

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات
و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

-۸۲ - اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ باشد، با کدامیک از انتقال‌های زیر نمودار $g(x) = \sqrt{x}$ منطبق

می‌شود؟

- ۱) واحد به بالا، ۱ واحد به چپ، ۱ واحد به پایین
 ۲) واحد به چپ، ۱ واحد به بالا
 ۳) واحد به راست، ۱ واحد به بالا
 ۴) واحد به راست، ۱ واحد به پایین

-۸۳ - نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$ از کدام ناحیه نمی‌گذرد؟

- ۱) اول
 ۲) دوم
 ۳) سوم
 ۴) چهارم

-۸۴ - اگر بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x) = |x-a| - |x-b|$ در آن اکیداً نزولی است، به صورت $[-3, 5]$ باشد، دو تابی مرتباً (a, b) کدام است؟

- (۱) $(3, -5)$
 (۲) $(5, -3)$
 (۳) $(-5, 3)$
 (۴) $(-3, 5)$

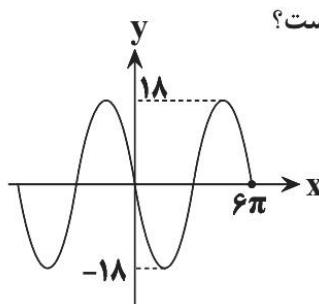
-۸۵ - اگر عبارت $3x^4 + ax^3 + b$ بر $(x^2 - 1)$ بخش‌پذیر باشد، زوج مرتباً (a, b) کدام است؟

- ۱) $(-3, 0)$
 ۲) $(0, -3)$
 ۳) $(2, 1)$
 ۴) اطلاعات مسئله ناقص است.

-۸۶ - دورهٔ تناوب تابع $y = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$ کدام است؟

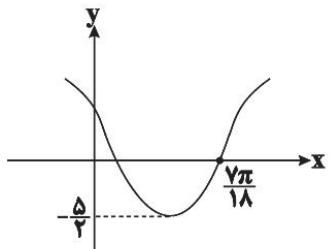
- ۱) $\frac{\pi}{4}$
 ۲) $\frac{\pi}{2}$
 ۳) π
 ۴) دورهٔ تناوب ندارد.

-۸۷ - اگر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = b \sin(ax)$ به صورت زیر باشد، کم‌ترین مقدار $a+b$ کدام است؟



- ۱) $\frac{53}{3}$
 ۲) $-\frac{53}{3}$
 ۳) -18
 ۴) $-\frac{1}{3}$

-۸۸ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos(3x - b)$ را نشان می‌دهد. با فرض این‌که $a, b \in (0, \pi)$ باشد، نمودار این تابع



محور y‌ها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

۱/۲۵ (۲)

۱ (۱)

۱/۵ (۴)

۰/۷۵ (۳)

-۸۹ حاصل عبارت $A = (\tan 55^\circ - 1)(\tan 80^\circ + \tan 80^\circ)$ کدام است؟

$-2\sqrt{2}$ (۴)

-۴ (۳)

$-3\sqrt{3}$ (۲)

-۲ (۱)

-۹۰ کدام گزینه جزء جواب‌های کلی معادله $\cos \Delta x = \sin x$ می‌باشد؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$\frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{8}$ (۴)

$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳)

$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$ (۲)

$\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$ (۱)

-۹۱ جواب‌های معادله $\sin x + \cos 2x = 1$ بر روی دایره مثلثاتی، کدام چندضلعی را ایجاد می‌کنند؟

۲) مریع

۱) مستطیل

۴) مثلث متساوی الساقین

۳) ذوزنقه متساوی الساقین

-۹۲ جواب کلی معادله $\sin^6 x + \cos^6 x = 1$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$x = \frac{k\pi}{2}$ (۴)

$x = k\pi - \frac{\pi}{2}$ (۳)

$x = k\pi$ (۲)

$x = \frac{2k\pi}{3}$ (۱)

-۹۳ اگر $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 13 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه دترمینان ماتریس $A^{-1}B$ کدام است؟

۵۲ (۴)

۲۶ (۳)

۱۳ (۲)

$\frac{13}{2}$ (۱)

-۹۴ اگر $\alpha A - \beta I = A^{-1}$ و $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه حاصل $\alpha - \beta$ کدام است؟

-۴ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

-۳ (۱)

-۱۰۴ به ازای کدام مقدار m ، دستگاه معادلات $\begin{bmatrix} m & n \\ 2 & m+5 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ 2n+1 \\ -2 \end{bmatrix}$ داشته باشد؟

-۶ (۴)

-۲ (۳)

۱ (۱)

-۱۰۵ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $\frac{1}{\lambda} A^2$ کدام است؟

۷۲ (۴)

۲۷ (۳)

۹ (۲)

۹ (۱)

-۱۰۶ شعاع دایره‌ای که با دایره $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ هم مرکز و برخط $3x + 4y = 4$ مماس باشد، کدام است؟

$\frac{6}{5}$ (۴)

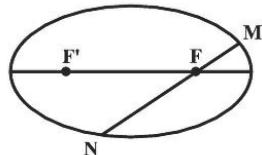
۱ (۳)

