سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درســـنامه ها و جـــزوه های ریاضـــی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)

https://t.me/riazisara

ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)

https://www.instagram.com/riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

ریاضیات گسسته دوازدهم ، ترکیبیات (شمارش) - ۵ سوال -

۱۱۶- ۳ کتاب ریاضی متمایز و ۲ کتاب فیزیک متمایز را به چند طریق می‌توان کنار هم قرار داد به‌گونه‌ای که حداقل ۲ کتاب ریاضی کنار هم باشند؟

۱) ۱۰۸
۲) ۱۱۰
۳) ۱۱۲
۴) ۱۱۴

۱۱۷- مجموعهٔ $A=\{1,2,3,...,11\}$، چند زیر مجموعهٔ ۴ عضوی دارد که مجموع اعضای هر یک از این زیرمجموعه‌ها، عددی زوج باشد؟

۱) ۱۵۰
۲) ۱۵۵
۳) ۱۶۵
۴) ۱۷۰

۱۱۸- با جایگشت ارقام عدد ۱۵۰۱۲۳۵، چند عدد هفت رقمی بخش‌پذیر بر ۵ می‌توان نوشت؟

۱) ۳۶۰
۲) ۴۲۰
۳) ۴۸۰
۴) ۵۴۰

۱۱۹- معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=12$ چند جواب صحیح و نامنفی با شرط $x_5=3$ و $x_4>3$ دارد؟

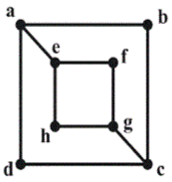
۱) ۳۵
۲) ۵۶
۳) ۸۴
۴) ۱۲۰

۱۲۰- تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4^2 = 12$ کدام است؟

۱) ۶۷
۲) ۸۴
۳) ۱۲۲
۴) ۱۳۳

ریاضیات گسسته دوازدهم ، گراف و مدل سازي - ۵ سوال -

۱۱۱- عدد احاطه‌گری گراف شکل مقابل کدام است؟

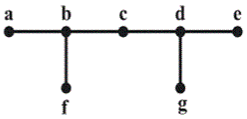


۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۱۲- اختلاف تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم دو گراف P_6 و C_6 کدام است؟

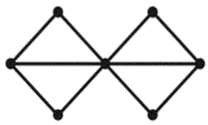
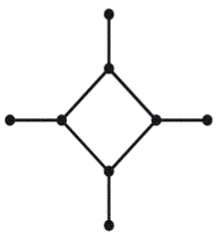
۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۱۱۳- گراف شکل مقابل، چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال دارد؟



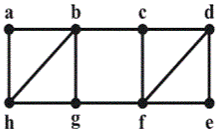
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۱۴- در کدام‌یک از گراف‌های زیر، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم یکتا است؟

۱) P_5
۲) C_5
۳) 
۴) 

www.kanoon.ir

۱۱۵- گراف شکل زیر چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم دارد؟



۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

آمار و احتمال ، آمار توصیفی - ۳ سوال -

۱۲۶- مشاهده‌ای که تفاوت بسیار زیادی با سایر مشاهدات مجموعهٔ داده‌ها داشته باشد، کدام‌یک از معیارهای گرایش به مرکز را تحت تأثیر قرار می‌دهد؟

۱) میانگین ۲) میانه ۳) مد ۴) هر سه معیار

۱۲۸- در بین ۱۲۸ نفر، رنگ چشم ۴۴ نفر قهوه‌ای، ۱۹ نفر آبی، ۴۸ نفر سیاه و ۱۷ نفر سایر رنگ‌ها است. ۴ نفر به این تعداد اضافه شده و در نمودار دایره‌ای کل داده‌ها، زاویهٔ مرکزی مربوط به افراد با رنگ چشم آبی 60° می‌شود. در بین ۴ نفر اضافه شده، چند نفر با رنگ چشم آبی وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۳۰- اگر نمودار جعبه‌ای داده‌های ۴، ۷، ۱۳، ۱۵، ۱۶، ۱۸، ۱۴، ۱۵، ۱۹، ۶، ۱۱ و ۱۸ را رسم کنیم، آنگاه اختلاف میانگین داده‌های داخل جعبه و میانگین داده‌های خارج جعبه کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

آمار و احتمال ، آمار استنباطی - ۲ سوال -

۱۲۹- در نمونه‌گیری تصادفی ساده به اندازهٔ $n = 3$ از جامعهٔ $\{1,2,3,4,5,6\}$، احتمال انتخاب نمونه‌ای که میانگین را ۳ برآورد کند، کدام است؟

۱) ۰/۰۵ ۲) ۰/۱ ۳) ۰/۱۵ ۴) ۰/۲

۱۲۷- نوع متغیرهای «میزان بارندگی»، «نوع بارندگی»، «شاخص تودهٔ بدنی» و «درجهٔ افراد نظامی» به‌ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۱) کمی پیوسته ـ کیفی اسمی ـ کمی گسسته ـ کیفی اسمی

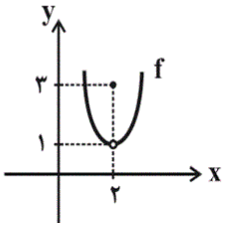
۲) کمی گسسته ـ کیفی ترتیبی ـ کمی گسسته ـ کیفی ترتیبی

۳) کمی پیوسته ـ کیفی اسمی ـ کمی پیوسته ـ کیفی اسمی

۴) کمی پیوسته ـ کیفی اسمی ـ کمی پیوسته ـ کیفی ترتیبی

www.kanoon.ir

۸۱- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. اگر $g(x)=\frac{۴-x^۲}{f(x)}$ باشد، مقدار $g'(۲)$ کدام است؟



۱) $-\frac{۴}{۳}$
۲) -۴
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) وجود ندارد

۸۲- خط $y+۲x+۱=۰$ در نقطه‌ای به طول ۳- بر نمودار تابع f مماس است. حاصل $\lim\limits_{x\to -۳}\frac{۲۵-f^۲(x)}{۲x+۶}$ کدام است؟

۱) ۵
۲) -۵
۳) ۱۰
۴) -۱۰

۸۳- عرض از مبدأ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=(x^۲-۲x)\sqrt{۵x-۱}$ در $x=۲$ کدام است؟

۱) ۶
۲) -۶
۳) ۱۲
۴) -۱۲

۸۴- مشتق راست تابع $f(x)=\sqrt{x^۲-\sqrt{۲x^۲-۱}}$ در $x=۱$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{۲}$
۲) ۲
۳) -۲
۴) $\sqrt{۲}$

۸۵- تابع $f(x)=\begin{cases} a\sin x+۱ & ;x<\frac{\pi}{۳} \\ b\cos x-۱ & ;x\geq\frac{\pi}{۳}\end{cases}$ در $x=\frac{\pi}{۳}$ مشتق‌پذیر است. حاصل $f'(۰)-f'\left(\frac{\pi}{۲}\right)$ کدام است؟

۱) $۱-\sqrt{۳}$
۲) $۱+\sqrt{۳}$
۳) $\sqrt{۳}-۱$
۴) $۱-۲\sqrt{۳}$

۸۶- کم‌ترین مقدار عرض از مبدأ خطوط مماس بر نمودار تابع $f(x)=۲+۲x^۲-\frac{۱}{۳}x^۴$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) صفر
۴) -۱

