



RIAZISARA

www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

...

[@riazisara](https://t.me/riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

[@riazisara.ir](https://www.instagram.com/riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

۸۱- اگر $\log 2 \simeq 0/3$ و $\log 3 \simeq 0/5$ باشد، حاصل $\log 7/5$ تقریباً کدام است؟

- ۰/۹ (۱) ۱/۱ (۲) ۱/۲ (۳) ۱/۷ (۴)

۸۲- حاصل $[\log_3 \frac{9}{82}]$ کدام است؟ ([] ، علامت جزء صحیح است.)

- ۲ (۱) -۳ (۲) -۴ (۳) -۵ (۴)

۸۳- مقدار $\frac{\log(\log 3)}{\log 4}$ کدام است؟

- $\log 3$ (۱) $\log \sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{\log 3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴)

۸۴- معادله لگاریتمی $\log_4(x^2 - 3) = \log_4(2x)$ دارای چند ریشه است؟

- (۱) فاقد ریشه است. (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۸۵- مقدار $\sin 11^\circ$ با کدام گزینه برابر است؟

- $\cos 7^\circ$ (۱) $\cos 25^\circ$ (۲) $-\sin 29^\circ$ (۳) $-\cos 34^\circ$ (۴)

۸۶- حاصل عبارت $A = (\cot 48^\circ)(\tan(-84^\circ))$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴)

۸۷- با فرض $\pi = 3/14$ ، حاصل $\cos(2/57)$ با کدام گزینه برابر است؟

- $\sin 1$ (۱) $-\sin 1$ (۲) $\cos 1$ (۳) $-\cos 1$ (۴)

۸۸- حاصل عبارت $\sin^2(1 \cdot \pi + \alpha) + \sin^2(\frac{\pi}{2} + \alpha) + \sin^2(\frac{17\pi}{2} - \alpha) + \sin^2(-\alpha)$ کدام است؟

- ۲ (۱) $2 \sin^2 \alpha$ (۲) $4 \sin^2 \alpha$ (۳) ۴ (۴) بستگی به مقدار α دارد.

۸۹- اگر $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ} = -\frac{127}{73}$ حاصل $\tan 15^\circ$ کدام است؟

۰/۱۹ (۴)

۰/۱۴ (۳)

۰/۳۶ (۲)

۰/۲۷ (۱)

۹۰- حاصل $\sqrt{6} + 4\cos 105^\circ$ کدام است؟

$2\sqrt{6} + \sqrt{2}$ (۴)

$2\sqrt{6} - \sqrt{2}$ (۳)

$-\sqrt{2}$ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

۹۱- حاصل $2\sin^2 15^\circ - 1$ کدام است؟

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

۹۲- حاصل عبارت $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$ کدام است؟

$\tan 2x$ (۴)

$-\tan x$ (۳)

$-\cot x$ (۲)

$\tan x$ (۱)

۹۳- اگر $f(x) = (\sin x + \cos x + 1)(\sin x + \cos x - 1)$ باشد، مقدار $f\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ کدام است؟

$-\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳)

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

۹۴- مقدار عبارت $\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin x \cos x}$ به ازای $x = 75^\circ$ کدام است؟

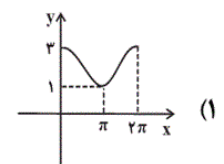
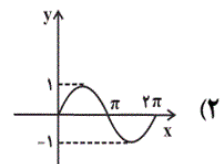
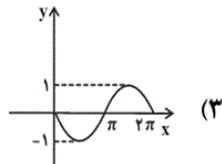
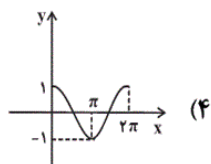
$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۴)

$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۳)

$-2\sqrt{3}$ (۲)

$2\sqrt{3}$ (۱)

۹۵- نمودار تابع $f(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام یک از گزینه‌های زیر است؟



۹۶- اگر $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}$ باشد، مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

$-\frac{7}{9}$ (۴)

$-\frac{2}{9}$ (۳)