$\frac{4}{5}$ (۲)

$\frac{3}{5}$ (۱)

-۱۰۷ دو دایره $C_2 : x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ و $C_1 : x^2 + y^2 - 4x + 4y = 1$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟
۱) متقاطع ۲) مماس داخل ۳) متقاطع ۴) متداخل

-۱۰۸ در شکل زیر F' و F کانون‌های یک بیضی هستند، که طول قطرهای بزرگ و کوچک آن به ترتیب برابر ۱۰ و ۶ است. محیط مثلث MNF' کدام است؟



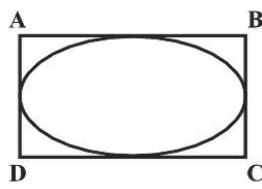
۱۲ (۲)

۲۰ (۴)

۱۰ (۱)

۱۶ (۳)

-۱۰۹ در شکل زیر، یک بیضی به خروج از مرکز $\frac{\sqrt{6}}{3}$ درون یک مستطیل محاط شده است. طول قطر این مستطیل، چند برابر طول ضلع بزرگ مستطیل است؟



$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۲)

$\sqrt{2}$ (۴)

$\sqrt{3}$ (۱)

$\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۳)

-۱۱۰ به ازای کدام مقدار m ، خط $x = 2$ خط هادی سهمی به معادله $y^2 + 6y + 4x + m = 0$ است؟

۱۳ (۴)

۵ (۳)

۱ (۲)

-۳ (۱)

-۱۱۱ اگر $a^{41} + 7^{41}$ مضرب ۱۳ باشد، آنگاه کوچکترین عدد طبیعی a کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

-۱۱۲ باقی‌مانده تقسیم عدد طبیعی a بر اعداد ۶ و ۷ به ترتیب برابر ۴ و ۳ است. باقی‌مانده تقسیم عدد طبیعی a بر ۲۱ کدام است؟

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

- ۱۱۳- اگر باقی‌مانده تقسیم 2^{45} بر ۱۷، برابر a باشد، آنگاه عدد $3a+2$ به کدام دسته همنهشتی به پیمانه ۴ تعلق دارد؟

۲۰۲۱ (۴)

۲۰۲۰ (۳)

۱۳۹۹ (۲)

۱۳۹۸ (۱)

- ۱۱۴- مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی n که به ازای آن، دو عدد $5 - 4n$ و $4 + 9n$ نسبت به هم اول نباشند، کدام است؟

۲۵ (۴)

۱۷ (۳)

۱۵ (۲)

۱۰ (۱)

- ۱۱۵- چند عدد شش رقمی به صورت $\underline{5} \underline{1} \underline{x} \underline{5} \underline{y} \underline{2}$ وجود دارد، به طوری که بر ۳۶ بخش‌پذیر باشد؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

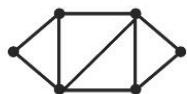
- ۱۱۶- مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی سه رقمی x که در معادله $2^{12} = 16x + 9y$ صدق می‌کند، چقدر است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)



۱۰ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)

- ۱۱۷- گراف شکل مقابل دارای چند دور است؟

- ۱۱۸- گرافی ساده از مرتبه ۸ و اندازه ۱۱، فقط دارای رئوسی از درجه‌های ۲، ۳، ۴ و ۵ است. اگر تعداد رأس‌های درجه ۲ در این گراف، دو واحد بیشتر از تعداد رأس‌های درجه ۳ باشد، آنگاه این گراف چند رأس از درجه ۳ دارد؟

۴ یا ۲ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

- ۱۱۹- شخصی می‌خواهد یک مهمانی ۵ نفره از میان ۹ نفر از دوستان خود برگزار کند. اگر امکان دعوت از دو فرد A و B با هم

وجود نداشته باشد، به چند طریق می‌تواند مهمان‌ها را انتخاب کند؟

۱۲۶ (۴)

۹۱ (۳)

۷۰ (۲)

۴۲ (۱)

- ۱۲۰- ۴ نوع گل در اختیار داریم. به چند طریق می‌توانیم ۷ شاخه گل از میان آن‌ها انتخاب کنیم به‌گونه‌ای که این شاخه‌ها دقیقاً به ۳ نوع گل تعلق داشته باشند؟

۸۰ (۴)

۶۰ (۳)

۲۰ (۲)

۱۵ (۱)

-۹۳ حاصل حد راست تابع $f(x) = \frac{[2-x]}{\sqrt{x+6}-x}$ در نقطه $x=3$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است).

- ∞ (۴)

$+\infty$ (۳)

-۱ (۲)

(۱) صفر

-۹۴ حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^r+1)^r - (x^r-1)^r}{(2x+1)^r + (2x-1)^r}$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

۲ (۳)

۰ (۲) صفر

$+\infty$ (۱)

-۹۵ اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^m[\frac{1}{x}] + 6x^n - 1}{4x^m - (1+n)x^{m+1} + 5} = \frac{3}{2}$ باشد، حاصل mn کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است).

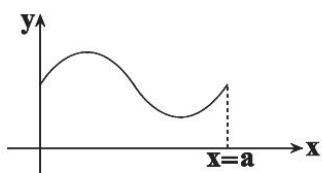
۱ (۲)

-۱ (۱)

(۴) هر مقدار حقیقی می‌تواند باشد.