۸۷- اگر $f(x)=\frac{x^۲-۶x+۱}{x-۳}$ باشد، $f''(۲)$ کدام است؟

۱) ۱۶
۲) ۲۲
۳) ۳۶
۴) ۱۲

www.kanoon.ir

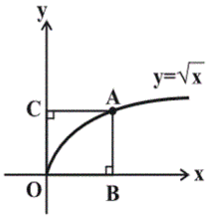
۸۸- مشتق تابع $f(x)=\sqrt{\frac{\sin \pi x}{1+\sin \pi x}}$ در $x=\frac{1}{6}$ چند برابر π است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) ۲

۸۹- اگر $f(x)=x[\sin x]$ و $g(x)=\frac{x}{4-x}$ باشد، مشتق تابع $y=gof(x)$ در نقطهٔ $x=5$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) $\frac{4}{81}$ ۲) $-\frac{4}{81}$ ۳) -۴ ۴) ۴

۹۰- در شکل زیر، مساحت مستطیل $S(x)=ABOC$ تابعی از طول نقطهٔ $A(x)$ است. آهنگ متوسط تغییر تابع $S(x)$ وقتی که x از ۱ به ۴ تغییر می‌کند با آهنگ لحظه‌ای تغییر آن در کدام نقطه برابر است؟



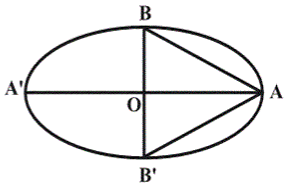
۱) $\frac{144}{81}$ ۲) $\frac{196}{81}$ ۳) $\frac{9}{4}$ ۴) $\frac{25}{4}$

هندسه ۳- دوازدهم ، آشنایی با مقاطع مخروطی - ۱۰ سوال

۱۰۱- در یک بیضی با کانون‌های $F(1,3)$ و $F'(1,-3)$، طول قطر کوچک برابر ۱۲ است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۰۲- در شکل زیر اگر مثلث ABB' متساوی‌الاضلاع باشد، خروج از مرکز بیضی کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

www.kanoon.ir

۱۰۳- نقاط M و N روی یک بیضی به کانون‌های F و F' به‌گونه‌ای واقع‌اند که پاره‌خط MN از مرکز بیضی عبور می‌کند. اگر $MF = NF'$ باشد، آنگاه کدام‌یک از روابط زیر همواره برقرار است؟

۱) $MF' \parallel NF$

۲) $MN = FF'$

۳) $MN \perp FF'$

۴) $MF \perp MF'$

۱۰۴- بدنهٔ داخلی یک بیضی که فاصلهٔ کانونی آن برابر ۷ است، آینه‌ای می‌باشد. اشعهٔ نوری از کانون F بر بدنهٔ داخلی بیضی در نقطهٔ M تابیده می‌شود. اگر $MF = ۳$ و اندازهٔ زاویهٔ بین شعاع تابش و خط مماس بر بیضی درنقطهٔ M برابر ۳۰° باشد، فاصلهٔ نقطهٔ M از کانون دیگر بیضی کدام است؟

۱) ۴/۵

۲) ۵

۳) ۶

۴) ۷/۵

۱۰۵- در کانون یک سهمی خطی عمود بر محور تقارن سهمی رسم می‌نماییم تا سهمی را در دو نقطه قطع کند. فاصلهٔ این دو نقطه از یکدیگر چند برابر فاصلهٔ کانونی سهمی است؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۶

۱۰۶- خط هادی سهمی به معادلهٔ $x^۲ + ۳x + y + ۵ = ۰$ از کدام‌یک از نقاط زیر می‌گذرد؟

۱) $\left(\frac{۵}{۲}, ۲\right)$

۲) $\left(-\frac{۵}{۲}, -۲\right)$

۳) $\left(۲, \frac{۵}{۲}\right)$

۴) $\left(-۲, -\frac{۵}{۲}\right)$

۱۰۷- اگر نقطهٔ $F(۰,۳)$ کانون و خط $x = -۴$ خط هادی یک سهمی باشد، این سهمی محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۷}{۸}$

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $-\frac{۱}{۴}$

۴) $-\frac{۷}{۸}$

www.kanoon.ir

۱۰۸- بازتاب دو اشعهٔ نورانی که به موازات محور yها بر سهمی به معادلهٔ $x^2 - 2x - 4y + m = 0$ تابیده‌اند، در نقطهٔ $(1,3)$ همدیگر را قطع می‌کنند. مقدار m کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) -۱۷ ۳) ۹ ۴) -۹

۱۰۹- قطر قاعدهٔ دو دیش مخابراتی به ترتیب ۶۰ و ۳۰ سانتی‌متر است. اگر فاصلهٔ کانونی دیش اول دو برابر فاصلهٔ کانونی دیش دوم باشد، گودی (عمق) دیش اول چند برابر گودی (عمق) دیش دوم است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۱۱۰- کانون یک سهمی نقطه‌ای به عرض ۴ روی محور yها است و این سهمی محور xها را تنها در نقطه‌ای به طول (-3) قطع می‌کند. بیشترین مقدار ممکن برای فاصلهٔ کانونی این سهمی کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

ریاضي پایه - دوازدهم ، انتگرال - ۲ سوال

۹۹- حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$ کدام است؟

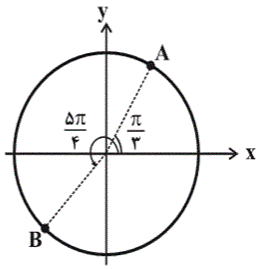
۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۰۰- تابع $f(x)=\left(x^2-16\right)\left[\left[\frac{\sqrt{x}}{2}\right]\right]$ در بازهٔ $(0,a)$، فقط در دو نقطه ناپیوسته است. حداکثر مقدار a کدام است؟ ([ ]، نماد جزءصحیح است.)

۱) ۱۶ ۲) ۱۰۰ ۳) ۶۴ ۴) ۳۶

ریاضي پایه - دوازدهم ، مثلثات - ۳ سوال -

۹۶- در دایرهٔ مثلثاتی زیر، نقاط A و B به‌ترتیب انتهای کمان‌های متناظر با زاویه‌های $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{4}$ هستند. مجذور طول پاره‌خط AB کدام است؟



۱) $2+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$
۲) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$
۳) $2+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$
۴) $1+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

۹۷- اگر تساوی $\frac{a}{\sin^2 x}+\frac{b}{\sin^4 x}+1=\cot^4 x$ یک اتحاد باشد، حاصل ab کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) -۲
۴) -۱

۹۸- اگر $\sin x-\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ باشد، حاصل $\tan x-\cot x$ کدام است؟

۱) $\sqrt{15}$
۲) $-\sqrt{15}$
۳) $-2\sqrt{15}$
۴) $2\sqrt{15}$

ریاضی پایه - دوازدهم ، معادله ها و نامعادله ها - ۳ سوال

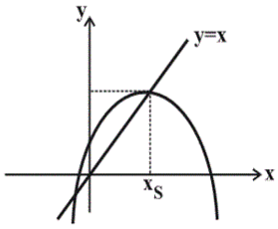
۹۴- اگر $|a+4|=|a-2|$ باشد، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|x-a|<2$ کدام است؟

۱) $(-3,1)$
۲) $(-2,2)$
۳) $(-1,3)$
۴) $(-3,3)$

۹۵- نمودار تابع $f(x)=\frac{1-4x^2}{x^2-2x-3}$ به ازای $x\in(a,b)$ در ناحیهٔ اول دستگاه مختصات قرار دارد. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) ۲/۵

۹۲- سهمی $y=-x^2+ax+\frac{1}{4}$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار x_S کدام است؟



۱) ۱
۲) $\frac{1}{2}$
۳) ۳
۴) $\frac{3}{2}$

ریاضی پایه - دوازدهم ، جبرو معادله - ۲ سوال -

www.kanoon.ir

۹۳- $x=۱$ جواب معادلهٔ $\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x+a}=\frac{a}{۴x}$ است. جواب دیگر آن کدام است؟ $(a\neq ۰)$

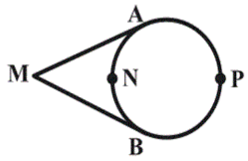
۱) ۲ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۱- ۴) جواب دیگری ندارد.

