سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درســـنامه ها و جـــزوه های ریاضـــی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)

https://t.me/riazisara

ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)

https://www.instagram.com/riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

هندسه ۲ ، هندسه در فضا - ۱۰ سوال -

۱۳۱- اگر خطی... ... ... صفحه‌ای باشد با هر خط واقع در آن صفحه ... ... است.

۱) موازی با – موازی ۲) عمود بر – متنافر ۳) متقاطع با – متقاطع ۴) عمود بر – عمود

۱۳۲- کدام گزینه نادرست است؟

۱) از هر نقطه مانند A در فضا، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد که بر خطی مانند L عمود باشد.

۲) از هر نقطه مانند A در فضا، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد که بر صفحه‌ای مانند P عمود باشد.

۳) از هر نقطه مانند A در فضا، یک و تنها یک خط می‌گذرد که بر صفحه‌ای مانند P عمود باشد.

۴) اگر P و Q دو صفحهٔ عمود بر هم باشند، هر کدام شامل خطی است که بر دیگری عمود است.

۱۳۳- دو صفحه P و P' بر هم عمودند و خط D فصل مشترک آن‌ها است. از نقطهٔ A خارج دو صفحه، خط Δ را بر صفحهٔ P عمود و خط Δ' را با صفحهٔ P' موازی رسم می‌کنیم. صفحهٔ Q که بر دو خط Δ و Δ' می‌گذرد، کدام ویژگی را ندارد؟

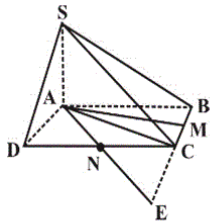
۱) بر صفحهٔ P عمود است. ۲) با خط D موازی است. ۳) با صفحهٔ P' موازی است. ۴) بر خط D عمود است.

۱۳۴- دو نقطهٔ A و B از خط d در صفحهٔ P می‌باشند. کدام یک از گزینه‌های زیر، شرط کافی برای عمود بودن خط d' بر d است؟

۱) تصویر خط d' بر صفحهٔ P، نقطهٔ A باشد. ۲) d' بر خطی که از A می‌گذرد، عمود باشد.

۳) d' بر یک خط از صفحهٔ P عمود باشد. ۴) d' بر دو خط از صفحهٔ P عمود باشد.

۱۳۵- در هرم $S-ABCD$، مستطیل $ABCD$ قاعده، یال SA ارتفاع وارد بر قاعده، نقطهٔ M وسط ضلع BC و نقطهٔ N وسط ضلع CD است. عمود مشترک دو خط متنافر SA و BC کدام خط است؟



۱) AB ۲) AM ۳) AC ۴) AE

۱۳۶- دو صفحهٔ P و Q بر هم عمودند. چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) هر خط عمود بر یکی، با دیگری موازی است. ب) هر صفحهٔ عمود بر یکی، با دیگری موازی است.

پ) هر خط موازی با یکی، بر دیگری عمود است. ت) هر صفحهٔ موازی با یکی بر دیگری عمود است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۷- اگر خط d عمودمشترک دو خط متنافر d_1 و d_2 باشد، کدام همواره درست است؟

۱) صفحهٔ شامل d و d_1، بر خط d_2 عمود است. ۲) هر صفحهٔ شامل d، بر دو خط d_1 و d_2 عمود است.

۳) هر صفحهٔ عمود بر d، با دو خط d_1 و d_2 موازی است. ۴) هر صفحهٔ موازی d دقیقاً یکی از خطوط d_1 و d_2 را قطع می‌کند.

www.kanoon.ir

۱۳۸- صفحات متمایز و غیرموازی P و Q مفروض‌اند. اگر صفحهٔ R بر این دو صفحه عمود باشد، آنگاه در چه تعداد از حالت‌های زیر، خط Δ بر فصل مشترک P و Q عمود است؟

الف) $\Delta \perp R$ ب) $\Delta \parallel R$ پ) $\Delta \perp P$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۳۹- نقطهٔ A، خط d و صفحهٔ P مفروض‌اند. درکدام حالت، تعداد خطوط گذرا از نقطهٔ A که باصفحهٔ P موازی و برخط d عمود باشد، همواره بی‌شمار است؟

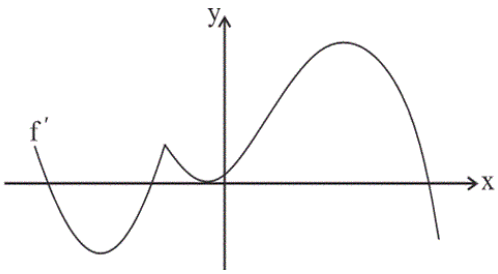
۱) $d \parallel P$ ۲) $d \perp P$ ۳) $A \in P$ ۴) $A \in d$

۱۴۰- دو خط d و d' درنقطهٔ O برهم عمود و هر دو به تمامی در صفحهٔ P قرار دارند. در نقطهٔ O، صفحهٔ Q بر خط d و صفحهٔ Q' برخط d' عمودند. کدام گزاره نادرست است؟

۱) صفحهٔ Q شامل خط d' و صفحهٔ Q' شامل خط d است.
۲) دو صفحهٔ Q و Q' برهم عمودند.
۳) هرصفحهٔ عمود بر P، بردو صفحهٔ Q و Q' عمود است.
۴) دوصفحهٔ Q و Q' برصفحهٔ P عمود هستند.

دیفرانسیل و انتگرال ، کاربرد مشتق - ۱۷ سوال -

۸۱- نمودار مشتق تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع f به‌ترتیب از راست به چپ چند مینیمم نسبی و چند ماکزیمم نسبی دارد؟



۱) ۲-۲ ۲) ۲ -۱ ۳) ۲- ۳ ۴) ۱ -۲

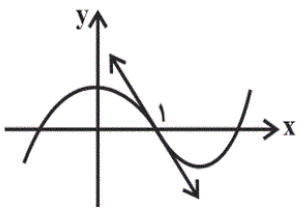
۸۲- در کدام بازه تابع $f(x) = e^{(x-3x^2)} - 1$ اکیداً صعودی و تقعر نمودار آن رو به پایین است؟

۱) $(-\frac{5}{6}, +\infty)$ ۲) $(\frac{-1-\sqrt{6}}{6}, \frac{-1+\sqrt{6}}{6})$ ۳) $(\frac{1-\sqrt{6}}{6}, \frac{1}{6})$ ۴) $(-\infty, \frac{5}{6})$

۸۳- اگر در تابع f داشته باشیم: $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$، نمودار این تابع چند نقطهٔ عطف دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸۴- اگر نمودار تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ به‌صورت زیر باشد، دوتایی (a,b) کدام است؟



۱) $(-3,1)$ ۲) $(3,1)$ ۳) $(-3,0)$ ۴) $(3,0)$

۸۵- شیب خطی که از نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=-\frac{۳x}{x^۲+۳}$ در بازهٔ $(-۲,۲)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۳

۸۶- نقطهٔ $(a,۱)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x+\frac{b}{x}$ است. حاصل ab کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۰}$

۸۷- مقدار و نوع اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^۲-\sqrt{۲x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$، مینیمم ۲) $-\frac{۳}{۴}$، ماکزیمم ۳) $\frac{۱}{۲}$ ، مینیمم ۴) $\frac{۱}{۲}$، ماکزیمم

۸۸- نقاط اکسترمم تابع $f(x)=۲\cos x+\cos ۲x$ روی بازه $(۰,۲\pi)$ چگونه است؟

۱) دو نقطهٔ مینیمم و یک نقطهٔ ماکزیمم
۲) دو نقطهٔ ماکزیمم و یک نقطهٔ مینیمم
۳) یک نقطهٔ مینیمم و یک نقطهٔ ماکزیمم
۴) فاقد نقطهٔ ماکزیمم و مینیمم

۸۹- طول نقاط عطف تابع $f(x)=\frac{\sin x}{۱-\cos x}$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) عطف ندارد. ۳) π ۴) $\frac{\pi}{۲}$, π , $\frac{۳\pi}{۲}$

۹۰- در لحظه‌ای که قطر یک گلولهٔ برفی به شکل کره در حال غلتیدن به ۶ متر می‌رسد، حجم آن در هر دقیقه $۹m^۳$ زیاد می‌شود. آهنگ افزایش شعاع برحسب متر بر دقیقه کدام است؟

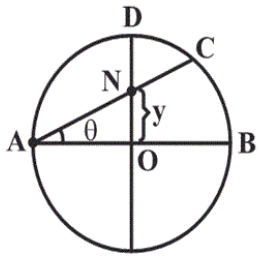
۱) $\frac{۱}{۳\pi}$ ۲) $\frac{۱}{\pi}$ ۳) $\frac{۱}{۴\pi}$ ۴) $\frac{۱}{۲\pi}$

۹۱- آهنگ آنی تغییر هر یک از ابعاد یک مکعب مستطیل به‌ترتیب برابر ۰/۰۹، ۰/۰۷ و ۱/۲ و در همان لحظه ابعاد این مکعب مستطیل به‌ترتیب برابر ۶، ۹ و b است. اگر آهنگ آنی تغییر حجم مکعب ۱/۷۷ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰/۱ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۰

www.kanoon.ir

۹۲- در شکل زیر شعاع دایره ۴cm است و نقطهٔ N به سمت D با سرعت ثابت $\frac{۱۵}{۱۰۰}(\frac{cm}{s})$ حرکت می‌کند. در لحظه‌ای که $ON = ۲cm$ باشد، طول کمان BC با کدام سرعت برحسب $\frac{cm}{s}$ افزایش می‌یابد؟ (O مرکز دایره است.)