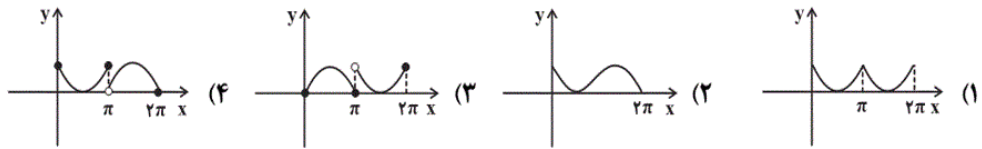
$-\frac{5}{9}$ (۲)

$\frac{4}{9}$ (۱)

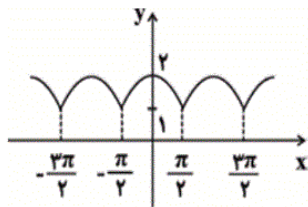
۹۷- اگر $\tan^2 x + \cot^2 x = 7$ و $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ باشد، آن گاه حاصل $\cos 2x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $-\frac{2}{3}$

۹۸- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 1 - \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ |\sin x| & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$ کدام است؟



۹۹- نمودار زیر مربوط به کدام یک از توابع مثلثاتی زیر می‌تواند باشد؟



- (۱) $y = |\sin x| + 1$
 (۲) $y = |\cos x| + 1$
 (۳) $y = |\sin x + 1|$
 (۴) $y = |\cos x + 1|$

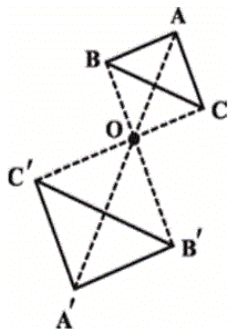
۱۰۰- اگر $a + b = \frac{\pi}{4}$ و $\sin(3a + 2b) = \frac{1}{4}$ باشد، مقدار $\sin 2b$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $-\frac{7}{8}$ (۴) $\frac{5}{8}$

هندسه ۲-۱۰ سوال

۱۰۱- با یک تبدیل تجانس به مرکز O ، رئوس مثلث ABC متناظراً بر رئوس مثلث $A'B'C'$ تصویر می‌شود. نسبت تجانس، کدام مقدار را

می‌تواند داشته باشد؟



(۱) $k = \frac{1}{2}$

(۲) $k = 2$

(۳) $k = -\frac{1}{2}$

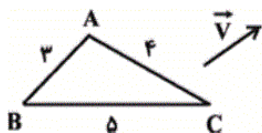
(۴) $k = -2$

۱۰۲- در تجانس به مرکز O و نسبت $k=3$ ، اگر پاره خط $A'B'$ مجانس پاره خط AB باشد، مساحت چهارضلعی $ABB'A'$ چند برابر

مساحت مثلث AOB است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

۱۰۳- مطابق شکل، مثلث ABC و بردار V مفروض است. مثلث ABC را با بردار V انتقال می‌دهیم تا مثلث $A'B'C'$ حاصل شود. اندازه



میانۀ وارد بر بزرگ‌ترین ضلع مثلث $A'B'C'$ کدام است؟

- ۲ (۱) ۲/۵ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۴- مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) با طول وتر ۲ واحد مفروض است. اگر این مثلث را به مرکز A با زاویه 45°

درجه در جهت ساعتگرد دوران دهیم، مساحت ناحیۀ مشترک بین تصویر و مثلث اولیه کدام است؟

- $\sqrt{2}-1$ (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $2-\sqrt{2}$ (۳) $2(\sqrt{2}-1)$ (۴)

۱۰۵- اگر نقطۀ هم‌رسی میانه‌های AA' ، BB' و CC' از مثلث ABC و $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC در تجانس به مرکز G

باشد، نسبت تجانس کدام است؟

- $-\frac{2}{3}$ (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴)

۱۰۶- دایرۀ $C(O, a-1)$ را با بردار انتقال $\overrightarrow{OO'}$ بر دایرۀ $C'(O', 3-a)$ تصویر می‌کنیم. اگر اندازه مماس مشترک داخلی این دو دایره