۹۱- α و β جواب‌های معادلهٔ $۲x^۲-(a-۱)x-۴=۰$ هستند. به ازای کدام مقدار a، $\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}+۲=۰$ است؟

۱) ۵ ۲) ۱۱ ۳) ۲ ۴) ۹

هندسه ۲ یازدهم ، دایره - ۲ سوال -

۱۲۱- مطابق شکل از نقطهٔ M، دو مماس MA و MB بر دایره رسم شده است. اگر $\hat{M}=۳۰^\circ$ باشد، آنگاه اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{APB}$ چند برابر اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{ANB}$ است؟



۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۷}{۵}$

۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۷}{۴}$

۱۲۲- اگر r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC و r_a، r_b و r_c شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی متناظر با اضلاع a، b و c باشند، آنگاه با فرض $a>b>c$، کدام رابطه همواره صحیح است؟

۱) $r_a>r_b>r_c>r$ ۲) $r_c>r_b>r_a>r$

۳) $r>r_a>r_b>r_c$ ۴) $r>r_c>r_b>r_a$

هندسه ۲ یازدهم ، تبدیل هاي هندسي و کاربردها - ۲ سوال -

۱۲۳- کدام یک از تبدیل‌های زیر جهت شکل را حفظ نمی‌کند؟

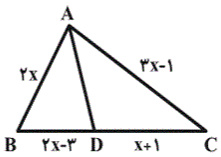
۱) بازتاب ۲) انتقال ۳) دوران ۴) تجانس

۱۲۴- دایرهٔ $C(O,۲)$ و نقطهٔ A مفروض‌اند. اگر $OA=۳$ و دایرهٔ $C'(O',R')$ مجانس دایرهٔ C به مرکز A و نسبت $k=۳$ باشد، آنگاه طول مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ C و C' کدام است؟

۱) ۳ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) ۴ ۴) $۲\sqrt{۵}$

www.kanoon.ir

۱۲۵- در مثلث شکل مقابل، اندازهٔ نیمساز AD کدام است؟



۱) ۵

۲) ۵/۵

۳) ۶

۴) ۶/۵

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۱۱۶- **گزینهٔ «۱»** (مسعود درویشی)

می‌توانیم مسئله را با کمک اصل متمم حل کنیم. متمم آنکه حداقل ۲ کتاب ریاضی کنار هم باشند، آن است که هیچ دو کتابی از میان کتاب‌های ریاضی در کنار هم نباشند که در این صورت کتاب‌ها باید یک در میان قرار بگیرند. تعداد کل جایگشت‌های این ۵ کتاب برابر $5!$ است. اگر کتاب‌ها یک در میان قرار بگیرند، آنگاه ردیف‌های اول، سوم و پنجم متعلق به کتاب‌های ریاضی و ردیف‌های دوم و چهارم متعلق به کتاب‌های فیزیک است که تعداد حالت‌ها برابر $3! \times 2!$ خواهد بود. بنابراین تعداد حالت‌های مطلوب مسئله برابر است با:

$$5! - 3! \times 2! = 120 - 12 = 108$$

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۳۲)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۱۱۷- **گزینهٔ «۴»** *(عادل حسینی)*

مجموعهٔ A را می‌توان به دو زیر مجموعـهٔ $A_1=\{1,3,5,7,9,11\}$ (شـامل اعداد فرد) و $A_2=\{2,4,6,8,10\}$ (شامل اعداد زوج) افـراز نمـود. حالـت های ممکن برای انتخاب یـک زیـر مجموعـهٔ ۴ عضـوی از A کـه مجمـوع اعضای آن عددی زوج باشد، برابر است با:

$$\underbrace{\binom{۵}{۴}}_{\text{۴عدد زوج}}+\underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{۲عدد زوج}}\times\underbrace{\binom{۶}{۲}}_{\text{۲عدد فرد}}+\underbrace{\binom{۶}{۴}}_{\text{۴عدد فرد}}=۵+۱۰\times۱۵+۱۵=۱۷۰$$

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۰)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۱۸- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

اعداد مورد نظر را با توجه به رقم یکان عدد به دو حالت زیر می‌توان تفکیک کرد:

حالت اول: رقم یکان صفر باشد. در این حالت شش رقم باقی‌مانده شـامل دو رقم ۱ و دو رقم ۵ است:

$$\text{تعداد اعداد}=\frac{۶!}{۲!۲!}=\frac{۷۲۰}{۴}=۱۸۰$$

حالت دوم: رقم یکان ۵ باشد. در این حالت صفر نمی تواند اولین رقم سـمت چپ باشد و در میان ارقام باقی‌مانده، دو رقم ۱ وجود دارد:

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.kanoon.ir

۱۱۹- **گزینهٔ «۲»** (عادل حسینی)

با استفاده از تغییر متغیر داریم:

$$x_۴ > ۳ \Rightarrow x_۴ \geq ۴ \Rightarrow x_۴ = y_۴ + ۴$$

$$x_i = y_i \quad (۱ \leq i \leq ۳)$$

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۱۲ \Rightarrow y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ + ۴ + ۳ = ۱۲$$

$$\Rightarrow y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ = ۵$$

$$\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی} = \binom{۵ + ۴ - ۱}{۴ - ۱} = \binom{۸}{۳} = ۵۶$$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۱۲۰- **گزینهٔ «۱»** *(علیرضا شریف‌خطیبی)*

متغیر $x_۴$ حداکثر برابر ۳ است. از طرفی تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + ... + x_k = n$ برابر $\binom{n-۱}{k-۱}$ است، پس داریم:

حالت اول: $x_۴ = ۱ \Rightarrow x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۱$

تعداد جواب‌های طبیعی $= \binom{۱۱-۱}{۳-۱} = \binom{۱۰}{۲} = ۴۵$

حالت دوم: $x_۴ = ۲ \Rightarrow x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۸$

تعداد جواب‌های طبیعی $= \binom{۸-۱}{۳-۱} = \binom{۷}{۲} = ۲۱$

حالت سوم: $x_۴ = ۳ \Rightarrow x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۳$

تعداد جواب‌های طبیعی $= \binom{۳-۱}{۳-۱} = \binom{۲}{۲} = ۱$

بنابراین تعداد جواب‌های طبیعی این معادله برابر است با:

$۴۵ + ۲۱ + ۱ = ۶۷$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۱۱۱- **گزینهٔ «۲»** (مسعود درویشی)

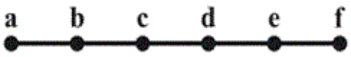
هیچ یک از رأس‌های این گراف با تمامی رئوس دیگر گراف مجاور نیست، پس عدد احاطه‌گری گراف نمی‌تواند برابر یک باشد. از طرفی هر یک از دو مجموعهٔ $\{a,g\}$ و $\{c,e\}$ می‌توانند تمامی رئوس گراف را احاطه کنند، پس عدد احاطه‌گری گراف برابر ۲ است.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: مشابه تمرین ۳ (الف) صفحهٔ ۵۲)

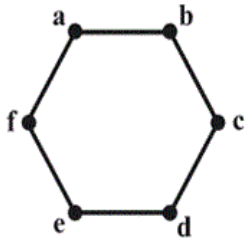
۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۱۲- **گزینهٔ «۳»** (امیرحسین ابومحبوب)

گراف P_6 مطابق شکل تنها دارای یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم، یعنی مجموعهٔ $\{b,e\}$ است.