۱) $\frac{۴۸}{۱۰۰}$

۲) $\frac{۱۲}{۱۰۰}$

۳) $\frac{۲۴}{۱۰۰}$

۴) $\frac{۳۲}{۱۰۰}$

۹۳- نمودار تابع $f(x) = x^۲ + ۹\sqrt[۳]{x}$ در اطراف $x = ۱$ چگونه است؟

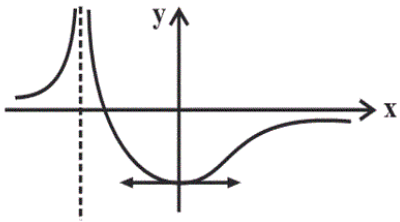
۱)

۲)

۳)

۴)

۹۴- شکل زیر نمودار تابع $f(x) = \frac{ax^۲ + bx - ۱}{x^۲ + cx + ۴}$ است، $f(-۱)$ کدام است؟



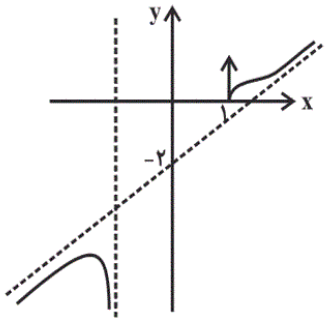
۱) صفر

۲) $-\frac{۱}{۸}$

۳) -۱

۴) $-\frac{۳}{۲}$

۹۵- اگر قسمتی از نمودار تابع $y = x\sqrt{\frac{x+a}{x+b}}$ به‌صورت زیر باشد، معادلهٔ مجانب قائم آن کدام است؟



۱) $x = -۲$

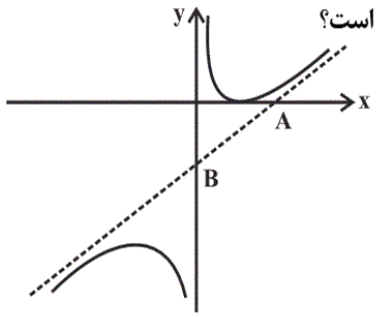
۲) $x = -۳$

۳) $x = -۱$

۴) $x = -۴$

www.kanoon.ir

۹۶- اگر شکل زیر، نمودار تابع $y=\frac{x^۲+ax+b}{x+c}$ و $AB=۲\sqrt{۲}$ باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟



۱) ۱
۲) -۱
۳) ۳
۴) -۳

۹۷- اگر $f(x)=\sqrt[۵]{x^۳-x^۲}$ باشد، نمودار f' در حوالی نقطه‌ای به طول صفر کدام است؟

۱)

۲)

۳)

۴)

دیفرانسیل و انتگرال ، انتگرال - ۳ سوال -

۹۸- حاصل $\sum_{i=۱}^{۲۰}(۳i+۲)$ کدام است؟

۱) ۶۳۰
۲) ۶۳۲
۳) ۶۲۲
۴) ۶۷۰

۹۹- حاصل $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲^{n+۱}}{۳^n}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) ۴
۴) ۲

۱۰۰- حاصل $۱+\{n!\times n+...+۲!\times ۲+۱!\times ۱\}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $(n+۱)!$
۲) $n!$
۳) $(n+۱)!-n!$
۴) $(\frac{n!}{۲})^۲$

هندسه‌ي تحليلي ، دستگاه‌هاي معادلات خطي - ۱۰ سوال -

anoon.ir

۱۱۱- اگر ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & a & b \\ ۳ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ معکوس‌پذیر نباشد، دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & b+۱ & a-۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۴ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۱۲
۲) -۱۲
۳) -۸
۴) ۸

۱۱۲- اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۱ \\ ۴ & ۲ & ۰ \\ ۴ & ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ باشد، درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس $A^{-۱}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۱۳- دستگاه $\begin{cases} ۲x - y + ۳z = a \\ x + ۲y + z = b \\ ۷x + ۴y + ۹z = c \end{cases}$ مفروض است. در مورد این دستگاه، کدام اظهارنظر نمی‌تواند درست باشد؟

۱) بی‌شمار جواب دارد.
۲) فاقد جواب است.
۳) جواب منحصر به فرد دارد.
۴) همواره فاقد جواب منحصر به فرد است.

۱۱۴- برای حل دستگاه معادلات $\begin{cases} x + ۲y + ۳z = ۹ \\ ۲x + y + ۳z = ۴ \\ ۲x + ۲y - z = ۲ \end{cases}$ با روش گاوس- جردن، پس از طی مراحلی، به ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & a \\ ۰ & ۱ & ۰ & b \\ ۰ & ۰ & ۱ & c \end{bmatrix}$ رسیده‌ایم. حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۳
۳) -۱
۴) صفر

۱۱۵- سه صفحه با معادله‌های ماتریسی $\begin{bmatrix} ۱ & a & ۱ \\ ۲ & b & ۲ \\ ۱ & ۳ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۹ \\ ۲ \end{bmatrix}$ داده شده‌اند. اگر فصل مشترک این سه صفحه، نقطهٔ $A = (x_۰, ۱, z_۰)$ باشد، آنگاه دترمینان ماتریس ضرایب کدام است؟

۱) -۱
۲) ۱
۳) -۲
۴) ۲

www.kanoon.ir

۱۱۶- به ازای کدام یک از مقادیر m، دستگاه معادلات $\begin{cases} -۶x_۱ + mx_۲ + x_۳ = ۵ \\ x_۲ - x_۳ = ۱ \\ mx_۱ - x_۲ = -۱ \end{cases}$ را نمی‌توان با پیدا کردن ماتریس وارون حل کرد؟

۱) $-۱,۲$ ۲) $-۲,۳$

۳) $-۲,۱$ ۴) $-۳,۲$

۱۱۷- کدام رابطه بین a و b برقرار باشد تا دستگاه $\begin{cases} x + ۲y = a \\ ۲x - y = b \\ x + ۳y = ۱ \end{cases}$ جواب منحصر به فرد داشته باشد؟

۱) $۷a - b = ۵$ ۲) $۷a - ۵b = -۳$

۳) $۵a - b = ۵$ ۴) $۷a + b = ۵$

۱۱۸- اگر دستگاه $\begin{cases} ax + ۲y = ۰ \\ ay + z = ۰ \\ -x - y + az = ۰ \end{cases}$ دارای جواب غیرصفر باشد، چند جواب برای a وجود دارد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۱۹- $A = [a_{ij}]_{۳\times۳}$ با دترمینان مثبت، ماتریس ضرایب دستگاه $A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}$ است. اگر $A^* = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ \\ ۵ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$، آنگاه جواب این دستگاه کدام است؟ (A^* ترانهادهٔ ماتریس همسازه‌های A است)

۱) $x = ۱, y = ۲, z = ۳$ ۲) $x = ۲, y = ۱, z = ۳$

۳) $x = ۱, y = ۳, z = ۲$ ۴) $x = ۲, y = ۳, z = ۱$

www.kanoon.ir

۱۲۰- در حل دستگاه سه معادله و سه مجهول به روش حذفی گاوس، ماتریس افزودهٔ $\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۲ & b_۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ & b_۲ \\ -۱ & ۲ & ۴ & b_۳ \end{array}\right]$ به ماتریس $\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۲ & ۶ \\ ۰ & -۱ & -۵ & -۱۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ \end{array}\right]$ تبدیل شده است. مقدار $b_۳$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۲

۳) ۳ ۴) ۶

ریاضیات گسسته ، احتمال - ۱۰ سوال -

۱۲۱- سه سکه و دو تاس را به‌طور همزمان پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه فقط یکی از سکه‌ها رو بیاید و مجموع دو تاس، عددی دو رقمی باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$

۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۱۲۲- اگر $S=\{a,b,c,d,e\}$ فضای نمونه‌ای یک پدیدهٔ تصادفی بوده و داشته باشیم $P(\{c,d\})=\frac{۳}{۱۶}$، $P(\{a,b,c\})=\frac{۷}{۸}$ و $P(e)=\frac{۱}{۱۶}$، مقدار $P(c)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$

۳) $\frac{۱}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱}{۳۲}$

۱۲۳- در جعبه‌ای ۳ مداد قرمز و ۴ مداد مشکی وجود دارد. اگر از این جعبه، سه مداد به طور متوالی و بدون جایگذاری خارج کنیم، احتمال آن‌که اولی و دومی همرنگ و سومی غیرهمرنگ با دو مداد اول باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$

۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

www.kanoon.ir

۱۲۴- در جعبه‌ای ۳ سیب قرمز و ۴ سیب زرد موجود است. دو سیب را متوالیاً و بدون جایگذاری از جعبه خارج می‌کنیم. اگر سیب دوم قرمز باشد، احتمال آن‌که سیب اول نیز قرمز باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۷}$
۲) $\frac{۳}{۷}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۳}$

۱۲۵- فرض کنید که A مجموعهٔ اعداد طبیعی یک رقمی زوج و B مجموعهٔ اعداد طبیعی یک رقمی فرد باشد. تاسی را پرتاب می‌کنیم، اگر ۶ آمد، عددی از A و در غیر این‌صورت عددی از B انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که عدد انتخاب شده مضرب ۳ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۸}$
۲) $\frac{۳}{۸}$
۳) $\frac{۳}{۵}$
۴) $\frac{۲}{۵}$

۱۲۶- ظرف A شامل۲ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ قرمز، ظرف B شامل فقط ۵ مهرهٔ قرمز و ظرف C شامل فقط ۵ مهرهٔ سفید است. از یکی از این ۳ ظرف، به تصادف مهره‌ای برمی‌داریم. اگر این مهره، قرمز باشد، احتمال آن‌که از ظرف A باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$
۲) $\frac{۵}{۸}$
۳) $\frac{۳}{۸}$
۴) $\frac{۸}{۱۵}$

۱۲۷- از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰، عددی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر X تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد انتخاب شده باشد، $P(X \leq ۲)$ چقدر است؟

۱) ۰/۵
۲) ۰/۴۵
۳) ۰/۴
۴) ۰/۳

۱۲۸- در پرتاب یک تاس، تابع جرم احتمال به صورت $P(X=x)=\frac{۲x-a}{۳۶}$ می‌باشد که x عدد رو شده است. احتمال آن که در پرتاب این تاس، عددی فرد ظاهر شود، چقدر است؟

۱) $\frac{۵}{۹}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۵}{۱۲}$
۴) $\frac{۵}{۱۸}$

www.kanoon.ir

۱۲۹- توزیع احتمال متغیر تصادفی X به‌صورت $\begin{cases} P(X=i)=\frac{i}{i^2+2} & ,i=1,2,3 \\ P(X=j)=\frac{a}{11} & ,j=4,5 \end{cases}$ است. مقدار $P(2<X<5)$ کدام است؟

۱) $\frac{10}{33}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{8}{33}$ ۴) $\frac{4}{11}$

۱۳۰- به ازای کدام مقدار a، تابع $P(X=x)=\frac{1}{100}[2(10-x)+a];\quad x=1,2,\cdots,10$، یک تابع احتمال است؟

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) 2

ریاضی پایه ، تابع - ۱۰ سوال -

۱۰۱- اگر $f(x)=\frac{2x}{x+1}-\frac{1}{x-1}$ و $g(x)=\frac{2x^2}{x+1}+\frac{1}{x-1}$ باشد، برد تابع $f+g$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{\pm1\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{\pm2\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{\pm1,\pm2\}$

۱۰۲- برای دو تابع $f=\{(-1,a),(2,1),(b,2)\}$ و $g=\{(-2,-1),(c,3),(-3,\frac{1}{3})\}$ اگر داشته باشیم: $(fog)(-2)+(fog)(1)=5$، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۶

۱۰۳- اگر $f(x)=\frac{2x-1}{x-3}$ و $g(x)=\sqrt{9-x^2}$ باشد، دامنهٔ تابع gof، چند عدد صحیح را نمی‌تواند بپذیرد؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

۱۰۴- اگر $f(x)=\begin{cases} -x & ;x\geq 0 \\ \left[\frac{x^2}{1+x^2}\right] & ;x<0 \end{cases}$ باشد، تابع $fof(|x|)$ چگونه تابعی است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

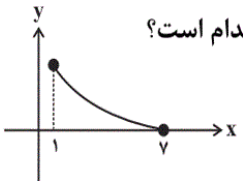
۱) فقط زوج ۲) فقط فرد ۳) نه زوج و نه فرد ۴) هم زوج و هم فرد

۱۰۵- کدام‌یک از توابع زیر در طول دامنهٔ تعریف خود نزولی است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $y=x+|x|$ ۲) $y=x-[x]$ ۳) $y=|x|+|x-1|$ ۴) $y=x\left(\frac{1}{[x]+[-x]}\right)$

www.kanoon.ir

۱۰۶- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. بزرگ‌ترین مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $f(3x-1) < f(x+3)$ کدام است؟



۱) $(2,\frac{8}{3}]$
۲) $(2,+\infty)$
۳) $(2,7]$
۴) $\mathbb{R}-(2,7]$

۱۰۷- به‌ازای چند مقدار m، تابع $f=\{(1,m^3-m),(m,4),(1,4m^2-4),(5,m+1),(0,m^2+2)\}$ وارون‌پذیر است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۱۰۸- در تابع خطی f رابطهٔ $4f(2x)=f(8x-1)-5$ برقرار است. اگر $f^{-1}(3)=5$ باشد، مقدار m از تساوی $f^{-1}(m)=2$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۱۰۹- ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\sqrt[3]{1+\sqrt{x-2}}$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=x^6-2x^3+1\ ;\ x\geq 1$
۲) $f^{-1}(x)=x^6-2x^3+3\ ;\ x\geq 1$
۳) $f^{-1}(x)=x^6-2x^3+1\ ;\ x\geq 2$
۴) $f^{-1}(x)=x^6-2x^3+3\ ;\ x\geq 2$

۱۱۰- دو تابع $f=\{(1,2),(2,3),(3,6),(4,7)\}$ و $g(x)=x+\sqrt{x}$ مفروض‌اند. به ازای چند مقدار a، $f^{-1}(g(3a))=3$ می‌باشد؟

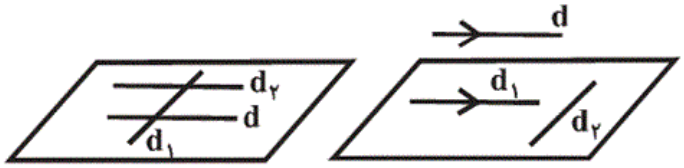
۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

www.kanoon.ir

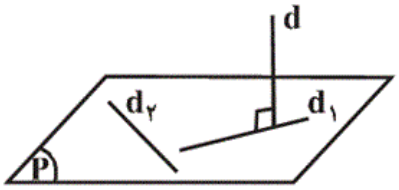
۱- اگر خطی موازی با صفحه‌ای باشد با خطوط واقع در آن صفحه هر وضعی می‌تواند داشته باشد.

۲- اگر خطی عمود بر صفحه‌ای باشد با هر خط واقع در آن صفحه یا عمود متقاطع است یا عمود متنافر.

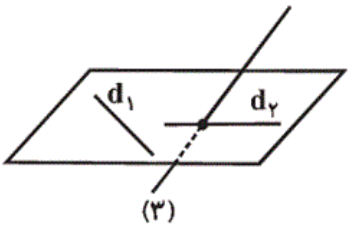
۳- اگر خطی متقاطع با صفحه‌ای باشد با هر خط واقع در آن صفحه یا متقاطع است یا متنافر.



(۱)



(۲)



(۳)

(هندسه ۲-هندسه در فضا: صفحه‌های ۱۵۰ و ۱۵۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.kanoon.ir

۱۳۲- (امیرحسین ابومحبوب)

اگر از نقطهٔ A ، خطی بر صفحهٔ P عمود کنیم، آنگاه هر صفحه‌ای کـه شـامل این خط عمود باشد (و در نتیجه از نقطهٔ A می‌گذرد) بر صفحهٔ P عمود است.

(هندسه ۲-هندسه در فضا: صفحه‌های ۱۵۲ تا ۱۵۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۳۳- (مهرداد ملوندی)

علت درستی سایر گزینه‌ها:

۱) چون یک خط آن بر صفحهٔ P عمود است، بر این صفحه عمود می‌باشد.