برابر ۳ باشد، اندازه مماس مشترک خارجی این دو دایره کدام است؟

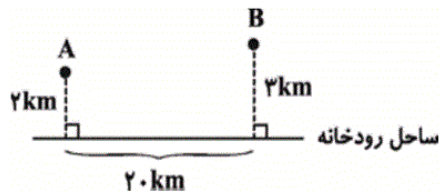
- $\sqrt{5}$ (۱) ۵ (۲) $\sqrt{13}$ (۳) ۱۳ (۴)

۱۰۷- نقطۀ O به فاصلۀ ۶ واحد از خط d مفروض است. اگر دوران یافته d حول نقطۀ O و به زاویه 60° درجه، d را در نقطۀ M قطع کند،

اندازه OM کدام است؟

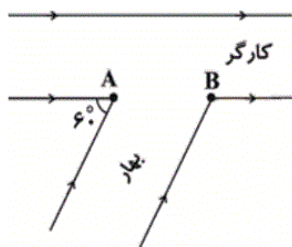
- $\frac{8}{3}\sqrt{3}$ (۱) $8\sqrt{3}$ (۲) $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ (۳) $4\sqrt{3}$ (۴)

۱۰۸- مطابق شکل دو شهر A و B مفروض اند. می خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم، به طوری که ۸ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. اندازه کوتاه‌ترین مسیر ممکن برای این جاده چند کیلومتر است؟



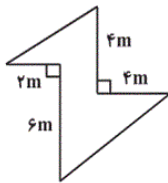
- ۲۰ (۱)
- ۲۱ (۲)
- ۲۲ (۳)
- ۲۳ (۴)

۱۰۹- شکل زیر تقاطع دو خیابان کارگر و بهار، به ترتیب با عرض‌های ثابت ۴ و $\sqrt{27}$ را نشان می‌دهد. شخصی می‌خواهد از نقطه A، ابتدا به سمت دیگر خیابان کارگر رفته و سپس به نقطه B برود. طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن کدام است؟



- ۱۱ (۱)
- ۱۰ (۲)
- ۹ (۳)
- ۸ (۴)

۱۱۰- زمینی به شکل زیر حصارکشی شده است و مساحت آن ۶۰ مترمربع است. اگر بخواهیم بدون تغییر محیط زمین و با استفاده از تبدیل هندسی مناسب، حصارها را طوری جابجا کنیم تا مساحت زمین بیشترین مقدار ممکن شود، در این صورت حداکثر مساحت زمین چند مترمربع است؟



- ۱۲۰ (۱)
- ۷۶ (۲)
- ۷۲ (۳)
- ۸۸ (۴)

آمار و احتمال - ۱۰ سوال

۱۲۱- در پرتاب دو تاس، مجموع دو عدد روشده، عددی اول است. به چه احتمالی هر دو عدد روشده، عدد اول هستند؟

- $\frac{7}{15}$ (۱)
- $\frac{1}{5}$ (۲)
- $\frac{3}{5}$ (۳)
- $\frac{4}{15}$ (۴)

۱۲۲- با ارقام ۱، ۲، ... و ۹، عددی سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌سازیم. اگر بدانیم که رقم دهگان این عدد زوج است، احتمال آن که عدد سه رقمی فرد باشد، کدام است؟

- $\frac{3}{7}$ (۱)
- $\frac{4}{9}$ (۲)
- $\frac{9}{17}$ (۳)
- $\frac{5}{8}$ (۴)

۱۲۳- اگر ۸ قلم کالای معیوب و ۱۲ قلم کالای سالم را به تصادف یکی بعد از دیگری و بدون جایگذاری امتحان کنیم، از ۳ قلم کالا که ابتدا

امتحان کردیم با چه احتمالی حداقل یکی معیوب است؟

- | | |
|---------------------|---------------------|
| $\frac{43}{57}$ (۲) | $\frac{47}{57}$ (۱) |
| $\frac{46}{57}$ (۴) | $\frac{44}{57}$ (۳) |