گراف C_6 مطابق شکل دارای ۳ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم $\{a,d\}$، $\{b,e\}$ و $\{c,f\}$ است.



بنابراین اختلاف تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم این دو گراف، برابر ۲ است.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۴ تا ۵۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.kanoon.ir

۱۱۳- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا شریف‌خطیبی)*

یک مجموعهٔ احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش، دیگر احاطه‌گر نباشد، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم. با توجه به این تعریف، مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال برای این گراف عبارت‌اند از:

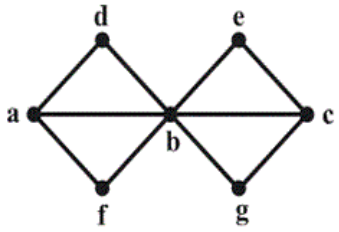
$\{a,f,d\}$ و $\{b,e,g\}$ و $\{a,c,e,f,g\}$ و $\{b,d\}$

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۶ و ۴۷)

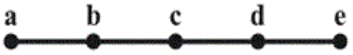
۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۱۴- **گزینهٔ «۳»** *(عزیزاله علی‌اصغری)*

گزینهٔ «۳»: مطابق شکل رأس b با تمام رأس‌های دیگر گراف مجاور است و در نتیجه عدد احاطه‌گری گراف برابر ۱ و مجموعهٔ $\{b\}$ تنها مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم گراف است.

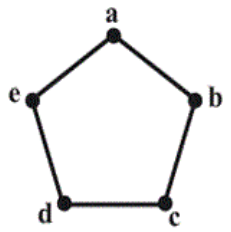


گزینهٔ «۱»: عدد احاطه‌گری گراف برابر ۲ است و مجموعه‌های $\{a,d\}$، $\{b,d\}$ و $\{b,e\}$ مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم گراف هستند.

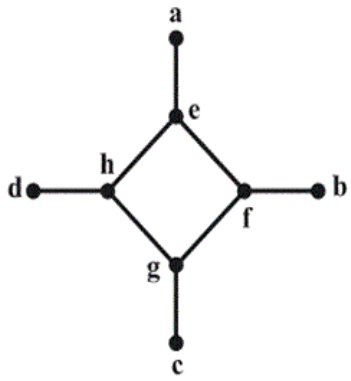


گزینهٔ «۲»: عدد احاطه‌گری گراف برابر ۲ است و مجموعه‌های $\{a,c\}$، $\{a,d\}$، $\{b,d\}$، $\{b.e\}$ و $\{c,e\}$ مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم گراف هستند.

www.kanoon.ir



گزینهٔ «۴»: عدد احاطه‌گری گراف برابر ۴ است. هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم این گراف شامل یک رأس از میان a و e، یک رأس از میان b و f، یک رأس از میان c و g و یک رأس از میان d و h است.



(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۱۵- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

عدد احاطه‌گری این گراف، برابر ۲ است و مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم آن عبارت‌اند از:

$$\{f,h\}\ \text{و}\ \{d,h\}\ \text{و}\ \{b,f\}\ \text{و}\ \{b,e\}\ \text{و}\ \{b,d\}\ \text{و}\ \{a,f\}$$

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.kanoon.ir

۱۲۶- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

مشاهده‌ای که تفاوت بسیار زیادی با سایر مشاهدات مجموعهٔ داده‌ها داشته باشد، دادهٔ دور افتاده نامیده می‌شود. دادهٔ دور افتاده میانگین داده‌ها را تحت تأثیر قرار می‌دهد در حالی که تأثیری بر میانه و مُد داده‌ها ندارد.

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحهٔ ۸۹)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۲۸- **گزینهٔ «۴»** *(فرشاد فرامرزی)*

اگر در بین ۴ نفر اضافه شده، x نفر دارای رنگ چشم آبی باشند، آنگاه داریم:

$$۶۰^\circ = \frac{۱۹+x}{۱۲۸+۴} \times ۳۶۰^\circ \Rightarrow \frac{۱۹+x}{۱۳۲} = \frac{۱}{۶}$$

$$\Rightarrow ۱۱۴ + ۶x = ۱۳۲ \Rightarrow ۶x = ۱۸ \Rightarrow x = ۳$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۷۴ تا ۸۲)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

۱۳۰- **گزینهٔ «۳»** *(فرشاد فرامرزی)*

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

۴,۶,۷,۱۱,۱۳,۱۴,۱۵,۱۵,۱۶,۱۸,۱۸,۱۹

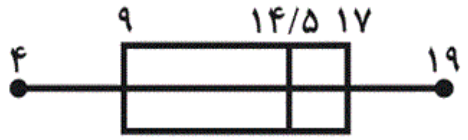
تعداد داده‌ها برابر ۱۲ (عددی زوج) است، پس میانهٔ داده‌ها برابر میانگین دو

www.kanoon.ir

دادهٔ وسط است. در نتیجه چارک اول برابر میانهٔ ۶ دادهٔ اول (داده‌های قبل از میانه) و چارک سوم برابر میانهٔ ۶ دادهٔ آخر (داده‌های بعد از میانه) است، پس داریم:

$$Q_۲=\frac{۱۴+۱۵}{۲}=۱۴/۵\ ,\ Q_۱=\frac{۷+۱۱}{۲}=۹\ ,\ Q_۳=\frac{۱۶+۱۸}{۲}=۱۷$$

بنابراین نمودار جعبه‌ای داده‌ها به‌صورت زیر است:



اگر $\bar{x}_۱$ و $\bar{x}_۲$ به‌ترتیب میانگین داده‌های داخل جعبه و خارج جعبه باشند، داریم:

$$\bar{x}_۱=\frac{۱۱+۱۳+۱۴+۱۵+۱۵+۱۶}{۶}=\frac{۸۴}{۶}=۱۴$$

$$\bar{x}_۲=\frac{۴+۶+۷+۱۸+۱۸+۱۹}{۶}=\frac{۷۲}{۶}=۱۲$$

$$\bar{x}_۱-\bar{x}_۲=۱۴-۱۲=۲$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی: صفحه‌های ۹۷ و ۹۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.kanoon.ir

$\{۲,۳,۴\},\{۱,۳,۵\},\{۱,۲,۶\}$

بنابراین احتمال انتخاب نمونه‌ای که میانگین را ۳ برآورد کند، برابر

$\frac{۳}{۲۰} = ۰/۱۵$ است.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۲۷- **گزینهٔ «۴»** (سیدوحید ذوالفقاری)

میزان بارندگی متغیر کمی پیوسته، نوع بارندگی متغیر کیفی اسمی، شاخص

تودهٔ بدنی متغیر کمی پیوسته و درجهٔ افراد نظامی متغیر کیفی ترتیبی است.