$\frac{1}{2}$ (۳)

-۹۶ در شکل مقابل با افزایش مقادیر x از $x=a$ تا $x=0$ ، مقدار مشتق تابع چگونه تغییر می‌کند؟



(۱) افزایش - کاهش

(۲) افزایش - کاهش - افزایش

(۳) کاهش - افزایش

(۴) کاهش - افزایش - کاهش

-۹۷ عرض از مبدأ خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = -(x-2)\sqrt{4x^2-5}$ در نقطه $x=2$ واقع بر آن، کدام است؟

-۶ (۴)

-۵ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱)

-۹۸ تعداد نقاط مشتق ناپذیر توابع $f(x) = \sqrt{x^2 - ax + b}$ و $g(x) = |x| - a$ با هم برابر است. چند مقدار صحیح برای a وجود

دارد؟

(۴) صفر

(۳) بی‌شمار

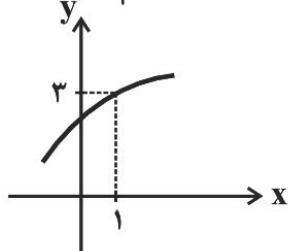
۱ (۲)

۲ (۱)

-۹۹ اگر $x = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟
 $g(x) = (1 - \sin x)f'(x) - f(x)\cos x$ مقدار تابع $f(x) = \frac{1}{\cos x} \tan x$

- $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۱)

-۱۰۰ نمودار تابع f به صورت زیر می‌باشد. اگر $y = f(3x)$ باشد، مشتق تابع y به ازای $x = \frac{1}{3}$ کدام است؟



- ۱۰ (۲) ۵ (۱)
 ۲۱ (۴) ۱۵ (۳)

-۱۰۱ مجموع ریشه‌های معادله $\begin{bmatrix} x & -1 & 1 \\ x & 2 & 1 \\ -1 & 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ x \\ -1 \end{bmatrix} = \bar{O}$ کدام است؟

- ۳ (۴) -۳ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۱)

-۸۱ اگر دامنه تابع $y = f(2x - 1) - 3f(4x - 2)$ به صورت $[-2, 6]$ باشد، دامنه تابع $g(x) = 3f(4x - 2)$ کدام است؟

- $[-3, 1]$ (۴) $[\frac{3}{8}, \frac{11}{8}]$ (۳) $[-\frac{3}{4}, \frac{13}{4}]$ (۲) $[-1, 3]$ (۱)

گزینه «۱» -۸۲

$$f(x) = \sqrt{(x-1)^3 - 1} , \quad g(x) = \sqrt{x+2} + 1$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \in [-2, +\infty) \mid \sqrt{x+2} + 1 \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+2} + 1 \geq 1 \Rightarrow x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow D_{fog} = [-2, +\infty)$$

$$(fog)(x) = \sqrt{x-1} \Rightarrow (fog)(x+1) + 1 = g(x)$$

پس نمودار تابع fog باید ۱ واحد به چپ و ۱ واحد به بالا انتقال یابد تا بر نمودار تابع g منطبق شود.

(ج) (ج)

۴

۳

۲

۱ ✓

گزینه «۲» -۸۳

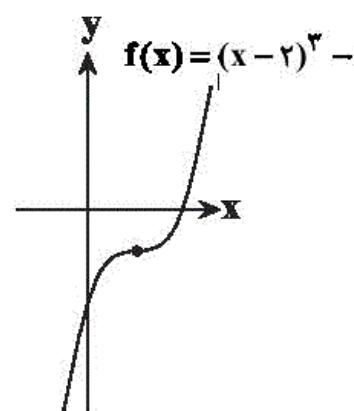
ضابطه تابع را به صورت

$f(x) = (x-2)^3 - 1$ می‌نویسیم و

برای رسم آن، نمودار تابع $y = x^3$ را

۲ واحد به راست و یک واحد به پایین

می‌بریم.



همان‌طور که می‌بینید نمودار تابع از ناحیه دوم عبور نمی‌کند.

(ج) (ج)

۴

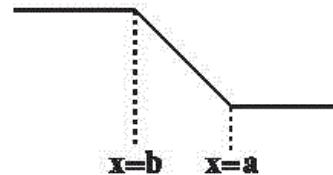
۳

۲ ✓

۱

چون تابع به صورت آبشاری با سرسرهای است و قرار است نزولی باشد، پس
باید $a > b$ باشد این توابع بین ریشه‌های عبارت داخل قدرمطلق اکیداً
یکنوا هستند پس ۵ و ۳- همان ریشه‌ها هستند.

$$\left. \begin{array}{l} a = 5 \\ b = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow (a, b) = (5, -3)$$