۱۲۴- می‌دانیم که دو قلوهای همسان، به احتمال ۱۰ درصد هم‌جنس بوده و دو قلوهای ناهمسان به احتمال ۵۰ درصد هم‌جنس می‌باشند و نیز

می‌دانیم که $\frac{1}{3}$ دو قلوها همسان هستند. به تصادف، دو فرد دو قلو انتخاب می‌کنیم. اگر این دو فرد هم‌جنس باشند، با کدام احتمال همسان می‌باشند؟

- | | | | |
|--------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $\frac{1}{11}$ (۴) | $\frac{1}{9}$ (۳) | $\frac{1}{7}$ (۲) | $\frac{1}{5}$ (۱) |
|--------------------|-------------------|-------------------|-------------------|

۱۲۵- بسکتبالیستی به احتمال $\frac{4}{5}$ توپی را وارد حلقه می‌کند. اگر او پرتاب اول را گل کند، ۳ بار دیگر پرتاب می‌کند و اگر پرتاب اول را گل

نکند، ۲ پرتاب دیگر انجام می‌دهد. به چه احتمالی دقیقاً یک توپ خود را گل می‌کند؟

- | | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $\frac{24}{625}$ (۴) | $\frac{32}{625}$ (۳) | $\frac{12}{625}$ (۲) | $\frac{44}{625}$ (۱) |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|

۱۲۶- از یک جعبه که شامل ۴ توپ آبی، ۲ توپ قرمز و ۶ توپ سبز است، دو توپ به تصادف و با جایگذاری بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه هر دو

توپ هم‌رنگ باشند، کدام است؟

- | | |
|--------------------|-------------------|
| $\frac{5}{18}$ (۲) | $\frac{1}{3}$ (۱) |
| $\frac{7}{18}$ (۴) | $\frac{2}{9}$ (۳) |

۱۲۷- اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، $P(B) = 0/5$ و $P(A' \cap B) = 0/3$ ، حاصل $P(A' \cup B)$ کدام است؟

- | | |
|-----------|-----------|
| $0/9$ (۲) | $0/6$ (۱) |
| $0/8$ (۴) | $0/7$ (۳) |

۱۲۸- اگر تعداد افراد ۱۵ خانواده به شکل زیر باشد، در نمودار دایره‌ای متناظر با این خانواده‌ها، زاویه مربوط به خانواده‌های ۴ نفره چند درجه خواهد بود؟

۳، ۴، ۳، ۲، ۷، ۶، ۵، ۲، ۲، ۴، ۳، ۳، ۴، ۵، ۲

۹۶ (۴)

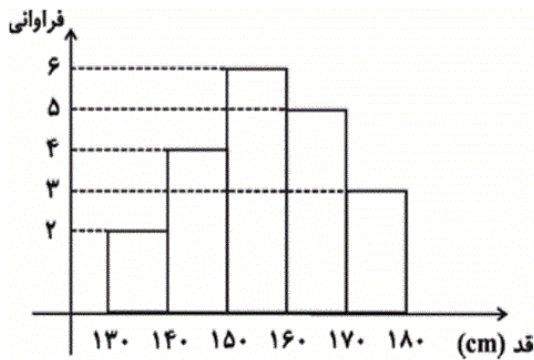
۷۲ (۳)

۴۸ (۲)

۲۴ (۱)

۱۲۹- نمودار زیر، مربوط به قد دانش‌آموزان یک کلاس است. اگر دانش‌آموز جدیدی با قد ۱۶۴ سانتی‌متر به کلاس اضافه شود، فراوانی نسبی

دسته وسط چگونه تغییر می‌کند؟



(۱) $\frac{1}{28}$ کم می‌شود.

(۲) $\frac{1}{30}$ زیاد می‌شود.

(۳) $\frac{1}{70}$ کم می‌شود.

(۴) تغییر نمی‌کند.