(ریاضی ۱- آمار و احتمال: صفحه‌های ۱۵۹ تا ۱۷۰)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۸۱- **گزینهٔ «۲»** (سعید علم‌پور)

تابع g در $x=۲$ پیوسته است و $g(۲)=۰$ است. داریم:

$$g'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{g(x)-g(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{\frac{۴-x^{۲}}{f(x)}}{x-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{-(x-۲)(x+۲)}{(x-۲)f(x)}=\lim_{x\to ۲}\frac{-(x+۲)}{f(x)}=-\frac{۴}{۱}=-۴$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۷۸ تا ۸۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۸۲- **گزینهٔ «۳»** *(علی شهرابی)*

نقطه‌ای به طول ۳- روی خط و نمودار f مشترک است:

$$y+2x+1=0 \xrightarrow{x=-3} y-6+1=0 \Rightarrow y=5 \Rightarrow f(-3)=5$$

شیب خط مماس همان مشتق تابع f در $x=-3$ است:

$$f'(-3)=-2$$

حال مقدار حد داده شده را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -3}\frac{25-f^2(x)}{2x+6}=\lim_{x\to -3}\frac{-\big(f(x)-5\big)\big(f(x)+5\big)}{2(x+3)}$$

$$=-\lim_{x\to -3}\frac{f(x)-f(3)}{x-(-3)}\times\lim_{x\to -3}\frac{f(x)+5}{2}=-f'(-3)\times\frac{f(-3)+5}{2}$$

$$=-(-2)\times\frac{5+5}{2}=10$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۷۸ تا ۸۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۸۳- **گزینهٔ «۴»** *(علی سلامت)*

برای محاسبهٔ شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $x=2$ از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\big(x^2-2x\big)\sqrt{5x-1}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)\sqrt{5x-1}}{x-2}=2\times 3=6\Rightarrow f'(2)=6$$

اکنون به کمک رابطهٔ $y-y_0=m(x-x_0)$ معادلهٔ خط مماس را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$y-0=6(x-2)\Rightarrow y=6x-12$$

عرض از مبدأ این خط برابر ۱۲- است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۷۸ تا ۸۰)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.kanoon.ir

۸۴- **گزینهٔ «۴»** (میلاد سجادی‌لاریجانی)

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-\sqrt{2x^2-1}}-0}{x-1} \xrightarrow[\text{مزدوج صورت}]{\text{ضرب صورت و مخرج در}}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-\sqrt{2x^2-1}}}{x-1} \times \frac{\sqrt{x^2+\sqrt{2x^2-1}}}{\sqrt{x^2+\sqrt{2x^2-1}}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^4-2x^2+1}}{(x-1)\times\sqrt{2}}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{(x^2-1)^2}}{(x-1)(\sqrt{2})} = \lim_{x\to 1^+} \frac{|x^2-1|}{(x-1)\times\sqrt{2}}$$

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.kanoon.ir

۸۵- **گزینهٔ «۱»** (سعید علم‌پور)

در ابتدا تابع در $x=\frac{\pi}{۳}$ باید پیوسته باشد:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{۳}\right)^-} f(x)=a\sin\left(\frac{\pi}{۳}\right)+۱=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a+۱ \\ f\left(\frac{\pi}{۳}\right)=\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{۳}\right)^+} f(x)=b\cos\left(\frac{\pi}{۳}\right)-۱=\frac{b}{۲}-۱ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{پیوستگی}} \frac{\sqrt{۳}}{۲}a+۱=\frac{b}{۲}-۱ \qquad (۱)$$

برای مشتق تابع f داریم:

$$f'(x)=\begin{cases} a\cos x & ;x<\frac{\pi}{۳} \\ -b\sin x & ;x\geq\frac{\pi}{۳} \end{cases} \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_-\left(\frac{\pi}{۳}\right)=a\cos\left(\frac{\pi}{۳}\right)=\frac{a}{۲} \\ f'_+\left(\frac{\pi}{۳}\right)=-b\sin\left(\frac{\pi}{۳}\right)=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}b \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق‌پذیری}} \frac{a}{۲}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}b \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} a=-\sqrt{۳}\ ,\ b=۱$$

$$\xrightarrow{(*)} f'(x)=\begin{cases} -\sqrt{۳}\cos x & ;x<\frac{\pi}{۳} \\ -\sin x & ;x\geq\frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(۰)-f'\left(\frac{\pi}{۲}\right)=-\sqrt{۳}\cos(۰)+\sin\left(\frac{\pi}{۲}\right)=-\sqrt{۳}+۱$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۸۴ تا ۸۹)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۸۶- **گزینهٔ «۱»** *(عادل حسینی)*

رابطهٔ خط مماس بر نمودار تابع در نقطهٔ $\big(a,f(a)\big)$ به‌صورت زیر است:

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

$$\Rightarrow y=f'(a)x+f(a)-af'(a)$$

عرض از مبدأ خط مورد نظر $f(a)-af'(a)$ است. این مقدار باید کم‌ترین باشد. داریم:

$$f(x)=-\frac{۱}{۳}x^۴+۲x^۲+۲$$

$$f'(x)=-\frac{۴}{۳}x^۳+۴x$$

$$\Rightarrow f(a)-af'(a)=a^۴-۲a^۲+۲=\left(a^۲-۱\right)^۲+۱$$

کم‌ترین مقدار عرض از مبدأ برابر ۱ خواهد شد که در $a=\pm ۱$ رخ می‌دهد.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۹۲ و ۹۳)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۸۷- **گزینهٔ «۱»** *(سعید مدیرخراسانی)*

$$f(x)=\frac{(x-۳)^۲-۸}{x-۳}=x-۳-\frac{۸}{x-۳}$$

$$\Rightarrow f'(x)=۱+\frac{۸}{(x-۳)^۲}\Rightarrow f''(x)=-\frac{۱۶}{(x-۳)^۳}$$

$$\Rightarrow f''(۲)=\frac{-۱۶}{-۱}=۱۶$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۹۲ تا ۹۴)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۸۸- **گزینهٔ «۳»** (عادل حسینی)

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{\sin\pi x}{1+\sin\pi x}}}\left(\frac{\sin\pi x}{1+\sin\pi x}\right)'$$

$$y=\frac{\sin\pi x}{1+\sin\pi x}\Rightarrow y'=\frac{\pi\cos\pi x}{(1+\sin\pi x)^2}$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{1+\sin\frac{\pi}{6}}}}\cdot\frac{\pi\cos\frac{\pi}{6}}{\left(1+\sin\frac{\pi}{6}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi}{\frac{9}{4}}=\frac{\pi}{3}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۹۲ تا ۹۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۸۹- **گزینهٔ «۲»** (سیروس نصیری)

در اطراف $x=5$ مقدار $[\sin x]$ برابر $[\sin 5]$ یعنی ۱- است. دقت کنید که ۵ رادیان در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی قرار دارد.

$$y=gof(x)=g(x[\sin x])=\frac{x[\sin x]}{4-x[\sin x]}$$

$$\xrightarrow{[\sin x]=-1} y=\frac{-x}{4+x}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{-4}{(4+x)^2}\Rightarrow y'(5)=\frac{-4}{(4+5)^2}=\frac{-4}{81}$$

(حسابان ۲- صفحهٔ ۹۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۹۰- **گزینهٔ «۲»** (جهانبخش نیکنام)