(۶) مع

 ۴ ۳ ۲ ۱

من دانیم که اگر عددی بر یک عدد بخش‌پذیر باشد، بر مقسم‌علیه‌های آن
عدد نیز بخش‌پذیر است. به همین شکل می‌توان گفت اگر عبارتی بر یک
عبارت بخش‌پذیر باشد، بر مقسم‌علیه‌های آن عبارت نیز بخش‌پذیر است.
حال چون $b^3 + ax^3 + bx$ بر $(1-x^2)$ بخش‌پذیر است بر عامل‌های آن
یعنی بر $1-x$ و $1+x$ نیز بخش‌پذیر است. پس،

$$P(x) = b^3 + ax^3 + bx$$

$$\begin{cases} P(1) = 0 \Rightarrow 1 + a + b = 0 \\ P(-1) = 0 \Rightarrow -1 + a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 0, b = -1$$

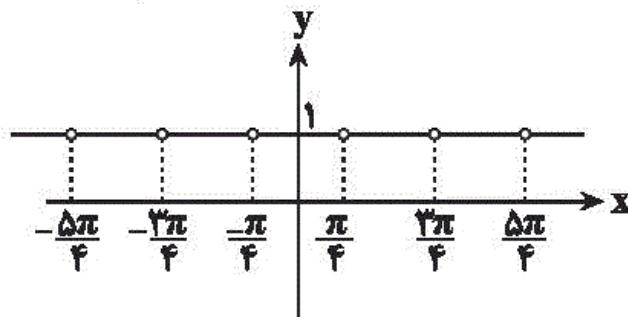
(مفاسبات هیری، معادلات و نامعادلات)

 ۴ ۳ ۲ ۱

با توجه به اتحاد $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ ، این تابع به صورت ثابت

$y = \cos x$ در می‌آید. اما چون نقاط $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ در دامنه تابع نبستند،

بنابراین نمودار تابع به صورت ذیر و دوره تناوب آن $\frac{\pi}{2}$ است.



(متنهات)

۴

۳

۲✓

۱

دوره تناوب تابع 6π و ماکزیمم آن برابر $|b|$ است که ۱۸ می‌شود:

$$\begin{cases} \frac{2\pi}{|a|} = 6\pi \Rightarrow |a| = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{3} \\ |b| = 18 \Rightarrow b = \pm 18 \end{cases}$$

چون نمودار در همسایگی مبدأ نزولی است؛ پس a و b مختلف العلامت هستند.

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{3}, b = 18 \Rightarrow a + b = \frac{53}{3} \\ \text{یا} \\ a = \frac{1}{3}, b = -18 \Rightarrow a + b = -\frac{53}{3} \end{cases} \Rightarrow \min(a + b) = -\frac{53}{3}$$

(متنهات)

۴

۳

۲✓

۱

کمترین مقدار تابع $y = a \cos \theta$ با فرض $a > 0$ برابر $(-a)$ استه پس با

$$\text{توجه به نمودار تابع، داریم، } a = \frac{\Delta}{2}$$

همچنین نمودار تابع، محور x ها را با طول $\frac{\sqrt{3}\pi}{18}$ قطع کرده استه لذا داریم.

$$f\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{18}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{2} \cos\left(3 \times \frac{\sqrt{3}\pi}{18} + b\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{6} + b\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}\pi}{6} + b = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$b = k\pi - \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \xrightarrow[k=1]{<b<\pi} b = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{\Delta}{2} \cos(3x + \frac{\pi}{2})$$

$$\xrightarrow[x=0]{\text{تلایی با محور } y \text{ ها}} f(0) = \frac{\Delta}{2} \cos(0 + \frac{\pi}{2}) = \frac{\Delta}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\Delta}{4} = 1/25$$

(متنهات)

۱

۲

۳

۴

اگر به رابطه 80° و 55° توجه کنیم داریم.

$$55^\circ + 80^\circ = 135^\circ \Rightarrow \tan(55^\circ + 80^\circ) = \tan 135^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\tan 55^\circ + \tan 80^\circ}{1 - \tan 55^\circ \tan 80^\circ} = -1 \Rightarrow \tan 55^\circ + \tan 80^\circ = \tan 55^\circ \tan 80^\circ - 1$$

$$\Rightarrow \tan 55^\circ + \tan 80^\circ - \tan 55^\circ \tan 80^\circ - 1 = -2$$

$$\Rightarrow \tan 55^\circ (1 - \tan 80^\circ) - (1 - \tan 80^\circ) = -2$$

$$\Rightarrow (1 - \tan 80^\circ)(\tan 55^\circ - 1) = -2$$

(متنهات)

۱

۲

۳

۴

$$\cos \Delta x = \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta x = 4k\pi + \frac{\pi}{4} - x \Rightarrow \varphi x = 4k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \Delta x = 4k\pi - \left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Rightarrow \varphi x = 4k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{12} \\ x = \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

(مثبتات)

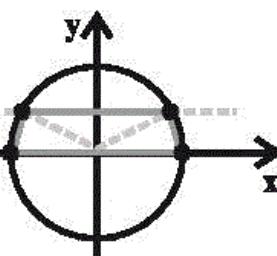
 ۱ ۲ ۳ ۴ ✓

$$\sin x + \cos 2x = 1 \Rightarrow \sin x = 1 - \cos 2x \Rightarrow \sin x = 2 \sin^2 x$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x(2 \sin x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = 0 \end{array}$$



جوابها را در مجموعه دایره مثبتاتی نشان می‌دهیم. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید،

شکل حاصل یک دو زنگنه متساوی الساقین است.

