصلضرب در مورد حد تابع $f \cdot g$ کارساز نیست. با توجه به شکل، تابع g در همه نقاط و تابع f در همه نقاط به جز $x = 1$ حد دارند، پس باید $x = 1$ را جداگانه بررسی کنیم.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (f \cdot g)(x) = (\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)) \times (\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)) = 1 \times (-1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (f \cdot g)(x) = (\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x))(\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)) = 0 \times (-1) = 0 \end{cases}$$

۴

۳✓

۲

۱

(کتاب آبی)

دو تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -1 & , x > 0 \\ 1 & , x < 0 \end{cases}$ در $x=0$ حد ندارند ولی مجموع آنها در $x=0$ حد دارد، بنابراین گزینه (۱) حذف می‌شود، از طرفی:

$$(f-g)(x) = \begin{cases} -1-1 & , x > 0 \\ 1-(-1) & , x < 0 \end{cases} = \begin{cases} -2 & , x > 0 \\ 2 & , x < 0 \end{cases}$$

تابع تفاضل در صفر حد ندارد و گزینه (۲) نیز حذف می‌شود.

$$f(x) = \begin{cases} 3 & , x > 0 \\ 5 & , x < 0 \end{cases} \text{ و } g(x) = \begin{cases} -1 & , x > 0 \\ -3 & , x < 0 \end{cases} \text{ از طرفی اگر:}$$

$$(f \cdot g)(x) = \begin{cases} -3 & , x > 0 \\ -15 & , x < 0 \end{cases} \text{ آن‌گاه } f+g \text{ در } x=0 \text{ حد دارد ولی:}$$

که در $x=0$ حد ندارد و گزینه (۴) نیز حذف می‌شود، بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

(حسابان - صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۶)

۴

۳✓

۲

۱

(کتاب آبی)

تابع fog را تشکیل می‌دهیم:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = [x - [x]] = [x] - [x] = 0$$

بنابراین تابع fog تابعی ثابت است و حد آن در $x=1$ برابر صفر است.
لذا حد چپ و راست در $x=1$ موجود و برابرند.

(حسابان - صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۶)

۴

۳

۲

۱✓

(کتاب آبی)

وقتی $x \rightarrow 2^-$ ، آن‌گاه $x < 2$ که در این صورت $[x] = 1$ ،

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - [x]}{x + [x]} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{2 - 1}{2 + 1} = \frac{1}{3}$$

بنابراین:

(حسابان - صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۶)

۴

۳

۲

۱✓

(کتاب آبی)

می دانیم اگر $x > 0$ ، آن‌گاه $x + \frac{1}{x} > 2$ ، لذا:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left[x + \frac{1}{x} \right] = [2^+] = 2$$

(حسابان - صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۳۷)

 ۴ ۳ ۲ ۱

-۱۱۲

(عزیز الله علی اصغری)

تعداد داده‌ها ۷ است. بنابراین چهارمین داده در حالت مرتب شده میانه است. ۳ داده کمتر از ۸ (که میانه است) داریم، بنابراین x حتماً بزرگ‌تر یا مساوی ۸ است. برای یافتن حداقل مقدار میانگین، x را مساوی ۸ در نظر گرفته و میانگین را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{۳+۴+۶+۸+۸+۱۵+۱۹}{۷} = \frac{۶۳}{۷} = 9$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۸۷ تا ۸۹)

 ۴ ۳ ۲ ۱

-۱۱۳

(سید امیر ستوده)

چون در بین داده‌های صورت سوال، داده صفر، یک داده دور افتاده محسوب می‌شود، بنابراین میانگین نمی‌تواند یک معیار گرایش به مرکز مناسب برای این داده‌ها باشد. با توجه به آنکه فراوانی همه داده‌ها یکسان است، این داده‌ها مد ندارند. پس میانه این داده‌ها یک معیار مناسب می‌تواند باشد.

توجه: دامنه میان چارکی معیاری برای پراکندگی داده‌هاست.

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۸۹ تا ۹۱)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(آرش رفیعی)

از هر یک از داده‌ها، ۲۴ واحد کم می‌کنیم. در این صورت از میانگین نیز ۲۴ واحد کم می‌شود.