مساحت مستطیل $ABOC$ برابر است با $S(x)=x\sqrt{x}$. پس داریم:

$$\text{آهنگ متوسط در فاصلهٔ } [1,4] = \frac{S(4)-S(1)}{4-1}=\frac{8-1}{3}=\frac{7}{3}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای}: S'(x)=\sqrt{x}+x\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$\xrightarrow{S'(x)=\frac{7}{3}} \frac{3}{2}\sqrt{x}=\frac{7}{3}\Rightarrow x=\frac{196}{81}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۰۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۰۱- **گزینهٔ «۱»** (مسعود درویشی)

$$\text{فاصلهٔ کانونی} = 2c = FF' = |3-(-3)| = 6 \Rightarrow c=3$$

$$\text{طول قطر کوچک} = 2b = 12 \Rightarrow b=6$$

$$a^2=b^2+c^2=36+9=45\Rightarrow a=3\sqrt{5}$$

$$\text{خروج از مرکز} = \frac{c}{a}=\frac{3}{3\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۱۰۲- **گزینهٔ «۲»** (عادل حسینی)

مثلث ABB' متساوی‌الاضلاع است، بنابراین داریم:

$$AB = BB' \Rightarrow \sqrt{OA^2 + OB^2} = BB' \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 2b$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} a^2 + b^2 = 4b^2 \Rightarrow a^2 = 3b^2 \Rightarrow a^2 = 3\left(a^2 - c^2\right)$$

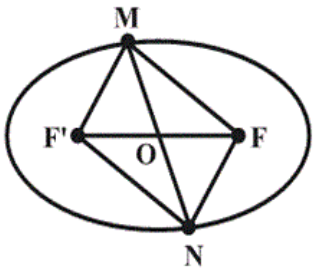
$$\Rightarrow 3c^2 = 2a^2 \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \text{خروج از مرکز} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۰۳- **گزینهٔ «۱»** (امیرحسین ابومحبوب)



می‌دانیم مجموع فواصل هر نقطهٔ واقع بر بیضی از دو کانون آن برابر طول قطر بزرگ بیضی است.

بنابراین داریم:

$$MF + MF' = NF + NF' \xrightarrow{MF = NF'} MF' = NF$$

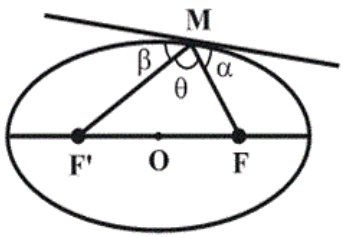
$$\left.\begin{matrix} MF = NF' \\ MF' = NF \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{چهارضلعی } MFNF' \text{ متوازی‌اضلاع است}$$

$$\Rightarrow MF' \parallel NF$$

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۱۰۴- **گزینهٔ «۲»** (محمد خندان)



می‌دانیم اگر اشعهٔ نوری از یکی از کانون‌های بیضی عبور کرده و بر بدنهٔ داخلی بیضی بتابد، آنگاه انعکاس آن از کانون دیگر بیضی عبور می‌کند و پرتوهای تابش و بازتابش با خط مماس بر بیضی (در نقطهٔ برخورد شعاع تابش با بیضی) زوایای مساوی می‌سازند. بنابراین مطابق شکل داریم:

$$\beta = \alpha = ۳۰^\circ \Rightarrow \theta = ۱۸۰^\circ - ۲\times ۳۰^\circ = ۱۲۰^\circ$$

طبق قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث MFF' داریم:

$$FF'^۲ = MF^۲ + MF'^۲ - ۲MF\times MF'\times \cos\theta$$

$$\Rightarrow ۴۹ = ۹ + MF'^۲ - ۲\times ۳\times MF'\times\left(-\frac{۱}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow MF'^۲ + ۳MF' - ۴۰ = ۰ \Rightarrow (MF'+۸)(MF'-۵) = ۰$$

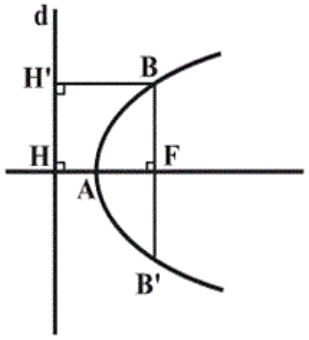
$$\Rightarrow \begin{cases} MF' = -۸ \text{ غ.ق.ق} \\ MF' = ۵ \end{cases}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ مشابه فعالیت ۴ صفحهٔ ۵۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۱۰۵- **گزینهٔ «۳»** (محمد خندان)



می‌دانیم هر نقطهٔ واقع بر سهمی از کانون و خط هادی سهمی به یک فاصله است، بنابراین مطابق شکل $BF = BH'$ و در نتیجه چهارضلعی $BFHH'$ مربع است. فاصلهٔ کانون تا خط هادی برابر $FH = 2a$ است، پس $BF = 2a$ و طول BB' چهار برابر فاصلهٔ کانونی سهمی است.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحهٔ ۵۵)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۶- **گزینهٔ «۴»** (مسعود درویشی)

ابتدا معادلهٔ سهمی را به‌صورت متعارف می‌نویسیم:

$$x^۲+۳x+y+۵=۰ \Rightarrow x^۲+۳x+\frac{۹}{۴}=-y-۵+\frac{۹}{۴}$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{۳}{۲}\right)^۲=-\left(y+\frac{۱۱}{۴}\right)$$

دهانهٔ سهمی رو به پایین و $A\left(-\frac{۳}{۲},-\frac{۱۱}{۴}\right)$ **رأس آن است. داریم:**

$$۴a=۱ \Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$$

$$\text{معادلهٔ خط هادی : } y=a+k \Rightarrow y=\frac{۱}{۴}-\frac{۱۱}{۴}=-\frac{۵}{۲}$$

از بین نقاط داده شده تنها نقطهٔ $\left(-۲,-\frac{۵}{۲}\right)$ **بر خط هادی سهمی واقع است.**

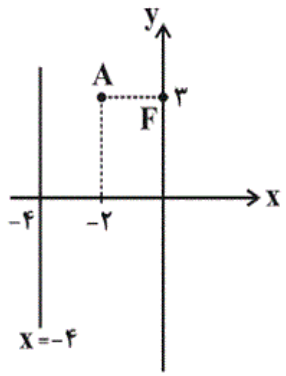
(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.kanoon.ir

۱۰۷- **گزینهٔ «۴»** *(عادل حسینی)*

رأس سهمی دقیقاً وسط کانون و خط هادی سهمی قرار دارد، پس مطابق شکل نقطهٔ $A(-۲,۳)$ رأس سهمی و دهانهٔ سهمی رو به راست است.