۱۳۰- در نمودار میله‌ای گروه‌های خونی O، AB، B و A، ارتفاع هر میله به ترتیب نصف میله بعدی است. اگر افراد مورد بررسی ۷۵ نفر

باشند، در نمودار دایره‌ای آن‌ها، بزرگ‌ترین زاویه چقدر از کوچک‌ترین زاویه بزرگ‌تر است؟

۱۴۴ (۲)

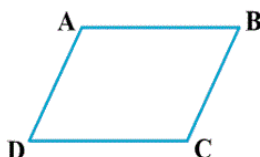
۷۲ (۱)

۱۶۸ (۴)

۱۹۲ (۳)

هندسه ۲ - گواه - ۱۰ سوال -

۱۱۱- در متوازی‌الاضلاع شکل مقابل با کدام بردار می‌توان AB را روی DC تصویر کرد؟



(۱) \overline{AC}

(۲) \overline{AD}

(۳) \overline{BD}

(۴) هر سه مورد

۱۱۲- در شکل زیر $AB = CD$ می‌باشد. همچنین نقاط C و D به ترتیب دوران یافته نقاط A و B می‌باشند. مرکز دوران کدام است؟



(۱) محل تلاقی عمود منصف‌های AB و CD

(۲) محل تلاقی دو قطر AC و BD

(۳) محل تلاقی عمود منصف‌های AC و BD

(۴) محل تلاقی امتداد‌های AB و CD

۱۱۳- مجانس‌های یک شکل نسبت به یک مرکز و با دو نسبت مختلف k و k' خود مجانس یکدیگرند. نسبت تجانس این دو شکل کدام می‌تواند باشد؟

(۴) $2kk'$

(۳) $k + k'$

(۲) $\frac{k}{k'}$

(۱) kk'

۱۱۴- دو دایره به شعاع‌های R و R' با نسبت $\frac{5}{3}$ - مجانس یکدیگرند. هرگاه فاصله مراکز دو دایره ۱۰ باشد، در این صورت فاصله مرکز تجانس این دو دایره تا مرکز دایره کوچک‌تر کدام است؟

(۴) $\frac{7}{2}$

(۳) $\frac{25}{4}$

(۲) $\frac{9}{2}$

(۱) $\frac{15}{4}$

۱۱۵- نقطه A و دو دایره در صفحه مفروض‌اند. برای رسم مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین به رأس A که دو سر قاعده آن روی هر یک از این دو دایره باشد، کدام تبدیل به کار می‌رود؟

(۴) دوران

(۳) تجانس

(۲) انتقال

(۱) بازتاب

۱۱۶- کدام گزاره همواره صحیح است؟

(۱) تجانس طولیاً همواره تبدیل همانی است.

(۲) دو شکل متشابه، همواره متجانس یکدیگرند.

(۳) بازتاب، انتقال، دوران و تجانس همواره دارای نقطه ثابت تبدیل هستند.

(۴) اگر یک تبدیل، اندازه پاره‌خط‌ها را حفظ کند، همواره اندازه زاویه و مساحت را حفظ می‌کند.

۱۱۷- ترکیب دو دوران با یک مرکز و به زاویه‌های 5° و 13° چه نوع تبدیلی است؟

(۱) دوران

(۲) انتقال

(۳) تجانس مستقیم

(۴) بازتاب محوری

۱۱۸- از بین مثلث‌هایی که در ضلع $AB = 16$ مشترک و مساحت آن‌ها ۴۸ می‌باشد، کم‌ترین مقدار محیط کدام است؟

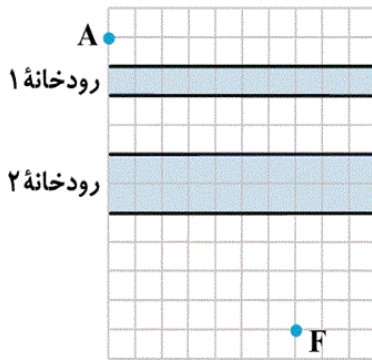
(۴) ۳۸

(۳) ۳۶

(۲) ۳۴

(۱) ۳۲

۱۱۹- دو رودخانه و دو نقطه A و F مطابق شکل مفروض اند. می خواهیم از نقطه A به نقطه F برویم به طوری که هنگام عبور از رودخانه ها بر روی پل هایی عمود بر رودخانه ها حرکت کنیم. طول کوتاه ترین مسیر ممکن برای پیمودن این فاصله کدام است؟ (فاصله بین نقاط شبکه ای یک واحد است.)