۳) چون دو خط متمایز آن با صفحهٔ P' موازی است.پس با این صفحه مـوازی است.

۲) صفحهٔ Q با صفحهٔ P' موازی است پـس بـا هـر یـک از خطـوط آن از جمله D موازی است.

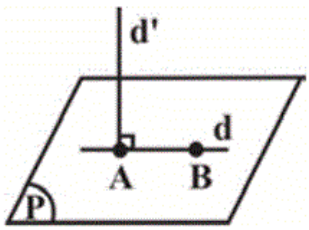
(هندسه ۲-هندسه در فضا: صفحه‌های ۱۴۹ تا ۱۵۵)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.kanoon.ir

۱۳۴- (امیرهوشنگ خمسه)

چون دو نقطهٔ A و B از خط d در صفحهٔ P است، پس d به تمامی درون صفحه P قرار می‌گیرد. از طرفی اگر تصویر d' بر صفحهٔ P یک نقطه (مانند A) باشد یعنی d' بر P عمود است لذا بر تمامی خطوط صفحهٔ P (طبق اصل تعامد) مانند d نیز عمود است.



(هندسه ۲-هندسه در فضا: صفحه‌های ۱۴۹ تا ۱۵۱)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۳۵- (محمدابراهیم گیتی‌زاده)

هر چهار خط AB ، AM ، AC و AE بر خط SA عمود هستند. اما، از این چهار خط فقط AB بر BC عمود است.

(هندسه ۲-هندسه در فضا: مشابه تمرین ۹ صفحهٔ ۱۵۹)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۳۶- (رضا عباسی‌اصل)

فقط گزاره‌های (الف) و (ت) درست هستند.

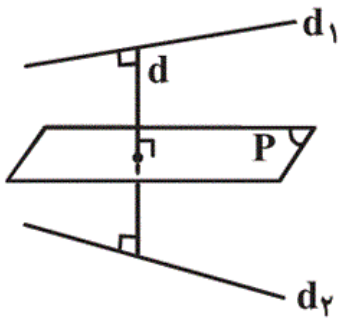
(هندسه ۲-هندسه در فضا: صفحه‌های ۱۵۵ تا ۱۵۷)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۱۳۷- (علیرضا شریف‌خطیبی)

صفحهٔ شامل d لزوماً بر خطوط متنافر d_1 و d_2 عمود نیست، پس گزینه‌های «۱» و «۲» صحیح نیستند. هم‌چنین صفحهٔ موازی با d ممکن است هر دو خط متنافر d_1 و d_2 را قطع کند، پس گزینهٔ «۴» نیز صحیح نیست.



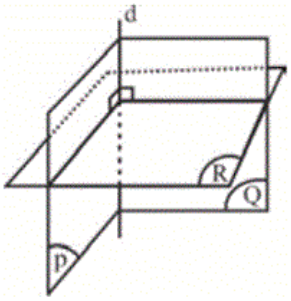
مطابق شکل، هر صفحه مانند صفحهٔ P که بر خط d عمود است، با خطوط متنافر d_1 و d_2 موازی است.

(هندسه ۲-هندسه در فضا: صفحه‌های ۱۵۶ و ۱۵۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.kanoon.ir

گزارهٔ «ب»: چون صفحهٔ R بر صفحات P و Q عمود است، پس بر فصل مشترک آن دو نیز عمود است $(d \perp R)$، لذا تمام خطوط موازی صفحهٔ R بر خط d عمودند.



گزارهٔ «پ»: اگر $\Delta \perp P$، آنگاه Δ بر تمام خطوط صفحهٔ P از جمله خط d (فصل مشترک P و Q) عمود است.

(هندسه ۲-هندسه در فضا: صفحه‌های ۱۵۵ تا ۱۵۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.kanoon.ir

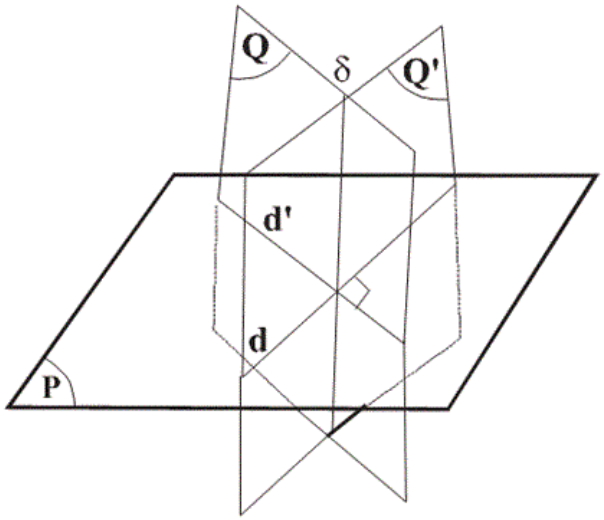
۱۳۹-

اگرخط d برصفحهٔ P عمود باشد، صفحهٔ Q که شامل نقطهٔ A و موازی صفحهٔ P است، برخط d عمود است و تمام خطوط صفحهٔ Q که از نقطهٔ A می‌گذرند بر خط d عمود و با صفحهٔ P موازی هستند.

(هندسه ۲-هندسه در فضا: صفحه‌های ۱۴۹ تا ۱۵۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۱۴۰



مطابق فرض سؤال، شکل فوق به دست می‌آید که در آن صورت:

صفحهٔ Q شامل خط d' و صفحهٔ Q' شامل خط d است. (گزینه ۱)

دو صفحهٔ Q و Q' بر هم عمودند. (گزینه ۲)

دو صفحهٔ Q و Q' بر صفحهٔ P عمودند. (گزینه ۴)

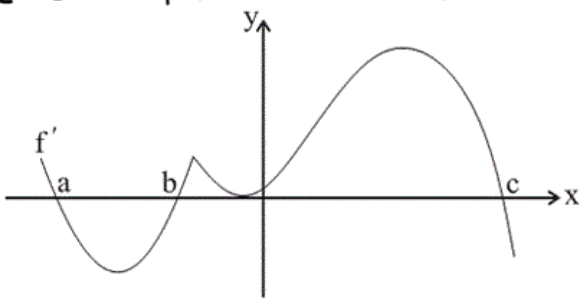
(هندسه ۲-هندسه در فضا: صفحه‌های ۱۴۹ تا ۱۵۵)

۱ ۲ ۳✓ ۴

kanoon.ir

-۸۱ (سعید علم‌پور)

نقاطی که f' در آن تغییر علامت بدهد، اکسترمم‌های نسبی تابع f هستند:



بنابراین نقاط $x=a$، $x=b$ و $x=c$ طول نقاط اکسترمم نسبی تابع هستند. با تعیین علامت f' داریم:

x		a		b		c	
$f'(x)$	+	۰	−	۰	+	۰	−
f	↗	max	↘	min	↗	max	↘

تابع ۱ مینیمم نسبی و ۲ ماکزیمم نسبی دارد.

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۴ تا ۱۸۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

-۸۲ (میلاد منصوری)

برای این‌که تابع اکیداً صعودی باشد، باید:

$$f'(x)>0 \Rightarrow \underbrace{(1-6x)e^{x-3x^2}}_{\downarrow}>0 \Rightarrow 1-6x>0 \Rightarrow x<\frac{1}{6} \quad (1)$$

همواره مثبت است.

برای این‌که تقعر نمودار رو به پایین باشد، باید:

$$f''(x)<0 \Rightarrow -6e^{x-3x^2}+(1-6x)^2e^{x-3x^2}<0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(-6+(1-6x)^2)e^{x-3x^2}}_{\downarrow}<0 \Rightarrow 36x^2-12x-5<0$$

همواره مثبت است.

$$\Rightarrow \frac{1-\sqrt{6}}{6}<x<\frac{1+\sqrt{6}}{6} \quad (2)$$

از اشتراک (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم، در بازهٔ $(\frac{1-\sqrt{6}}{6},\frac{1}{6})$ تابع اکیداً صعودی و دارای تقعر به سمت پایین است.