از طرفی فاصلهٔ کانونی سهمی برابر فاصلهٔ کانون تا رأس یعنی برابـر ۲ اسـت، بنابراین داریم:

معادلهٔ سهمی : $(y-۳)^۲=۸(x+۲)$

$$\xrightarrow{y=۰} ۹=۸x+۱۶ \Rightarrow ۸x=-۷ \Rightarrow x=-\frac{۷}{۸}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

۱ ۲ ۳ ۴✓

$$\Rightarrow (x-۱)^۲=۴\left(y-\frac{m-۱}{۴}\right)$$

نقطهٔ $A\left(۱,\frac{m-۱}{۴}\right)$ **رأس سهمی و دهانهٔ آن رو به بالا است. داریم:**

$$۴a=۴ \Rightarrow a=۱$$

کانون سهمی : $F(h,a+k)=\left(۱,۱+\frac{m-۱}{۴}\right)$

$$۱+\frac{m-۱}{۴}=۳ \Rightarrow \frac{m-۱}{۴}=۲ \Rightarrow m=۹$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۲ تا ۵۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.kanoon.ir

۱۰۹- **گزینهٔ «۲»** *(محمد خندان)*

اگر a فاصلهٔ کانونی، d قطر قاعـده و h گـودی (عمـق) دیـش مخـابراتی باشد، آنگاه رابطهٔ $a=\frac{d^۲}{۱۶h}$ برقرار است. در نتیجه داریم:

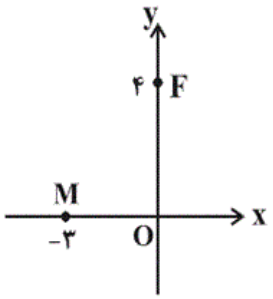
$$\frac{h_۱}{h_۲}=\frac{\frac{d_۱^۲}{۱۶a_۱}}{\frac{d_۲^۲}{۱۶a_۲}}=\left(\frac{d_۱}{d_۲}\right)^۲\times\frac{a_۲}{a_۱}=\left(\frac{۶۰}{۳۰}\right)^۲\times\frac{۱}{۲}=۴\times\frac{۱}{۲}=۲$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ مشابه تمرین ۱۳ صفحهٔ ۵۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۱۰- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

از آنجا که سهمی فقط در یک نقطه محور x ها را قطع می‌کند، پس دهانهٔ آن رو به راست یا چپ باز می‌شود (سهمی افقی است).



می‌دانیم فاصلهٔ هر نقطهٔ واقع بر سهمی از خط هادی و کانون سهمی برابر است، بنابراین اگر خط $x=\alpha$ خط هادی سهمی باشد، آنگاه داریم:

$$MF=\sqrt{(۰+۳)^۲+(۴-۰)^۲}=۵$$

$$|\alpha-(-۳)|=۵\Rightarrow|\alpha+۳|=۵\Rightarrow\begin{cases}\alpha+۳=۵\Rightarrow\alpha=۲\\ \alpha+۳=-۵\Rightarrow\alpha=-۸\end{cases}$$

اگر $x=۲$ خط هادی سهمی باشد، آنگاه فاصلهٔ کانون از خط هادی برابر ۲ و فاصلهٔ کانونی سهمی برابر ۱ است.

اگر $x=-۸$ خط هادی سهمی باشد، آنگاه فاصلهٔ کانون از خط هادی برابر ۸ و فاصلهٔ کانونی سهمی برابر ۴ است.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۰ تا ۵۵)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.kanoon.ir

۹۹- **گزینهٔ «۴»** *(محمد توحیدلو)*

با ضرب صورت و مخرج در مزدوج صورت داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}\times\frac{1+\sqrt{\cos x}}{1+\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

(حسابان۱- حد و پیوستگی: صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۰۰- **گزینهٔ «۳»** *(وحید ون آبادی)*

تابع $y=\left[\frac{\sqrt{x}}{2}\right]$ در نقاط صحیح به فرم $x=4k^2\ (k\in\mathbb{Z})$، ناپیوسته است. یعنی در نقاط به طول ۴، ۱۶، ۳۶، ۶۴ و ... ناپیوسته است. اما از آنجا که تابع f، در $x=4$ پیوسته است، طول نقاط ناپیوستهٔ تابع به‌صورت زیر است:

۱۶,۳۶,۶۴,...

برای اینکه در بازهٔ $(0,a)$، دو نقطهٔ ناپیوسته داشته باشد، حداکثر مقدار a باید برابر ۶۴ باشد.

(دقت کنید که:

$$x\to 4^+:\left[\frac{\sqrt{x}}{2}\right]=1\Rightarrow\lim_{x\to 4^+}f(x)=\lim_{x\to 4^+}(x^2-16)=0$$

$$x\to 4^-:\left[\frac{\sqrt{x}}{2}\right]=0\Rightarrow\lim_{x\to 4^-}f(x)=\lim_{x\to 4^-}0=0$$

پس f در $x=4$ پیوسته است.)

(حسابان۱- حد و پیوستگی: صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.kanoon.ir

۹۶- **گزینهٔ «۱»** (کاظم اجلالی)

توجه کنید که:

$$\begin{cases} y_A = \sin\frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ x_A = \cos\frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_B = \sin\frac{۵\pi}{۴} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{۴}\right) = -\sin\frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ x_B = \cos\frac{۵\pi}{۴} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{۴}\right) = -\cos\frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB^۲ = (x_A - x_B)^۲ + (y_A - y_B)^۲$$

$$= \left(\frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ = ۲ + \frac{\sqrt{۲} + \sqrt{۶}}{۲}$$

(حسابان ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۴)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۹۷- **گزینهٔ «۳»** (حمید مام‌قادری)

می‌دانیم:

$$\frac{۱}{\sin^۲ x} = ۱ + \cot^۲ x$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin^۲ x} + \frac{b}{\sin^۴ x} + ۱ = a\left(۱ + \cot^۲ x\right) + b\left(۱ + \cot^۲ x\right)^۲ + ۱$$

$$= a + a\cot^۲ x + ۲b\cot^۲ x + b\cot^۴ x + ۱ + b$$

$$= b\cot^۴ x + (a + ۲b)\cot^۲ x + a + b + ۱ = \cot^۴ x$$

برای اینکه رابطهٔ بالا یک اتحاد باشد، باید داشته باشیم:

$$b = ۱;\ a + ۲b = ۰;\ a + b + ۱ = ۰ \Rightarrow b = ۱, a = -۲ \Rightarrow ab = -۲$$

(ریاضی۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

www.kanoon.ir

$$= ۱ - \sin ۲x = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \sin ۲x = \frac{۱}{۴}$$

از طرف دیگر داریم:

$$\tan x - \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^۲ x - \cos^۲ x}{\sin x \cos x} = -\frac{\cos ۲x}{\frac{۱}{۲}\sin ۲x}$$

$$= -۲\cot ۲x$$

بنابراین باید ابتدا مقدار $\cot ۲x$ را به‌دست بیاوریم:

$$۱ + \cot^۲ ۲x = \frac{۱}{\sin^۲ ۲x} \Rightarrow ۱ + \cot^۲ ۲x = \frac{۱}{\left(\frac{۱}{۴}\right)^۲} \Rightarrow \cot^۲ ۲x = ۱۵$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cot ۲x = \sqrt{۱۵} & \text{غ.ق.ق} \\ \cot ۲x = -\sqrt{۱۵} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan x - \cot x = -۲\cot ۲x = ۲\sqrt{۱۵}$$

توجه کنید که از $\frac{\pi}{۲} < x < \frac{\pi}{۴}$ نتیجه می‌شود $\frac{\pi}{۲} < ۲x < \pi$ و در نتیجه $\cot ۲x$ در این بازه مقداری منفی است.

(حسابان ۱- مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۹۴- **گزینهٔ «۱»** *(کاظم اجلالی)*

ابتدا مقدار a را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a - ۲ = a + ۴ \Rightarrow -۲ = ۴ & \text{غ.ق.ق} \\ a - ۲ = -a - ۴ \Rightarrow ۲a = -۲ \Rightarrow a = -۱ \end{cases}$$

بنابراین باید نامعادلهٔ $|x + ۱| < ۲$ را حل کنیم:

$$-۲ < x + ۱ < ۲ \Rightarrow -۳ < x < ۱$$

پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله، بازهٔ $(-۳, ۱)$ است.

