۸۱- برد تابع $f(x)=x^۳-۶x^۲+۹x-۲$ با دامنهٔ $D_f=[۰,۲]$ کدام است؟

۱) $[-۲,۰]$ ۲) $[-۲,۲]$ ۳) $[۰,۲]$ ۴) $[۰,۴]$

۸۲- تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)=|\sin x|$ در بازهٔ $[۰,\frac{۱۳\pi}{۶}]$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۸۳- فاصلهٔ نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x}(x-۷)^۲$ از هم‌دیگر کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) $۶\sqrt{۳۷}$ ۳) ۷ ۴) $۷\sqrt{۲}$

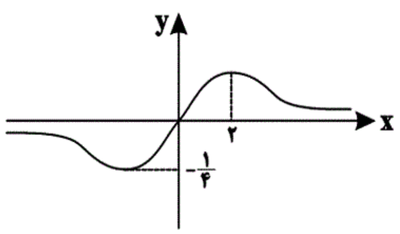
۸۴- حداکثر محیط مثلث قائم‌الزاویه با طول وتر $۳\sqrt{۲}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) $۳(۲+\sqrt{۲})$ ۳) $۳(۱+\sqrt{۲})$ ۴) $۳+۲\sqrt{۲}$

۸۵- اگر $A(۲,\frac{۲۰}{۳})$ نقطهٔ مینیمم تابع $f(x)=ax^۳+\frac{b}{x^۲}$ باشد، b کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۸۶- اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{ax}{x^۲+b}$ به شکل مقابل باشد، حاصل ab کدام است؟



۱) ۴
۲) ۴-
۳) ۲-
۴) ۲

۸۷- نمودار تابع $f(x)=۳\sqrt[۳]{x^۲}-\frac{۹}{\sqrt[۳]{x}}$ در کدام بازهٔ زیر صعودی است؟

۱) $(-۲,-۱)$ ۲) $(-۴,-۳)$ ۳) $(-۱,۱)$ ۴) $(۲,۳)$

۸۸- اگر نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=|x(x-a)|$ را به هم وصل کنیم، تشکیل یک مثلث متساوی الاضلاع می‌دهند؛ a کدام است؟ $(a>۰)$

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ۴) امکان‌پذیر نیست.

۸۹- نمودار تابع $f(x) = ۳x^{۴} + ۴x^{۳} - ۱۲x^{۲}$ در کدام طول بر محور x ها مماس است؟

۱) ۲-
۲) صفر
۳) ۱
۴) نمودار تابع بر محور x ها مماس نیست.

۹۰- حداکثر مساحت مستطیل محاط به محور x ها و نمودار تابع $y = ۴ - |x|$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۸
۴) ۱۶

۸۱- گزینهٔ «۲» (علی‌اصغر شریفی)

$$f'(x)=۳x^۲-۱۲x+۹=۰ \Rightarrow x^۲-۴x+۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=۳ \end{cases}$$

$x=۳$ در دامنهٔ تابع نیست.

$f(۰)=-۲$

$f(۱)=۲$

$f(۲)=۰$

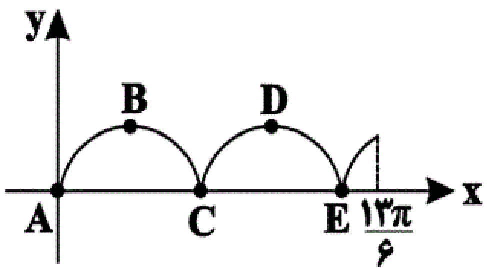
پس برد این تابع $[-۲,۲]$ است.

(صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۲ کتاب درسی)

۱ | ۲✓ | ۳ | ۴

۸۲- گزینهٔ «۳» (محمدجواد محسنی)

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



طبق شکل، نقاط E ،B ،C و D و ۴ نقطهٔ بحرانی درون بازه هستند و نقاط A و $x=\frac{۱۳\pi}{۶}$ هم به خاطر آن که ابتدا و انتهای بازه هستند، از نقاط بحرانی محسوب می‌شوند.

(صفحه‌های ۱۰۶ تا ۱۱۲ کتاب درسی)

۱ | ۲ | ۳✓ | ۴

۸۳- گزینهٔ «۲» (علی‌اصغر شریفی)

$$f(x)=\sqrt[3]{x}(x-7)^2 \Rightarrow f'(x)=\frac{(x-7)^2}{3\sqrt[3]{x^2}}+2(x-7)\sqrt[3]{x}=0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-7)^2+6(x-7)(x)}{3\sqrt[3]{x^2}}=0 \Rightarrow \frac{(x-7)(x-7+6x)}{3\sqrt[3]{x^2}}=0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c} & 0 & 1 & 7 & \\ \hline + & + & - & + & \end{array}$$

پس نقاط $(1,36)$ و $(7,0)$ اکسترمم نسبی این تابع هستند.

$$d=\sqrt{(7-1)^2+(36-0)^2}=\sqrt{6^2+6^4}=6\sqrt{37}$$

(صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۹ کتاب درسی)

۱   ۲✓   ۳   ۴

۸۴- گزینهٔ «۲» (محمدجواد محسنی)

اضلاع قائمهٔ مثلث را x و y درنظر می‌گیریم:

$$P=x+y+3\sqrt{2}$$

$$x^2+y^2=18 \Rightarrow y=\sqrt{18-x^2}$$

$$P=x+\sqrt{18-x^2}+3\sqrt{2} \Rightarrow P'=1-\frac{2x}{2\sqrt{18-x^2}}=0$$

$$\Rightarrow 1=\frac{x}{\sqrt{18-x^2}} \Rightarrow \sqrt{18-x^2}=x \Rightarrow 18-x^2=x^2 \xrightarrow{x>0}$$

$$x=3 \Rightarrow y=3 \Rightarrow P=3+3+3\sqrt{2}=3(2+\sqrt{2})$$

(صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۲۰ کتاب درسی)