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۰ تا ۱۸۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.kanoon.ir

-۸۳ (حمید علیزاده)

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3}=0\Rightarrow 2x(x^2-3)=0$$

$$\Rightarrow x=-\sqrt{3},0,\sqrt{3}$$: نقاط عطف

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$+\sqrt{3}$		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۰ تا ۱۸۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

$$\begin{cases} f(1)=0\Rightarrow 1+a+b+2=0\Rightarrow a+b=-3 \\ f''(1)=0\Rightarrow \xrightarrow[f''(x)=6x+2a]{f'(x)=3x^2+2ax+b} 6+2a=0\Rightarrow 2a=-6\Rightarrow a=-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b=0$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۰ تا ۱۸۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.kanoon.ir

۸۵- (محمد پیمانی)

ابتدا نقاط بحرانی بازهٔ $(-۲,۲)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{۳(x^۲-۳)}{(x^۲+۳)^۲}\xrightarrow{f'(x)=۰}x^۲=۳\Rightarrow x=\pm\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f(-\sqrt{۳})=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\\ f(\sqrt{۳})=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\end{cases}$$

تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است و با توجه به‌صورت ضابطهٔ f' مشخص است که $x=\pm\sqrt{۳}$ ریشه‌های سادهٔ f' هستند. این یعنی $x=\pm\sqrt{۳}$ طول نقاط اکسترمم تابع f در بازهٔ $(-۲,۲)$ هستند. حال شیب خط گذرنده را از بین دو نقطه را حساب می‌کنیم:

$$m=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}-(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})}{-\sqrt{۳}-\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{-۲\sqrt{۳}}=-\frac{۱}{۲}$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۴ تا ۱۸۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۸۶- (کاظم اجلالی)

ابتدا توجه کنید که $f(a)=۱$ و $f'(a)=۰$ است، بنابراین داریم:

$$\begin{cases}f(a)=۱\Rightarrow a+\frac{b}{a}=۱\Rightarrow b=a-a^۲\\ f'(x)=۱-\frac{b}{x^۲}\Rightarrow f'(a)=۱-\frac{b}{a^۲}=۰\Rightarrow b=a^۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow a-a^۲=a^۲\Rightarrow ۲a^۲=a\xrightarrow{a\neq۰}a=\frac{۱}{۲}\Rightarrow b=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow ab=\frac{۱}{۸}$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۴ تا ۱۸۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.kanoon.ir

۸۷- (میلاد سجادی‌لاریجانی)

دامنهٔ f، $[۰,+\infty)$ است.

$$f'(x)=۲x-\frac{۱}{\sqrt{۲x}}$$

$$\xrightarrow{f'(x)=۰} ۲x=\frac{۱}{\sqrt{۲x}} \Rightarrow ۲x\sqrt{۲x}=۱ \Rightarrow (\sqrt{۲x})^{۳}=۱$$

$$\Rightarrow \sqrt{۲x}=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

طول نقطهٔ اکسترمم تابع:

با جدول تغییرات رفتار داریم:

x	۰		$\frac{۱}{۲}$	
$f'(x)$	‖	$-$	۰	$+$
$f(x)$	‖	↘	min	↗

$$;f(\frac{۱}{۲})=-\frac{۳}{۴}$$

نقطهٔ $(\frac{۱}{۲},-\frac{۳}{۴})$، مینیمم نسبی تابع است.

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۴ تا ۱۸۷)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۸۸- (عرفان صادقی)

$$f(x)=۲\cos x+\cos ۲x$$

$$f'(x)=-۲\sin x-۲\sin ۲x=-۲\sin x-۲(۲\sin x.\cos x)$$

$$\xrightarrow{f'(x)=۰} -۲\sin x(۱+۲\cos x)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x=۰ & \xrightarrow{x\in(۰,۲\pi)} x=\pi \\ \cos x=\frac{-۱}{۲} & \xrightarrow{x\in(۰,۲\pi)} \begin{cases} x=\frac{۲\pi}{۳} \\ x=\frac{۴\pi}{۳} \end{cases} \end{cases}$$

معادلهٔ $f'(x)=۰$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$، سه جواب دارد. حال با جدول تغییرات رفتار تابع داریم:

x		$\frac{۲\pi}{۳}$		π		$\frac{۴\pi}{۳}$	
f'	$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$
f	↘	min	↗	max	↘	min	↗

تابع دو نقطه مینیمم و یک نقطهٔ ماکزیمم دارد.

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۴ تا ۱۸۷)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۸۹- (حمید علیزاده)

$$f(x)=\frac{\sin x}{1-\cos x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\cot\frac{x}{2}$$

تابع $y=\cot u$ در $u=k\pi+\frac{\pi}{2}$ دارای عطف است، بنابراین:

$$\frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=2k\pi+\pi$$

در بازهٔ $(0,2\pi)$ تنها $x=\pi$ طول نقطهٔ عطف تابع است.

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۰ تا ۱۸۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۹۰- (ابراهیم عطایی)

حجم کره: $V=\frac{4}{3}\pi R^3\Rightarrow\frac{dV}{dR}=4\pi R^2$

اگر قطر گلوله برابر با ۶ متر باشد، شعاع آن ۳ متر است.

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dR}\times\frac{dR}{dt}\Rightarrow 9=4\pi\times(3)^2\times\frac{dR}{dt}$$

$$1=4\pi\times\frac{dR}{dt}\Rightarrow\frac{dR}{dt}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{m}{\text{دقیقه}}\right)$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۹۲ تا ۱۹۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۹۱- (کیا مقدس نیاک)

حجم مکعب $\Rightarrow V=x.y.z\Rightarrow V'=x'yz+xy'z+xyz'$

$$\Rightarrow 77/1=(0/09)(9)(b)+(6)(0/07)(b)+(6)(9)(1/2)$$

$$\Rightarrow 77/1=0/81b+0/42b+64/8$$

$$\Rightarrow 77/1=1/23b+64/8\Rightarrow b=10$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۹۲ تا ۱۹۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.kanoon.ir

$$\Rightarrow \theta'(1+\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}(\frac{15}{100}) \Rightarrow \frac{5}{4}\theta' = \frac{3}{80} \Rightarrow \theta' = \frac{3}{100}$$

از طرفی θ زاویه محاطی است، پس کمان BC برابر با 2θ است و داریم:

$$\text{طول کمان } BC : \ell = R(2\theta) \xrightarrow{R=4} \ell = 8\theta$$

$$\Rightarrow \ell' = 8\theta' \Rightarrow \ell' = 8(\frac{3}{100}) = \frac{24}{100}\ (\frac{cm}{s})$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۹۲ تا ۱۹۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۹۳- (کاظم اجلالی)

مشتق اول و دوم تابع را حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = 2x + \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} \quad , \quad f''(x) = 2 - \frac{2}{\sqrt[3]{x^5}}$$

علامت $f'(x)$ و $f''(x)$ در همسایگی $x=1$ به صورت زیر است:

x		1	
$f'(x)$	$+$	∄	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

بنابراین در اطراف $x=1$ تابع صعودی است و در همسایگی چپ آن دارای تقعر به سمت پایین و در همسایگی راست آن دارای تقعر به سمت بالاست.

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.kanoon.ir

۹۴- (ایمان نفستین)

طول مجانب قائم منفی است و تابع در دو همسایگی آن به $+\infty$ میل می‌کند. پس مخرج ریشهٔ مضاعف دارد و باید Δ ی مخرج برابر صفر باشد:

$$c^۲-۱۶=۰\Rightarrow c=\pm ۴$$

$$\Rightarrow\begin{cases} c=۴: x^۲+۴x+۴=(x+۲)^۲=۰\Rightarrow x=-۲ & \text{ق ق}\\ c=-۴: x^۲-۴x+۴=(x-۲)^۲=۰\Rightarrow x=۲ & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

وقتی $x\to\infty$ میل می‌کند، $f(x)$ یک مجانب افقی $y=۰$ دارد. پس باید درجهٔ صورت از درجهٔ مخرج کمتر باشد. یعنی $a=۰$، پس:

$$f(x)=\frac{bx-۱}{(x+۲)^۲}$$

$$f'(۰)=۰\Rightarrow f'(x)=\frac{b(x+۲)^۲-۲(x+۲)(bx-۱)}{(x+۲)^۴}$$

$$=\frac{b(x+۲)-۲(bx-۱)}{(x+۲)^۳}=\frac{-bx+۲b+۲}{(x+۲)^۳}$$

$$\xrightarrow{f'(۰)=۰}-b(۰)+۲b+۲=۰\Rightarrow b=-۱$$

$$f(x)=\frac{-x-۱}{(x+۲)^۲}\Rightarrow f(-۱)=۰$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۹۵- (میثم حمزه‌لویی)

در $x=۱$ خط مماس عمودی است، پس $x=۱$ ریشهٔ عبارت زیر رادیکال است:

$$\frac{x+a}{x+b}=۰\Rightarrow x+a=۰\xrightarrow{x=۱}۱+a=۰\Rightarrow a=-۱$$

از طرفی خط مجانب مایل تابع از نقطهٔ $(-۲,۰)$ عبور می‌کند:

$$y=x\sqrt{\frac{x+a}{x+b}}\Rightarrow \text{مجانب مایل}: y=x+\frac{a-b}{۲}$$

$$\xrightarrow{a=-۱}y=x+\frac{-۱-b}{۲}$$

نقطهٔ $(-۲,۰)$ در این خط صدق می‌کند:

$$-۲=۰+\frac{-۱-b}{۲}\Rightarrow -۴=-۱-b\Rightarrow b=۳$$

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۹۶- (محمدرضا شوکتی‌بیرق)

چون $x=0$ معادلهٔ مجانب قائم است، پس $c=0$.