(مثبتات)

 ۱ ۲ ✓ ۳ ۴می‌دانیم $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$ است. پس:

$$1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x \cos^2 x = 0 \Rightarrow (\sin x \cos x)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

(مثبتات)

 ۱ ✓ ۲ ۳ ۴

$$|\mathbf{A}| = 13 \times 2 - 6 \times 4 = 2 \Rightarrow |\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{2}$$

$$|\mathbf{B}| = 5 \times 4 - 3 \times (-2) = 26$$

$$|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}| = |\mathbf{A}^{-1}| |\mathbf{B}| = \frac{1}{2} \times 26 = 13$$

(ماتریس و ترمیتان، دستگاه معادلات خطي)

۴

۳

۲ ✓

۱

ابتدا وارون ماتریس A را محاسبه می‌کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 2 \times 4 - (-2) \times (-5) = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

حال با توجه به معادله داده شده داریم:

$$\alpha A - \beta I = A^{-1} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2\alpha & -2\alpha \\ -5\alpha & 4\alpha \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2\alpha - \beta & -2\alpha \\ -5\alpha & 4\alpha - \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2} \\ 4\alpha - \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow -2 - \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\alpha - \beta = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 2$$

(دستگاه معادلات خطي)

۱

۳

۲ ✓

۱

دستگاه معادلات در صورتی بی شمار جواب دارد که

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow \text{باشد، بنابراین داریم: } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{m}{\gamma} = \frac{\gamma}{m+\delta} \Rightarrow m(m+\delta) = \gamma \Rightarrow m^2 + \delta m - \gamma = 0$$

$$\Rightarrow (m+\delta)(m-\gamma) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -\delta \\ m = \gamma \end{cases}$$

اگر $m = \gamma$ باشد، آنگاه داریم:

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{1}{\gamma} = \frac{n}{\gamma n + 1} \Rightarrow \gamma n + 1 = \gamma n \Rightarrow 1 = 0 \text{ غیرممکن!}$$

اگر $m = -\delta$ باشد، آنگاه داریم:

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{-\delta}{\gamma} = \frac{n}{\gamma n + 1} \Rightarrow n = -\gamma(\gamma n + 1)$$

$$\Rightarrow \gamma n = -\gamma \Rightarrow n = -\frac{\gamma}{\gamma}$$

پس تنها به ازای $n = -\frac{\gamma}{\gamma}$ و $m = -\delta$ دستگاه بی شمار جواب دارد.

(دستگاه معادلات خطی)

۴

۳

۲

۱

با استفاده از دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های 3×3

داریم.

$$|A| = (4+1+6) - (-2+1-12) = 11 - (-13) = 24$$

ماتریس A یک ماتریس مرتبه ۳ است، بنابراین داریم.

$$\left| \frac{1}{\lambda} A^T \right| = \left(\frac{1}{\lambda} \right)^3 |A|^T = \left(\frac{1}{\lambda} \right)^3 \times 24^2 = \left(\frac{1}{\lambda} \times 24 \right)^3 \times \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

(ماتریس و دترمینان)

۴

۳

۲

۱

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0 \Rightarrow O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (1, -1)$$

شعاع دایره برابر فاصله نقطه $O(1, -1)$ از خط $3x + 4y - 4 = 0$ است.

بنابراین داریم.

$$R = \frac{|4(1) + 4(-1) - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5} = 1$$

(مقاطع مفروضی)

۴

۳

۲

۱

ابندا مرکز و شعاع هر یک از دایره‌ها را به دست می‌آوریم:

$$C_1 : x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$$

مرکز: $O_1(2, -2)$

$$\text{شعاع: } R_1 = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 - 4(-1)} = 3$$

$$C_2 : x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$$

مرکز: $O_2(1, -1)$

$$\text{شعاع: } R_2 = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 - 4(1)} = 1$$

$$O_1O_2 = \sqrt{(1-2)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{2}$$

$$O_1O_2 < |R_1 - R_2| \Rightarrow \text{دو دایره متداخل اند}$$

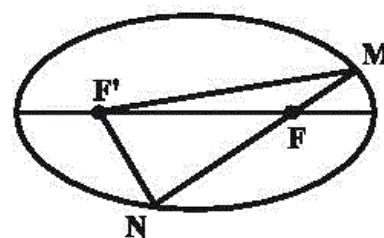
(مقاطع مفروత)

۴ ✓

۳

۲

۱



می‌دانیم مجموع فواصل هر نقطه واقع بر بیضی از دو کانون آن برابر طول قطر

بزرگ بیضی است. بنابراین داریم:

$$\Delta MNF' \text{ محيط} = MN + MF' + NF' = (MF + NF) + MF' + NF'$$

$$= (MF + MF') + (NF + NF') = 10 + 10 = 20$$

(مقاطع مفروత)

۴ ✓

۳

۲

۱

طول اضلاع بزرگ و کوچک این مستطیل به ترتیب برابر طول قطرهای بزرگ و کوچک بیضی است، بنابراین داریم:

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\text{قطر مستطیل}}{\text{ضلع بزرگ مستطیل}} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2}}{AB} = \frac{\sqrt{3a^2 + 3b^2}}{3a}$$

$$= \sqrt{\frac{3a^2 + 3b^2}{3a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(مقاطع مفروض)

 ۳ ۲ ۱ ۴

ابتدا معادله سهمی را به حالت متعارف (استاندارد) تبدیل می‌کنیم:

$$y^2 + 6y + 4x + m = 0 \Rightarrow y^2 + 6y + 9 = -4x - m + 9$$

$$\Rightarrow (y+3)^2 = -4\left(x - \frac{9-m}{4}\right)$$

سهمی افقی است و دهانه آن رو به چپ باز می‌شود. داریم:

$$S: S\left(\frac{9-m}{4}, -3\right) : \text{رأس سهمی}$$

$$4a = 4 \Rightarrow a = 1$$

$$x = \frac{9-m}{4} + 1 = \frac{13-m}{4} : \text{معادله خط هادی}$$

$$\xrightarrow{x=2} \frac{13-m}{4} = 2 \Rightarrow m = 5$$

(مقاطع مفروضی)

 ۴ ۳ ۲ ۱

$$y^2 = 49 \equiv -3 \xrightarrow{\text{بتوان}} y^2 \equiv -27 \equiv -1$$

$$\xrightarrow{\text{بتوان}} y^{42} \equiv -1 \equiv -1$$

$$\xrightarrow{\div y} y^{41} \equiv -1 \Rightarrow y^{41} + a \equiv a - 1 \equiv 0 \Rightarrow a \equiv 1$$

بنابراین کوچکترین عدد طبیعی a ، برابر ۲ است.

(نظریه اعداد)

 ۴ ۳ ۲ ۱

$$\left. \begin{array}{l} a = 9k + 1 \xrightarrow{\times 7} 7a = 63k + 7 \\ a = 9k' + 1 \xrightarrow{\times 9} 9a = 81k' + 9 \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} a = \underbrace{7(9k' - 9k)}_q + 1.$$

$$\Rightarrow a = 7 \times \underbrace{9k'}_q + 1 = 7q' + 1.$$

(نظریه اعداد)

 ۱ ۲ ۳ ۴ ✓

$$2^r = 16 \equiv -1 \xrightarrow{\text{به توان ۱۱}} 2^{rr} \equiv -1$$

$$\xrightarrow{\times r} 2^{ra} \equiv -2 \equiv 15 \Rightarrow a = 15$$

$$2a + 2 = 2(15) + 2 = 32 \equiv 2$$

در بین گزینه های داده شده، باقی مانده تقسیم ۱۳۹۹ بر ۳ برابر ۲ است،

بنابراین داریم:

$$2a + 2 \in [1399]_3$$

(نظریه اعداد)

 ۱ ۲ ۳ ✓ ۴

اگر $(4n + 4, 4n - 5) = d$ باشد، آنگاه داریم.

$$\left. \begin{array}{l} d | 4n + 4 \xrightarrow{\times 4} d | 36n + 16 \\ d | 4n - 5 \xrightarrow{\times 4} d | 36n - 40 \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} d | 61 \Rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ d = 61 \end{cases}$$

$$61 | 4n - 5 \Rightarrow 4n - 5 \equiv 0 \Rightarrow 4n \equiv 5 \equiv -56$$

$$\xrightarrow[61 \times 15 = 1]{+ 4} n \equiv -14 \equiv 47 \Rightarrow n = 61k + 47$$

بزرگترین عدد ۳ رقمی n به ازای $k = 15$ بدست می‌آید.

$$k = 15 \Rightarrow n = 61 \times 15 + 47 = 962 \Rightarrow ۹۶۲ = \text{مجموع ارقام}$$

(نظریه اعداد)

۴

۳ ✓

۲

۱

اگر عددی بر ۳۶ بخش پذیر باشد، آنگاه بر اعداد ۴ و ۹ بخش پذیر است.

عددی بر ۴ بخش پذیر است که دو رقم سمت راست آن بر ۴ بخش پذیر

باشد، پس عدد دو رقمی $\overline{y_2x}$ باید بر ۴ بخش پذیر باشد که در تبیجه y

یک، رقم فرد است. از طرفی عددی بر ۹ بخش پذیر است که مجموع ارقام

آن بر ۹ بخش پذیر باشد. داریم،

$$\overline{y_2x} \equiv 0 \Rightarrow x + y + 13 \equiv 0 \Rightarrow x + y \equiv -13 \equiv 5 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 13 \end{cases}$$

$$y = 1 \Rightarrow x = 4 \quad , \quad y = 4 \Rightarrow x = 1$$

$$y = 5 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 9 \end{cases} \quad , \quad y = 7 \Rightarrow x = 7$$

$$y = 9 \Rightarrow x = 6$$

بنابراین ۶ عدد شش رقمی با مشخصات مورد نظر وجود دارد.