۱   ۲✓   ۳   ۴

۸۵- گزینهٔ «۱» (علی‌اصغر شریفی)

$$f(۲)=\frac{۲۰}{۳}\Rightarrow ۸a+\frac{b}{۴}=\frac{۲۰}{۳}$$

$$f'(۲)=۰\Rightarrow f'(x)=۳ax^۲-\frac{۲b}{x^۳}\Rightarrow f'(۲)=۱۲a-\frac{b}{۴}=۰$$

$$\Rightarrow ۱۲a=\frac{b}{۴}\Rightarrow b=۴۸a$$

$$۸a+\frac{b}{۴}=\frac{۲۰}{۳}\Rightarrow ۸a+۱۲a=\frac{۲۰}{۳}\Rightarrow ۲۰a=\frac{۲۰}{۳}$$

$$\Rightarrow a=\frac{۱}{۳}\Rightarrow b=۱۶$$

(صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۹ کتاب درسی)

۱ ✓ | ۲ | ۳ | ۴

۸۶- گزینهٔ «۱» (محمدجواد محسنی)

$$f(x)=\frac{ax}{x^۲+b}\Rightarrow f'(x)=\frac{(a)(x^۲+b)-(ax)(۲x)}{(x^۲+b)^۲}=۰$$

$$\Rightarrow ax^۲+ab-۲ax^۲=۰\Rightarrow ax^۲-ab=۰\xrightarrow{a\neq۰}$$

$$x^۲=b\Rightarrow x=\pm\sqrt{b}$$

با توجه به آن‌که طول یکی از نقاط بحرانی برابر است با $x=۲$ داریم:

$$\sqrt{b}=۲\Rightarrow b=۴$$

با توجه به آن‌که $x=\pm۲$ طول نقاط بحرانی است، از نمودار می‌فهمیم که $(-۲,-\frac{۱}{۴})$ در تابع صدق می‌کند.

۱ ✓ | ۲ | ۳ | ۴

۸۷- گزینهٔ «۴» (علی‌اصغر شریفی)

$$f(x) = ۳x^{\frac{۲}{۳}} - ۹x^{-\frac{۱}{۳}} \rightarrow f'(x) = ۲x^{-\frac{۱}{۳}} + ۳x^{-\frac{۴}{۳}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = x^{-\frac{۱}{۳}}(۲ + ۳x^{-۱}) \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}(۲ + \frac{۳}{x})$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{۲x + ۳}{x\sqrt[۳]{x}}$$

جدول تعیین علامت مشتق را رسم می‌کنیم:

x		$-\frac{۳}{۴}$		۰	
f'	$-$		$+$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

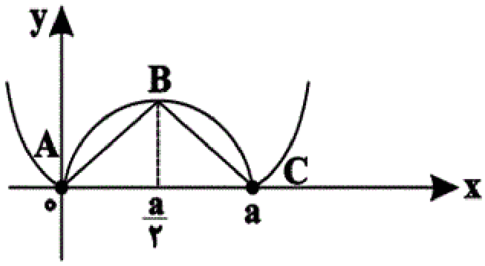
البته حواستان باشد تابع حول $x = ۰$ بی‌نهایت می‌شود و اطراف آن، یکنوایی‌اش تغییر می‌کند.

(صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۰۴ کتاب درسی)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۸۸- گزینهٔ «۱» (محمدجواد محسنی)

با توجه به $a > 0$، نمودار این تابع به شکل زیر است:



این مثلث قطعاً متساوی‌الساقین است؛ چرا که طول رأس سهمی، وسط دو ریشه است، ولی برای متساوی‌الاضلاع بودن باید $AB = AC$، حال داریم:

$$A(0,0)\ ,\ B\left(\frac{a}{2},\left(\frac{a}{2}\right)^2\right) \Rightarrow AB = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^4}$$

$$AB = AC \Rightarrow a = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^4} \Rightarrow a = \frac{a}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$\xrightarrow{a \neq 0} 2 = \sqrt{1 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 3 \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$$

(صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۹ کتاب درسی)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۸۹- گزینهٔ «۲» (علی‌اصغر شریفی)

$$f'(x)=12x^3+12x^2-24x=0 \Rightarrow 12x(x^2+x-2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=+1 \\ x=-2 \end{cases}$$

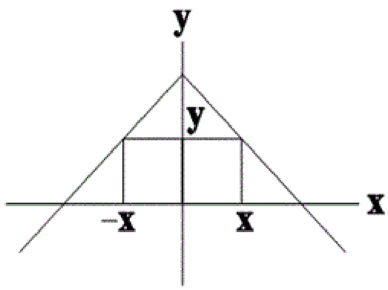
x		-2		0		1	
f'	-		+		-		+

نقاط $(-2,-32)$، $(0,0)$ و $(1,-5)$ اکسترمم نسبی هستند. چون در $x=0$ مقدار تابع و مشتق برابر صفر می‌شود، پس در $x=0$ بر محور مماس است.

(صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۱۲ کتاب درسی)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۹۰- گزینهٔ «۳» (محمدجواد محسنی)



با توجه به شکل طول مستطیل $2x$ و عرض آن y است؛ با توجه به آن که طول و عرض مستطیل مثبت هستند؛ پس $y = 4 - x$:

$$S = 2xy = 2x(4 - x) \Rightarrow S = 8x - 2x^2 \Rightarrow S' = 8 - 4x = 0$$

$$\Rightarrow x = 2 \Rightarrow S_{max} = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

(صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۲۰ کتاب درسی)

۱ ۲ ۳✓ ۴