$x_i - 24$	-۶	-۳	۰	۳	۶
f_i	۳	۲	x	۶	۲

اگر $x'_i = x_i - 24$ باشد، داریم:

$$\bar{x}' = \frac{\sum f_i x'_i}{n} = \frac{(-18) + (-6) + 0 + 18 + 12}{13 + x} = 0 / 24$$

$$\Rightarrow \frac{6}{13 + x} = 0 / 24 \Rightarrow x = 12$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۸۴ تا ۸۶)

 ۴ ۳ ۲ ۱

$\sum f_i x_i + 2$ به ترتیب $5\bar{x} + 2$ و $5\sigma = 10$ است. برای

ضریب تغییرات داده‌ها در حالت اول داریم: $c = \frac{2}{\bar{x}} \Rightarrow \bar{x} = \frac{2}{c}$

اگر ضریب تغییرات داده‌های جدید را با CV نمایش دهیم، داریم:

$$CV = \frac{10}{5\bar{x} + 2} = \frac{10}{5 \times \left(\frac{2}{c}\right) + 2} = \frac{10}{\frac{10}{c} + 2} = \frac{5c}{5 + c}$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۹۳ تا ۹۷)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(محمد پور احمدی)

$$\bar{x} = \frac{x + x + 3x + 3x}{4} \Rightarrow \bar{x} = \frac{8x}{4} \Rightarrow \bar{x} = 2x$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \times f_i}{n} \Rightarrow 4 = \frac{(x - 2x)^2 \times 2 + (3x - 2x)^2 \times 2}{4}$$

$$\Rightarrow 16 = 2x^2 + 2x^2 \Rightarrow 4x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{x > 0} x = 2$$

$$\bar{x} = 2x \Rightarrow \bar{x} = 4$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۹۶ و ۹۷)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(هایدر پوچاری)

$$\bar{x} = \frac{۳۷ + ۳۹ + ۴۱ + ۴۱ + ۴۲}{۵} = ۴۰$$

x_i	۳۷	۳۹	۴۱	۴۱	۴۲
$x_i - \bar{x}$	-۳	-۱	۱	۱	۲
$(x_i - \bar{x})^2$	۹	۱	۱	۱	۴

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{۹+۱+۱+۱+۴}{۵}} = \sqrt{\frac{۱۶}{۵}} = \frac{۴\sqrt{۵}}{۵}$$

$$\Rightarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\frac{۴\sqrt{۵}}{۵}}{۴۰} = \frac{\sqrt{۵}}{۸۰}$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه های ۹۶ و ۹۷)

 ۴ ۳ ۲ ۱ ✓

(امیر هوشمنگ فمسه)

با توجه به فعالیت صفحات ۹۷ و ۹۸ کتاب درسی، مقدار IQR به معنای دامنه میان چارکی $Q_3 - Q_1$ می باشد.

۱، ۲، ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۰

 $Q_1 = ۲$ ، $Q_2 = ۵$ ، میانه $Q_3 = ۹$ Q_1 میانه کل دادهها و Q_3 چارک اول و Q_2 چارک سوم است.

$$\frac{Q_3 + Q_1}{IQR} = \frac{۹+۵}{۹-۲} = ۲$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه های ۹۷ تا ۱۰۰)

 ۴ ۳ ۲ ✓ ۱

(امین کریمی)

توزیع فراوانی در نمودار جعبه‌ای به صورت ۸-۱۹-۸ است که در آن ۱۹ داده داخل و روی جعبه قرار می‌گیرند.

$$\sum f_i \bar{x}_i = n \bar{x} = 35 \times 16 \Rightarrow 15 \times 8 + 18 \times 8 + 19 \times \bar{x}_2 = 35 \times 16$$

$$\Rightarrow \bar{x}_2 = 15 / 57$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۰)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(عزیزاله علی اصغری)

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2}{10} = 5^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 250$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{20} (y_i - \bar{y})^2}{20} = 4^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{20} (y_i - \bar{y})^2 = 320$$

طبق فرض $\bar{y} = \bar{x}$ است، بنابراین داریم:

$$\sigma^2 = \frac{250 + 320}{20 + 10} = \frac{570}{30} = 19 \Rightarrow \sigma = \sqrt{19}$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۹۳ تا ۹۵)

 ۴ ۳ ۲ ۱

$$= \frac{(1-6)^2 + (7-6)^2 + (5-6)^2 + (9-6)^2 + (8-6)^2}{5}$$

$$= \frac{25+1+1+9+4}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

$$\sigma = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۸۴ تا ۹۵)

 ۴ ۳ ۲ ۱