(ریاضی۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها: صفحه‌های ۹۱ تا ۹۳)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۹۵- **گزینهٔ «۴»** *(علی شهرابی)*

در ناحیهٔ اول، باید $x>0$ و $f(x)>0$ باشد. ابتدا ضابطهٔ تابع f را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{(1-2x)(1+2x)}{(x-3)(x+1)}$$

x		-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		3	
$f(x)$	$-$	تن	$+$	0	$-$	0	$+$	تن	$-$

در مجموعهٔ $\left(\frac{1}{2},3\right)\cup\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ شرط $f(x)>0$ برقرار است که اشتراک آن با شرط $x>0$ بازهٔ $\left(\frac{1}{2},3\right)$ است، پس حداکثر مقدار $b-a$ برابر خواهدشد با: $3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}=2/5$.

(ریاضی۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها: صفحه‌های ۸۳ تا ۸۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۹۲- **گزینهٔ «۲»** *(عرفان صادقی)*

داریم: $x_S=\frac{a}{2}$. از روی شکل مشخص است که رأس سهمی روی خط $y=x$ قرار دارد؛ یعنی $y_S=x_S$ است.

$$y_S=-\left(\frac{a}{2}\right)^2+a\left(\frac{a}{2}\right)+\frac{1}{4}=\frac{a^2}{4}+\frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{x_S=\frac{a}{2}} y_S=x_S^2+\frac{1}{4}\xrightarrow{y_S=x_S} x_S^2+\frac{1}{4}=x_S$$

$$\Rightarrow 4x_S^2-4x_S+1=0\Rightarrow x_S=\frac{1}{2}$$

(ریاضی۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها: صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۹۳- **گزینهٔ «۴»** *(عادل حسینی)*

با جای‌گذاری $x=۱$، مقدار a را به‌دست می‌آوریم:

$$۱-\frac{۱}{۱+a}=\frac{a}{۴}\Rightarrow\frac{a}{a+۱}=\frac{a}{۴}\xrightarrow{a\neq ۰}a+۱=۴\Rightarrow a=۳$$

بنابراین معادله به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x+۳}=\frac{۳}{۴x}\Rightarrow\frac{۳}{x^۲+۳x}=\frac{۳}{۴x}$$

$$\Rightarrow x^۲+۳x=۴x\Rightarrow x^۲-x=x(x-۱)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\ x=۰\ \text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

معادله، جواب دیگری ندارد.

(حسابان۱- جبر ومعادله: صفحه‌های ۱۹ تا ۲۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۹۱- **گزینهٔ «۴»** *(یاسین سپهر)*

با توجه به معادلهٔ داده شده داریم:

$$\begin{cases}S=\alpha+\beta=\frac{a-۱}{۲}\\ P=\alpha\beta=-\frac{۴}{۲}=-۲\end{cases}$$

حال برای حاصل $\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}+۲$ می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}+۲=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+۲=\frac{\frac{(a-۱)}{۲}}{-۲}+۲=۰$$

$$\Rightarrow\frac{a-۱}{۲}=۴\Rightarrow a-۱=۸\Rightarrow a=۹$$

(حسابان۱- جبر و معادله: صفحه‌های ۷ تا ۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.kanoon.ir

۱۲۱- **گزینهٔ «۲»** *(سینا محمدپور)*

فرض کنید $\overset{\frown}{APB} = x$ و $\overset{\frown}{ANB} = y$ باشد. داریم:

$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{APB} - \overset{\frown}{ANB}}{۲} = ۳۰^\circ \Rightarrow x - y = ۶۰^\circ$$

از طرفی مجموع دو کمان $\overset{\frown}{APB}$ و $\overset{\frown}{ANB}$ برابر محیط دایره است، پس داریم:

$$\begin{cases} x + y = ۳۶۰^\circ \\ x - y = ۶۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲۱۰^\circ \\ y = ۱۵۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{۲۱۰^\circ}{۱۵۰^\circ} = \frac{۷}{۵}$$

(هندسه ۲- دایره: صفحهٔ ۱۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۲۲- **گزینهٔ «۱»** *(سینا محمدپور)*

اگر مساحت مثلث را با S و نصف محیط مثلث را با P نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$r = \frac{S}{P} , r_a = \frac{S}{P-a} , r_b = \frac{S}{P-b} , r_c = \frac{S}{P-c}$$

$$a > b > c \Rightarrow -a < -b < -c \Rightarrow P-a < P-b < P-c < P$$

$$\Rightarrow \frac{S}{P-a} > \frac{S}{P-b} > \frac{S}{P-c} > \frac{S}{P}$$

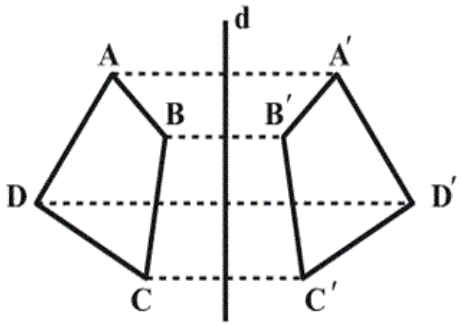
$$\Rightarrow r_a > r_b > r_c > r$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۱۲۳- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*



بازتاب جهت شکل را حفظ نمی کند. به عنوان مثال مطابق شکل، در چهارضلعی $ABCD$ وقتی به‌ترتیب از A به B، C و D می‌رویم، جهت حرکت موافق جهت حرکت عقربه‌های ساعت است ولی در چهارضلعی $A'B'C'D'$ وقتی به‌ترتیب از A' به B'، C' و D' می‌رویم، جهت حرکت مخالف جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌باشد، پس جهت شکل تحت بازتاب نسبت به خط d عوض شده است.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۴۴)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۱۲۴- **گزینهٔ «۴»** (امیرحسین ابومحبوب)

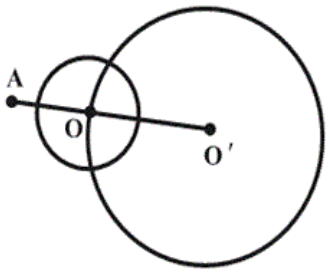
$$\frac{O'A}{OA}=۳\Rightarrow\frac{O'A}{۳}=۳\Rightarrow O'A=۹$$

$$OO'=O'A-OA=۹-۳=۶$$

$$\frac{R'}{R}=۳\Rightarrow\frac{R'}{۲}=۳\Rightarrow R'=۶$$

طول مماس مشترک خارجی $=\sqrt{OO'^{۲}-(R-R')^{۲}}$

$$=\sqrt{۶^{۲}-(۲-۶)^{۲}}=\sqrt{۳۶-۱۶}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$



(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۴۵ و ۴۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.kanoon.ir

۱۲۵- **گزینهٔ «۳»** *(فرشاد فرامرزی)*

طبق قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی در مثلث ABC داریم:

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{2x-3}{x+1}=\frac{2x}{3x-1}$$

$$\Rightarrow(2x-3)(3x-1)=2x(x+1)$$

$$\Rightarrow 6x^2-2x-9x+3=2x^2+2x$$

$$\Rightarrow 4x^2-13x+3=0\Rightarrow x=\frac{13\pm11}{8}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=3\\ x=\frac{1}{4}\text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

طبق رابطهٔ طول نیمساز زاویهٔ داخلی داریم:

$$AD^2=AB\times AC-BD\times DC$$
$$=6\times8-3\times4=36\Rightarrow AD=6$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث: صفحه‌های ۷۰ تا ۷۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.kanoon.ir