بنابراین معادلهٔ تابع به‌صورت $y=\frac{x^2+ax+b}{x}$ یا $y=x+a+\frac{b}{x}$ در می‌آید. لذا خط $y=x+a$ مجانب مایل آن خواهد بود. چون شیب مجانب مایل برابر ۱ است، پس $OA=OB$، بنابر قضیهٔ فیثاغورس خواهیم داشت:

$$OA^2+OB^2=AB^2 \Rightarrow 2OA^2=AB^2$$

$$\xrightarrow{AB=2\sqrt{2}} OA=2 \Rightarrow \begin{cases} A=(2,0) \\ B=(0,-2) \end{cases}$$

اما نقطهٔ A (و البته B) روی مجانب مایل واقع است، پس مختصات آن در معادلهٔ مجانب مایل صدق می‌کند.

$$\Rightarrow 0=2+a \Rightarrow a=-2 \xrightarrow{\text{معادله‌ی تابع}} y=\frac{x^2-2x+b}{x}$$

اما نمودار تابع بر محور طول‌ها مماس است، پس تابع ریشهٔ مضاعف دارد.

$$\frac{x^2-2x+b}{x}=0 \Rightarrow x^2-2x+b=0 \Rightarrow (-2)^2-4(1)(b)=0$$

$$\Rightarrow 4-4b=0 \Rightarrow b=1$$

$$\Rightarrow a+b+c=-2+1+0=-1$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۹۷- (آریان حیدری)

با توجه به گزینه‌ها، محاسبه مشتق چپ و راست تابع f در حوالی صفر مد نظر است.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{x^2(x-1)}-0}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{x^2}\sqrt[5]{x-1}}{\sqrt[5]{x^2}\sqrt[5]{x^3}} \Rightarrow \begin{cases} x\to 0^+ \Rightarrow f'_+(0)=\frac{-1}{0^+}=-\infty \\ x\to 0^- \Rightarrow f'_-(0)=\frac{-1}{0^-}=+\infty \end{cases}$$

(دیفرانسیل- مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۹۸- (عباس امیدوار)

$$\sum_{i=۱}^{۲۰}(۳i+۲)=\sum_{i=۱}^{۲۰}۳i+\sum_{i=۱}^{۲۰}۲=۳\sum_{i=۱}^{۲۰}i+\sum_{i=۱}^{۲۰}۲$$

$$=۳(\frac{(۲۰)(۲۱)}{۲})+۲(۲۰)=۶۳۰+۴۰=۶۷۰$$

(دیفرانسیل- انتگرال: صفحه‌های ۲۱۱ تا ۲۱۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۹۹- (هادی پلاور)

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(۲^n)\times ۲}{۳^n}=\sum_{n=۱}^{\infty}۲(\frac{۲}{۳})^n=۲\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{۲}{۳})^n=۲(\frac{\frac{۲}{۳}}{۱-\frac{۲}{۳}})$$

$$=۲(\frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{۱}{۳}})=۴$$

(دیفرانسیل- انتگرال: صفحه‌های ۲۱۱ تا ۲۱۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۰- (مرضیه کوهرزی)

$$۱\times ۱!+۲\times ۲!+\ldots+n\times n!=\sum_{k=۱}^{n}k\times k!=\sum_{k=۱}^{n}((k+۱)-۱)k!$$

$$=\sum_{k=۱}^{n}((k+۱)!-k!)=(n+۱)!-۱!=(n+۱)!-۱$$

$$\Rightarrow \text{عبارت خواسته شده سوال}=(n+۱)!$$

(دیفرانسیل- انتگرال: صفحه‌های ۲۱۱ تا ۲۱۹)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۱۱۱- (محمدابراهیم کیتی‌زاده)

برای آن‌که یک ماتریس مربعی، معکوس‌پذیر نباشد، باید دترمینان آن صفر باشد:

$$\begin{vmatrix} ۲ & a & b \\ ۳ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

$$\begin{vmatrix} ۲ & b+۱ & a-۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۴ & ۱ & ۲ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۲ & b & a \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۴ & ۱ & ۲ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۰ & ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۴ & ۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۰ + ۸ = ۸$$

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحهٔ ۱۳۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۱۲- (امیرحسین ابومحبوب)

اگر A یک ماتریس وارون‌پذیر باشد، درایهٔ سطر iام و ستون jام ماتریس $A^{-۱}$ برابر است با: $\frac{۱}{|A|} A_{ji}$

طبق دستور ساروس داریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۳ \\ ۰ & ۲ & ۴ \\ -۲ & ۳ & ۴ \end{vmatrix} = (۸+۸+۰) - (-۱۲+۱۲+۰) = ۱۶$$

$$A_{۳۲} = (-۱)^{۳+۲} \begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۰ & ۴ \end{vmatrix} = -۴$$

$$A^{-۱} \text{ درایهٔ سطر دوم و ستون سوم} = \frac{۱}{|A|} A_{۳۲} = \frac{-۴}{۱۶} = -\frac{۱}{۴}$$

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۶)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۱۳- (علیرضا شریف‌خطیبی)

دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه را با استفاده از دستور ساروس محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$\begin{vmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۷ & ۴ & ۹ \end{vmatrix} = (۳۶-۷+۱۲) - (۴۲+۸-۹) = ۴۱-۴۱ = ۰$$

چون دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه برابر صفر است، پس دستگاه فاقد جواب است یا بی‌شمار جواب دارد، یعنی هیچ‌گاه جواب منحصر به فرد ندارد.

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۸ و ۱۳۹)

---

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.kanoon.ir

۱۱۴- (حسین حاجیلو)

a ، b و c جواب‌های دستگاه هستند. کافی است مقدار $x+y+z$ را محاسبه کنیم. $(x=a, y=b, z=c)$

$$\begin{cases} x+2y+3z=9 \\ 2x+y+3z=4 \\ 2x+2y-z=2 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع طرفین سه معادله}}$$

$$5(x+y+z)=15 \Rightarrow x+y+z=a+b+c=3$$

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۴۷ و ۱۴۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۱۵- (علیرضا شریف‌خطیبی)

طبق روش کرامر داریم:

$$y=1=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & b & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & b & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1(-9-4)+5(2+2)+1(4-9)$$

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۱۶- (شروین سیاح‌نیا)

اگر دترمینان ماتریس ضرایب صفر باشد، آنگاه دستگاه را به روش ماتریس وارون نمی‌توان حل کرد.

$$\text{ماتریس ضرایب دستگاه}: A=\begin{bmatrix} -6 & m & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ m & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=0$$

$$\xrightarrow[\text{بسط می‌دهیم}]{\text{برحسب ستون اول}} (-6)(-1)+m(-m-1)=0$$

$$\Rightarrow m^2+m-6=0 \Rightarrow (m+3)(m-2)=0 \Rightarrow m=2, m=-3$$

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۸ و ۱۳۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.kanoon.ir

۱۱۷- (کاظم باقرزاده چهره)

$$\begin{cases} x+2y=a \\ 2x-y=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a+2b}{5} \\ y=\dfrac{2a-b}{5} \end{cases}$$

x و y باید در معادلهٔ سوم صدق کنند:

$$x+3y=1 \Rightarrow \frac{a+2b}{5}+3\left(\frac{2a-b}{5}\right)=1$$

$$\Rightarrow a+2b-3b+6a=5 \Rightarrow 7a-b=5$$

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۱۴۹)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۱۸- (داریوش ناظمی)

چون دستگاه همگن است برای وجود جواب غیرصفر لازم است که دترمینان ضرایب مجهولات صفر باشد. داریم:

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix}=0 \Rightarrow a^3+a-2=0 \Rightarrow a=1$$

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۳)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

۱۱۹- (محمدعلی نادرپور)

$$|A^*|=|A|^2 \Rightarrow |A|^2=1 \xrightarrow{|A|>0} |A|=1$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=A^{-1}B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}$$

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۷ تا ۱۳۹)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۱۲۰- (امیرحسین ابومحبوب)

با توجه به دو ماتریس، داریم:

$$\begin{cases} z = ۲ \\ -y - ۵z = -۱۱ \Rightarrow y = ۱ \\ x + y + ۲z = ۶ \Rightarrow x = ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow b_۳ = -x + ۲y + ۴z = -۱ + ۲ + ۸ = ۹$$

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۴۶ و ۱۴۷)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۲۱- (امیرحسین ابومحبوب)

فرض کنید A پیشامد آن باشد که در پرتاب سه سکه، فقط یکی رو بیاید.