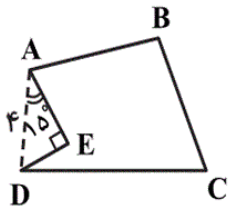
(۱) $8 + 3\sqrt{2}$

(۲) $3 + 7\sqrt{2}$

(۳) $3 + \sqrt{85}$

(۴) ۱۳

۱۲۰- می خواهیم بدون تغییر در محیط چندضلعی ABCDE و با استفاده از تبدیل هندسی مناسب، مساحت آن را افزایش دهیم. مساحت



شکل جدید چند واحد بیشتر از مساحت شکل اولیه است؟

(۲) ۴

(۱) ۲

(۴) ۱۶

(۳) ۸

۸۱-

(مهمرمصطفی ابراهیمی)

$$\log 7 / 5 = \log \frac{75}{10} = \log 75 - \log 10$$

$$= \log(25 \times 3) - 1 = 2 \log 5 + \log 3 - 1$$

می‌دانیم $\log 5 = 1 - \log 2 \approx 1 - 0 / 3 = 0 / 7$ باشد. پس:

$$2 \log 5 + \log 3 - 1 \approx 2(0 / 7) + 0 / 5 - 1 = 1 / 4 + 0 / 5 - 1 = 0 / 9$$

(مسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۱۶، ۱۷ و ۹۰)

۴

۳

۲

۱

۸۲- گزینه «۲»

(علی شعرابی)

عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\left[\log_3 \frac{9}{82} \right] = \left[\log_3^9 - \log_3^{82} \right] = \left[2 - \log_3^{82} \right] = 2 + \left[-\log_3^{82} \right]$$

حالا مقدار جزء صحیح را حساب می‌کنیم:

$$3^4 < 82 < 3^5 \Rightarrow 4 < \log_3^{82} < 5 \Rightarrow -5 < -\log_3^{82} < -4$$

$$\Rightarrow \left[-\log_3^{82} \right] = -5$$

حالا مقدار به دست آمده را جای گذاری می‌کنیم:

$$2 + \left[-\log_3^{82} \right] = 2 + (-5) = -3$$

(مسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۱۰ تا ۱۷)

۴

۳

۲

۱

-۸۳

(مهری ملارمضانی)

$$\frac{\log(\log 3)}{\log 4} = 2^{\log_4 \log 3} = (\log 3)^{\log_4 2}$$

$$= (\log 3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\log 3}$$

توجه کنید از روابط لگاریتمی $\frac{\log a}{\log b} = \log_b a$ و $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ استفاده کرده‌ایم.

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۱۶، ۱۷ و ۹۰)

۴

۳

۲

۱

-۸۴

(امیر هوشنگ فمسه)

$$x^2 - 3 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1, 3$$

$x = -1$ در دامنه نیست. پس معادله دارای یک ریشه است.

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۱۷ و ۱۸)

۴

۳

۲

۱

-۸۵

(مهرداد ملونری)

در گزینه «۳» داریم:

$$-\sin 29^\circ = -\sin(18^\circ + 11^\circ) = -(-\sin 11^\circ) = \sin 11^\circ$$

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۴

۳

۲

۱

-۸۶

(یاسین سپهر)

$$\cot 48^\circ = \cot(3 \times 18^\circ - 6^\circ) = -\cot 6^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan(-84^\circ) = -\tan 84^\circ = -\tan(90^\circ - 6^\circ)$$

$$= -\tan(5 \times 18^\circ - 6^\circ) = \tan 6^\circ = \sqrt{3}$$

$$A = (\cot 48^\circ)(\tan(-84^\circ)) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3} = -1$$