(نظریه اعداد)

۴

۳

۲

۱

$$16x + 9y = 212 \Rightarrow 16x \equiv 212 \equiv 2^8 \times 2^4$$

$$\frac{+19}{(16, 9)=1} \Rightarrow x \equiv 2^4 = 256 \Rightarrow x \equiv 2 + 5 + 6 \equiv 13 \equiv 4$$

$$\Rightarrow x = 4k + 4$$

کوچکترین عدد طبیعی سه رقمی x به ازای $k = 11$ حاصل می‌شود.

$$k = 1 \Rightarrow x = 9 \times 11 + 4 = 103 = 4 \quad \text{مجموع ارقام}$$

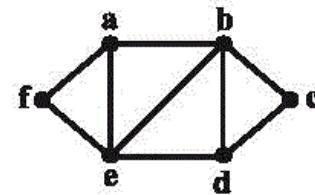
(نظریه اعداد)

۴

۳

۲

۱



اگر رئوس گراف را مطابق شکل نام‌گذاری کنیم، آنگاه دورهای این گراف

عبارت‌اند از:

دورهای به طول ۲: afea, abea, bdeb, bedb

دورهای به طول ۴: abdea, abefa, bcdeeb

دورهای به طول ۵: abcdea, abdefa

دور به طول ۶: abcdefa

بنابراین در مجموع ۱۰ دور در این گراف وجود دارد.

(گراف)

۴

۳

۲

۱

فرض کنید تعداد رأس‌های درجه ۳ و ۴ در این گراف به ترتیب برابر x و

y باشد. در این صورت تعداد رأس‌های درجه ۲ برابر $2 + y$ است و داریم:

$$p = 8 \Rightarrow x + y + 2 = 8 \Rightarrow x + 2y = 6$$

$$2q = 22 \Rightarrow 3x + 4y + 2(y + 2) = 22$$

$$\Rightarrow 3x + 6y = 18 \Rightarrow x + 2y = 6$$

با توجه به اینکه تعداد رأس‌های فرد یک گراف همواره عددی زوج است،

پس مقدار x یعنی تعداد رأس‌های درجه ۳ برابر ۲ یا ۴ است.

(گراف)

۴

۳

۲

۱

دو حالت برای انتخاب مهمان‌ها وجود دارد.

حالت اول، هیچ کدام از دو فرد A و B دعوت نشوند. در این صورت

مهمان‌ها از میان ۷ نفر دیگر انتخاب می‌شوند که تعداد انتخاب‌ها برابر است

با.

$$\binom{7}{5} = 21$$

حالت دوم، یک نفر از میان A و B انتخاب شود. در این صورت ۴ مهمان

دیگر از میان ۷ نفر باقی‌مانده انتخاب می‌شوند که تعداد انتخاب‌ها برابر است

با.

$$\binom{2}{1} \binom{7}{4} = 2 \times 35 = 70$$

بنابراین تعداد روش‌های انتخاب مهمان‌ها برابر است با.

$$21 + 70 = 91$$

(ترکیبیات)

۴

۳

۲

۱

فرض کنید تعداد شاخه گل‌های انتخاب شده از این ۴ نوع گل را با x_1 ,

x_2 و x_3 نشان دهیم. در هر روش انتخاب، تعداد شاخه گل‌های

انتخاب شده از یک نوع باید برابر صفر بوده و از ۳ نوع گل دیگر، حداقل

یک شاخه انتخاب شود. اگر $x_4 = 0$ باشد، آنگاه داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$

$$\Rightarrow \binom{7-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$$

تعداد جواب‌های طبیعی

با توجه به اینکه می‌توان تعداد شاخه گل‌های انتخابی از هر یک از ۳ نوع دیگر

را نیز برابر صفر فرض کرد، بنابراین تعداد راه‌های انتخاب این شاخه گل‌ها

برابر است با،

$$4 \times 15 = 60$$

(ترکیبات)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[2-x]}{\sqrt{x+6}-x} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2}{\sqrt{x+6}-x} \times \frac{\sqrt{x+6}+x}{\sqrt{x+6}+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2(\sqrt{x+6}+x)}{x+6-x} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2(6)}{(x^2-x-6)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{12}{(x-2)(x+2)} = +\infty \end{aligned}$$

توجه کنید که در همسایگی راست نقطه ۲، تابع $y = 2-x$ برخط

منطبق است، $y = -2$

$$2 < x < 4 \Rightarrow -4 < -x < -2 \Rightarrow -2 < 2-x < -1 \Rightarrow [2-x] = -2$$

(هر و پسونگی)

۴

۳ ✓

۲

۱

ابتدا اتحادهای صورت و مخرج را باز می‌کنیم،

$$\frac{(x^2+1)^2 - (x^2-1)^2}{(2x+1)^2 + (2x-1)^2} = \frac{(x^4+2x^2+1) - (x^4-2x^2+1)}{(4x^2+4x+1) + (4x^2-4x+1)} = \frac{4x^2}{8x^2+2}$$

حال حاصل حد کسر را می‌یابیم،

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{8x^2+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{8x^2} = \frac{1}{2}$$

(هر و پسونگی)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

با توجه به نمودار مشخص است که،

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow 0^- \Rightarrow \left[\frac{1}{x} \right] = -1$$

حال حد عبارت داده شده را ساده‌تر می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 \left[\frac{1}{x} \right] + 6x^2 - 1}{4x^3 - (1+n)x^m + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3 + 6x^2 - 1}{4x^3 - (1+n)x^m + 5} = \frac{3}{2}$$

از طرفی با توجه به این‌که حاصل حد فوق برابر یک عدد حقیقی شده است، می‌توان نتیجه گرفت که درجه بزرگ‌ترین جمله عبارت صورت و مخرج با هم برابرند.