در این صورت داریم:

$$P(A) = \frac{\binom{۳}{۱}}{۲^۳} = \frac{۳}{۸}$$

همچنین فرض کنید B پیشامد آن باشد که در پرتاب دو تاس، مجموع اعداد رو شده، عددی دو رقمی یعنی ۱۰ یا ۱۱ یا ۱۲ باشد. در این‌صورت داریم:

$$B = \{(۴,۶),(۵,۵),(۵,۶),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$$

$$P(B) = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$

دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگرند، بنابراین داریم:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{۳}{۸} \times \frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۱۶}$$

(ریاضیات گسسته- احتمال: صفحه‌های ۸۳ تا ۸۵)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۲۲- (بهزاد نظام‌هاشمی)

$$P(e) = \frac{۱}{۱۶} \Rightarrow P(\{e\}') = ۱ - \frac{۱}{۱۶} \Rightarrow P(\{a,b,c,d\}) = \frac{۱۵}{۱۶}$$

$$\Rightarrow P(\{a,b,c\} \cup \{c,d\}) = \frac{۱۵}{۱۶}$$

$$\Rightarrow P(\{a,b,c\}) + P(\{c,d\}) - P(\{a,b,c\} \cap \{c,d\}) = \frac{۱۵}{۱۶}$$

$$\Rightarrow \frac{۷}{۸} + \frac{۳}{۱۶} - P(c) = \frac{۱۵}{۱۶} \Rightarrow P(c) = \frac{۲}{۱۶} = \frac{۱}{۸}$$

(جبر و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۹۵ تا ۱۰۰)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.kanoon.ir

۱۲۳- (علیرضا شریف‌خطیبی)

$$P\ (\text{اولی و دومی همرنگ و سومی غیرهمرنگ}) = \overbrace{\frac{۳}{۷}\times\frac{۲}{۶}}^{\text{اولی و دومی قرمز}} \times \underbrace{\frac{۴}{۵}}_{\text{سومی مشکی}} + \overbrace{\frac{۴}{۷}\times\frac{۳}{۶}}^{\text{اولی و دومی مشکی}} \times \underbrace{\frac{۳}{۵}}_{\text{سومی قرمز}}$$

$$= \frac{۲۴+۳۶}{۲۱۰} = \frac{۶۰}{۲۱۰} = \frac{۶}{۲۱} = \frac{۲}{۷}$$

(ریاضیات گسسته-احتمال: صفحه‌های ۸۵ و ۸۶)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۲۴- (علیرضا شریف‌خطیبی)

اگر پیشامد A قرمز بودن سیب دوم و $B_۱$ و $B_۲$ به‌ترتیب پیشامدهای قرمز بودن و زرد بودن سیب اول باشند، آنگاه داریم:

$$P(A) = P(B_۱)P(A\mid B_۱) + P(B_۲)P(A\mid B_۲)$$

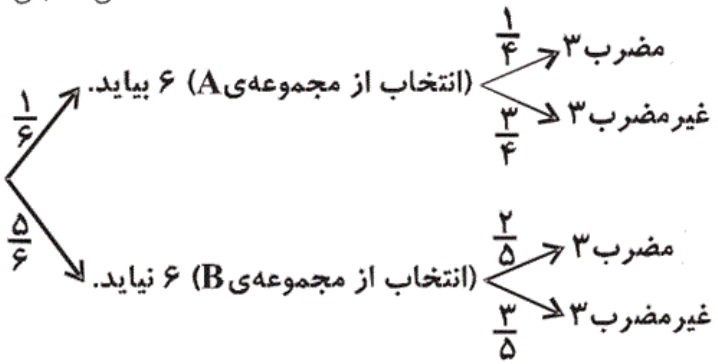
$$= \frac{۳}{۷}\times\frac{۲}{۶} + \frac{۴}{۷}\times\frac{۳}{۶} = \frac{۱۸}{۴۲} = \frac{۳}{۷}$$

$$P(B_۱\mid A) = \frac{P(B_۱)P(A\mid B_۱)}{P(A)} = \frac{\frac{۳}{۷}\times\frac{۲}{۶}}{\frac{۳}{۷}} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

(ریاضیات گسسته-احتمال: صفحه‌های ۸۵ و ۸۶)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

۱۲۵- (علی ساوجی)



اگر C پیشامد مضرب ۳ بودن عدد انتخابی باشد، آنگاه داریم:

$$P(C) = \frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۴} + \frac{۵}{۶}\times\frac{۲}{۵} = \frac{۱}{۲۴} + \frac{۲}{۶} = \frac{۹}{۲۴} = \frac{۳}{۸}$$

(ریاضیات گسسته-احتمال: صفحه‌های ۸۵ تا ۸۹)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

۱۲۶- (علی اصغر فرضی)

اگر R پیشامد قرمز بودن مهرهٔ انتخابی باشد، آنگاه داریم:

$$P(A|R)=\frac{P(A).P(R|A)}{P(A).P(R|A)+P(B).P(R|B)+P(C).P(R|C)}$$

$$=\frac{\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۵}}{\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۵}+\frac{۱}{۳}\times۱+\frac{۱}{۳}\times۰}=\frac{\frac{۱}{۵}}{\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۳}}=\frac{\frac{۱}{۵}}{\frac{۸}{۱۵}}=\frac{۳}{۸}$$

(ریاضیات گسسته-احتمال: صفحه‌های ۸۵ تا ۸۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۲۷- (علیرضا سیف)

تنها عددی که یک مقسوم‌علیه دارد عدد ۱ است. اعداد اوّل نیز تنها اعـدادی هستند که ۲ مقسوم‌علیه دارند، پس اعضای این پیشامد تصادفی عبارتند از:

$$\{۱,۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹\}$$

$$\frac{\binom{۹}{۱}}{\binom{۲۰}{۱}}=\frac{۹}{۲۰}=۰/۴۵$$

(ریاضیات گسسته-توزیع‌های گسسته احتمال: صفحه‌های ۹۱ تا ۹۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۲۸- (علیرضا سیف)

باید مجموع احتمال‌ها برابر یک باشد، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\sum_{i=۱}^{۶}P(X=i)=۱$$

$$\Rightarrow\frac{۲-a}{۳۶}+\frac{۴-a}{۳۶}+\frac{۶-a}{۳۶}+\frac{۸-a}{۳۶}+\frac{۱۰-a}{۳۶}+\frac{۱۲-a}{۳۶}$$

$$=\frac{۴۲-۶a}{۳۶}=۱\Rightarrow ۴۲-۶a=۳۶\Rightarrow a=۱$$

$$P(\text{فرد})=P(۱)+P(۳)+P(۵)=\frac{۱}{۳۶}+\frac{۵}{۳۶}+\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱۵}{۳۶}=\frac{۵}{۱۲}$$

(ریاضیات گسسته- توزیع‌های گسسته احتمال: صفحه‌های ۹۴ تا ۹۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.kanoon.ir

۱۲۹- (نوید مجیدی)

باید داشته باشیم $\sum_{x=1}^{5} P(X=x)=1$ ، در نتیجه می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{3}{11}+\frac{a}{11}+\frac{a}{11}=1 \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در ۳۳}}$$

$$11+11+9+6a=33 \Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

$$P(2<X<5)=P(X=3)+P(X=4)=\frac{3}{11}+\frac{1}{33}=\frac{10}{33}$$

(ریاضیات گسسته-توزیع‌های گسسته احتمال: مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۹۸)

---

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۳۰- (علیرضا کلانتری)

شرط این که تابع مورد نظر، یک تابع احتمال باشد، آن است که $\sum_{x=1}^{10} P(X=x)=1$ ، داریم:

$$\frac{1}{100}[2(10-1)+a]+\cdots+\frac{1}{100}[2(10-10)+a]=1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{100}[2(9+8+\cdots+1+0)+10a]=1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{100}[2\times\frac{9\times10}{2}+10a]=1 \Rightarrow 90+10a=100 \Rightarrow a=1$$

(ریاضیات گسسته-توزیع‌های گسسته احتمال: مشابه تمرین ۹ صفحهٔ ۹۹)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

۱۰۱- (کاظم اجلالی)

$$D_f=D_g=\mathbb{R}-\{\pm1\} \Rightarrow D_{f+g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}-\{\pm1\}$$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{2x}{x+1}-\frac{1}{x-1}+\frac{2x^2}{x+1}+\frac{1}{x-1}$$

$$=\frac{2x^2+2x}{x+1}=\frac{2x(x+1)}{x+1}=2x$$

بنابراین باید برد تابع خطی $y=2x$ را با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{\pm1\}$ تعیین کنیم که برابر $\mathbb{R}-\{\pm2\}$ است.