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۴

۳

۲

۱

(امیر هوشنگ فمسه)

$$\pi = 3/14 \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{3/14}{2} = 1/57$$

$$\cos(2/57) = \cos(1 + 1/57) = \cos(1 + \frac{\pi}{2}) = -\sin 1$$

(مسابان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

(فرشاد خرامرزی)

$$\sin(1 \cdot \pi + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(\frac{17\pi}{2} - \alpha) = \sin(\lambda\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\Rightarrow \sin^2(1 \cdot \pi + \alpha) + \sin^2(\frac{\pi}{2} + \alpha) + \sin^2(\frac{17\pi}{2} - \alpha) + \sin^2(-\alpha)$$

$$= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2$$

(مسابان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

(علی کردی)

$$\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ} = \frac{\cos(270^\circ + 15^\circ) - \sin(270^\circ - 15^\circ)}{\sin(540^\circ - 15^\circ) - \sin(90^\circ + 15^\circ)}$$

$$= \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ} = \frac{\frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}}{\frac{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}} = \frac{\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} + 1}{\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} - 1} = \frac{\tan 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ - 1}$$

حال با فرض $x = \tan 15^\circ$ ، داریم:

$$\frac{x+1}{x-1} = -\frac{127}{73} \Rightarrow 73x + 73 = -127x + 127$$

$$\Rightarrow 200x = 54 \Rightarrow x = 54/200$$

(مسابان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

-۹۰

(علی شهرابی)

$$\begin{aligned} \cos 105^\circ &= \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \\ \sqrt{6} + 4 \cos 105^\circ &= \sqrt{6} + 4\left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\right) = \sqrt{2} \end{aligned}$$

پس:

(مسابان ۱- مثلثات- صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۴

۳

۲

۱

-۹۱

(علی شهرابی)

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \xrightarrow{\alpha=15^\circ} \cos 30^\circ = 1 - 2 \sin^2 15^\circ \\ \frac{\sqrt{3}}{2} &= 1 - 2 \sin^2 15^\circ \Rightarrow 2 \sin^2 15^\circ - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

(مسابان ۱- مثلثات- صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۴

۳

۲

۱

-۹۲

(یوسف میرسعیر قاضی)

$$1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cdot \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

(مسابان ۱- مثلثات- صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۴

۳

۲

۱

-۹۳

(علی کردی)

$$f(x) = (\sin x + \cos x + 1)(\sin x + \cos x - 1) = (\sin x + \cos x)^2 - 1$$

$$= \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x - 1 = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

$$f\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(2 \times \frac{7\pi}{12}\right) = \sin \frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

(مسابان ۱- مثلثات- صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴ و ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۴

۳

۲

۱

$$\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin x \cos x} = \frac{\overbrace{(\cos^2 x - \sin^2 x)}^{\cos 2x} \overbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}^1}{\underbrace{\sin x \cos x}_{\frac{1}{2} \sin 2x}} = 2 \cot 2x$$

$$\xrightarrow{x=75^\circ} 2 \cot 150^\circ = -2 \cot 30^\circ = -2 \times \sqrt{3} = -2\sqrt{3}$$

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۴

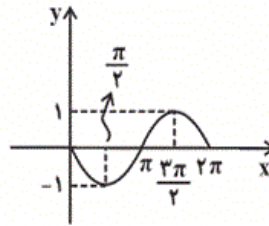
۳

۲ ✓

۱

با توجه به اتحاد $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ داریم:

$$f(x) = 2 \cos^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - 1 = \cos \left(2 \times \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin x$$

نمودار تابع $f(x) = -\sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ به صورت زیر می‌باشد.