لذا $m = 3$ بوده و خواهیم داشت،

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3 + 6x^2 - 1}{-(1+n)x^3 + 4x^2 + 5} = \frac{3}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3}{-(1+n)x^3} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{(1+n)} = \frac{3}{2} \Rightarrow n = \frac{1}{3} \Rightarrow mn = 1$$

(هر و پیوستگی)

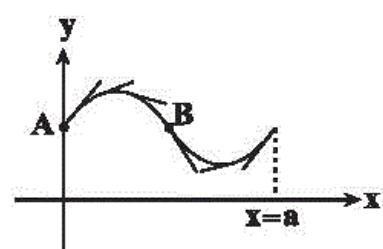
۴

۳

۲ ✓

۱

با توجه به شکل، مقدار مشتق تابع $y = f(x)$ که همان شب خط مماس بر نمودار است، از نقطه A تا B پیوسته کاهش می‌باید و سپس از B به بعد در حال افزایش است.



(مشتق و کاربرد آن)

۴

۳ ✓

۲

۱

طول نقطه در صورت سؤال داده شده و عرض آن هم $f(2) = 0$ است. برای

تعیین شبیب از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)\sqrt{x^2 + 5} - 0}{x - 2} \\ &= \sqrt{2^2 + 5} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow m = 3 \end{aligned}$$

حال معادله خط مماس را می‌نویسیم:

$$\left. \begin{array}{l} A(2, 0) \\ m = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = 3(x - 2) \Rightarrow y = 3x - 6$$

عرض از مبدأ $\rightarrow y = -6$

(مشتق و کاربرد آن)

۴ ✓

۳

۲

۱

ابتدا تعداد نقاط مشتق ناپذیر تابع را بسته به مقادیر مختلف a تعیین می‌کنیم:

اگر $a \geq 0$ باشد آن‌گاه شکل نمودار به صورت  می‌شود که یک نقطه مشتق ناپذیر دارد و اگر $a < 0$ باشد شکل نمودار به صورت

 می‌شود که سه نقطه مشتق ناپذیر دارد.

حال برای f نیز می‌دانیم که ریشه‌های زیر رادیکال نقاط مشتق ناپذیر هستند. پس اگر ریشه‌های عبارت درجه دوم $1 + ax + x^2$ را تعیین کنیم، همان نقاط مشتق ناپذیری خواهند بود که بسته به علامت دلتای آن، می‌تواند صفر، ۱ و یا ۲ باشد.

پس تنها حالتی که مطلوب مسئله رخ می‌دهد، یک نقطه مشتق ناپذیری است.

$a > 0$ (I)

$$\Delta = 0 \Rightarrow a^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$$

غیرق

پس تنها عدد صحیح قابل قبول، $a = 2$ است.

(مشتق و کاربرد آن)

۴

۳

۲ ✓

۱

با توجه به ضابطه g ، در می‌باییم تابع g مشتق تابع

$$h(x) = (1 - \sin x)f(x)$$

$$h(x) = (1 - \sin x) \left(\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} \right) = \frac{(1 - \sin x)}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos x}{\cos x} = \cos x$$

$$\Rightarrow g(x) = h'(x) = -\sin x \Rightarrow g\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(مشتق و کریم دری)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1) + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f(x) - 1)(f(x) - 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f(x) - f(1))(f(x) - 1)}{x - 1}$$

$$= f'(1) \times \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - 1) = f'(1)$$

$$\Rightarrow f'(1) = 1 \circ \Rightarrow f'(1) = \Delta$$

$$y = f(\sqrt{x}) \Rightarrow y' = f'(\sqrt{x}) \xrightarrow{x=\frac{1}{x}} y' = f'(1) = 1 \times \Delta = \Delta$$

(مشتق و کریم دری)

$$\begin{bmatrix} x & -1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ -1 & 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ x \\ -1 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{0}}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x^2 + 1 & x+1 & 2x+2 \\ 2 & x & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ x \\ -1 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{0}}$$

$$\Rightarrow [2x^2 + 2 + x^2 + x - 2x - 2] = \bar{\mathbf{0}} \Rightarrow 2x^2 - x = 0$$

$$\Rightarrow x(2x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

بنابراین مجموع ریشه‌های معادله برابر $\frac{1}{2}$ است.

(ماتریس و ترمیتان)

۳

۲

۱

۸۱- گزینه «۲»

اگر دامنه f را به دست آورده و سپس از روی آن دامنه

$$g(x) = 3f(2x-2) - 3$$

$$-2 \leq x \leq 6 \Rightarrow -4 \leq 2x \leq 12 \Rightarrow -5 \leq 2x-2 \leq 10$$

پس دامنه f به صورت $[-5, 10]$ می‌باشد. برای به دست آوردن دامنه g

$$-5 \leq 2x-2 \leq 10 \Rightarrow -3 \leq 2x \leq 12 \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{12}{2}$$

داریم.

(جواب)

۳

۲

۱