(حسابان - صفحه‌های ۶۴ تا ۶۹)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

www.kanoon.ir

۱۰۲- (غلام‌رضا نیازی)

$$(fog)(-۲) = f(g(-۲)) = f(-۱) = a$$

$(fog)(۱)$ تعریف شده‌است. $\Rightarrow ۱ \in D_g \Rightarrow c = ۱ , g(۱) \in D_f$

$$\Rightarrow ۳ \in D_f \Rightarrow b = ۳$$

$$(fog)(-۲) + (fog)(۱) = a + ۲ = ۵ \Rightarrow a = ۳$$

$$\Rightarrow a + b + c = ۳ + ۳ + ۱ = ۷$$

(حسابان - صفحه‌های ۶۴ تا ۷۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۳- (عادل حسینی)

$$f(x) = ۲ + \frac{۵}{x-۳} \Rightarrow \begin{cases} D_f = \mathbb{R} - \{۳\} \\ R_f = \mathbb{R} - \{۲\} \end{cases}$$

$$g(x) = \sqrt{۹ - x^۲} \Rightarrow \begin{cases} D_g = [-۳, ۳] \\ R_g = [۰, ۳] \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_{gof(x)} = \{ x \in D_f \mid f(x) \in D_g \}$$

$$= \left\{ x \neq ۳ \mid -۳ \leq ۲ + \frac{۵}{x-۳} \leq ۳ \right\}$$

حل نامعادلهٔ فوق: $-۳ \leq ۲ + \frac{۵}{x-۳} \leq ۳ \Rightarrow -۵ \leq \frac{۵}{x-۳} \leq ۱$

$$\Rightarrow -۱ \leq \frac{۱}{x-۳} \leq \frac{۱}{۵}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - ۳ < ۰ : -۱ \leq \frac{۱}{x-۳} < ۰ \Rightarrow x - ۳ \leq -۱ \Rightarrow x \leq ۲ \\ x - ۳ > ۰ : ۰ < \frac{۱}{x-۳} \leq \frac{۱}{۵} \Rightarrow x - ۳ \geq ۵ \Rightarrow x \geq ۸ \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_{gof} = \{ x \mid x \neq ۳, x \leq ۲ \text{ یا } x \geq ۸ \} = \mathbb{R} - (۲, ۸)$$

بنابراین اعداد صحیح ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ نمی‌توانند جزء دامنهٔ gof باشند.

(حسابان - صفحه‌های ۶۹ تا ۷۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.kanoon.ir

-۱۰۴ (سعید مدیرخراسانی)

$$\forall x\in\mathbb{R}: 0\le\frac{x^2}{1+x^2}<1\Rightarrow\left[\frac{x^2}{1+x^2}\right]=0$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}-x & ;x\ge 0\\ 0 & ;x<0\end{cases}$$

$$|x|\ge 0\Rightarrow f(|x|)=-|x|$$

$$\xrightarrow{-|x|\le 0} f\Big(f(|x|)\Big)=0\Rightarrow fof(|x|)=0$$

تابع ثابت $y=0$، هم زوج است و هم فرد.

(حسابان - صفحه‌های ۷۶ تا ۸۵)

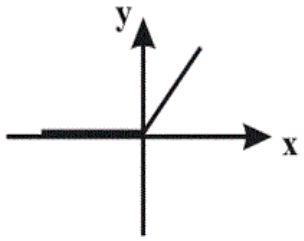
۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۰۵- (محمدمهدی وزیری)

نمودار همهٔ گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:

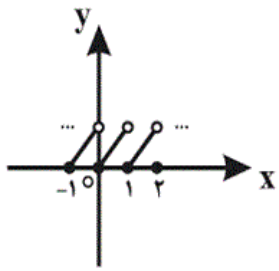
گزینهٔ «۱» صعودی است.

$$y=\begin{cases}2x & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$



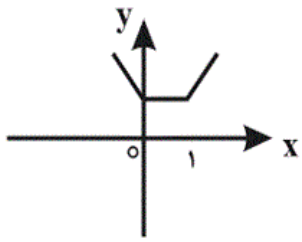
گزینهٔ «۲» غیریکنوا است.

$$y=x-[x]$$



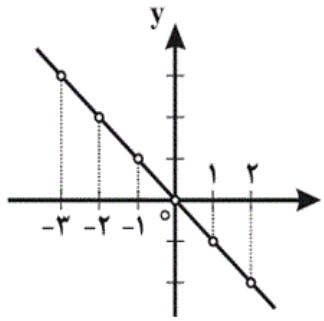
گزینهٔ «۳» غیریکنوا است.

$$y=|x|+|x-1|$$



گزینهٔ «۴» نزولی است.

$$y=-x;x\notin\mathbb{Z}$$



(حسابان - صفحه‌های ۷۶ تا ۸۵)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.kanoon.ir

۱۰۶- (کاظم اجلالی)

نمودار تابع f با دامنهٔ $[۱,۷]$ اکیداً نزولی است. بنابراین داریم:

$$۱\le x+۳<۳x-۱\le ۷ \quad (*)$$

دقت کنید که چون f نزولی است، جهت نامعادله عوض می‌شود. هم‌چنین با توجه به دامنهٔ محدود f، مقادیر $f(۳x-۱)$ و $f(x+۳)$ باید تعریف‌پذیر باشند:

$$\xrightarrow{*}\begin{cases} ۱\le x+۳\Rightarrow x\ge -۲ & (۱)\\ x+۳<۳x-۱\Rightarrow x>۲ & (۲)\\ ۳x-۱\le ۷\Rightarrow x\le \frac{۸}{۳} & (۳)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲),(۳)} x\in (۲,\frac{۸}{۳}]$$

(حسابان - صفحه‌های ۷۶ تا ۸۵)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۰۷- (عادل حسینی)

در ابتدا، مجموعهٔ داده‌شده باید تابع باشد؛ بنابراین:

$$m^۳-m=۴m^۲-۴\Rightarrow (m-۴)(m^۲-۱)=۰$$

$$\Rightarrow m=۴ \text{ یا } m=۱ \text{ یا } m=-۱$$

$$\begin{cases} m=۱\Rightarrow (۱,۰),(۱,۴)\in f\Rightarrow & \text{مجموعهٔ مورد نظر تابع نیست.}\\ m=-۱\Rightarrow (۱,۰),(۵,۰)\in f\Rightarrow & \text{تابع } f \text{، یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نیست.}\\ m=۴\Rightarrow & \text{تابع } f \text{، یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است.}\end{cases}$$

در نتیجه فقط برای $m=۴$ است که تابع f وارون‌پذیر است.

(حسابان - صفحه‌های ۸۶ تا ۸۸)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.kanoon.ir

$$f^{-1}(۳)=۵ \Rightarrow f(۵)=۳ \Rightarrow ۵a+b=۳$$

$$\longrightarrow a=۱, b=-۲ \Rightarrow f(x)=x-۲$$

$$\xrightarrow{f(۲)=m} m=۲-۲=۰$$

(حسابان - صفحهٔ ۸۹)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

-۱۰۹ (سعید خانجانی)

$$D_f=[۲,+\infty)$$

$$\sqrt{x-۲} \geq ۰ \Rightarrow ۱+\sqrt{x-۲} \geq ۱ \Rightarrow \sqrt[۳]{۱+\sqrt{x-۲}} \geq \sqrt[۳]{۱}=۱$$

$$\Rightarrow R_f=[۱,+\infty)$$

$$y=f(x)=\sqrt[۳]{۱+\sqrt{x-۲}} \Rightarrow y^۳=۱+\sqrt{x-۲}$$

$$\Rightarrow (y^۳-۱)^۲=x-۲ \Rightarrow y^۶-۲y^۳+۱=x-۲$$

$$\Rightarrow x=y^۶-۲y^۳+۳ \Rightarrow f^{-1}(x)=x^۶-۲x^۳+۳$$

$$D_{f^{-1}}=R_f=[۱,+\infty)$$

(حسابان - صفحه‌های ۹۰ تا ۹۴)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.kanoon.ir

-۱۱۰

$$f^{-1}\big(g(3a)\big)=3 \Rightarrow f(3)=g(3a) \Rightarrow 6=3a+\sqrt{3a}$$

$$\Rightarrow 6-3a=\sqrt{3a} \xrightarrow[\text{به توان ۲}]{6-3a\geq 0} 36+9a^2-36a=3a$$

$$\Rightarrow 3a^2-13a+12=0 \Rightarrow \begin{cases} a=3 \quad (0\leq a\leq 2, \text{غ.ق.ق}) \\ a=\frac{4}{3} \end{cases}$$

(حسابان - صفحهٔ ۱۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.kanoon.ir