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۸ تا ۱۱۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{3} \quad \text{طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم} \rightarrow$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow 1 + \sin 2\alpha = \frac{4}{9} \Rightarrow \sin 2\alpha = -\frac{5}{9}$$

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

(پدر، مادر، نیکوکار)

$$\tan^2 x + \cot^2 x = 9 \Rightarrow (\tan x + \cot x)^2 - \overbrace{2 \tan x \cot x} = 9$$

$$\Rightarrow (\tan x + \cot x)^2 = 9 \Rightarrow \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)^2 = 9$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} \right)^2 = 9 \Rightarrow \left(\frac{1}{\sin 2x} \right)^2 = 9$$

$$\Rightarrow \sin^2 2x = \frac{1}{9} \Rightarrow \cos^2 2x = 1 - \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\xrightarrow{x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right)} \cos 2x = -\frac{\sqrt{8}}{3}$$

(مسئله ۱- مثلثات - صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

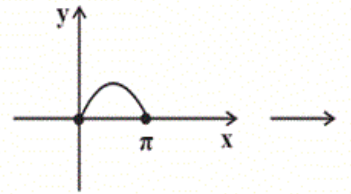
۴

۳

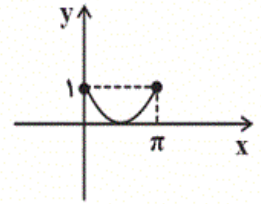
۲

۱ ✓

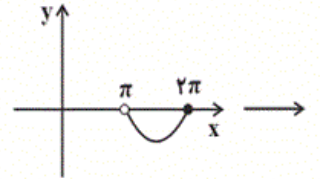
$$y = \sin x \quad 0 \leq x \leq \pi$$



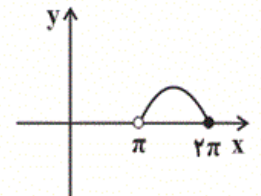
$$y = 1 - \sin x \quad 0 \leq x \leq \pi$$



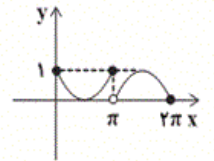
$$y = \sin x \quad \pi < x \leq 2\pi$$



$$y = |\sin x| \quad \pi < x \leq 2\pi$$



$$f(x) = \begin{cases} 1 - \sin x & ; 0 \leq x \leq \pi \\ |\sin x| & ; \pi < x < 2\pi \end{cases} \Rightarrow$$



(مسایان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۹)

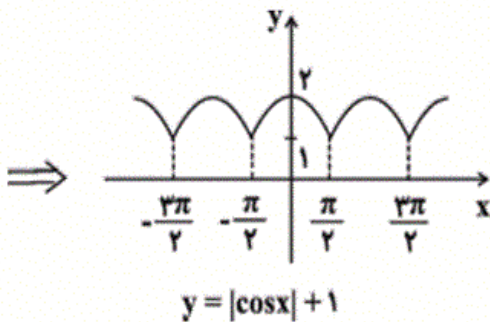
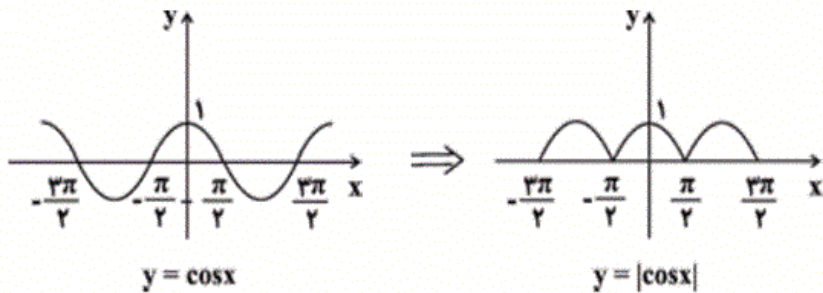
۴ ✓

۳

۲

۱

(فرشاد فرامرزی)



(مسایان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۹)

۴

۳

۲

۱

(میثم بهرامی بویا)

$$\sin(3a + 2b) = \sin(a + 2(\underbrace{a + b}_{\frac{\pi}{4}})) = \sin(a + \frac{\pi}{2}) = \cos a = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \cos a = \frac{1}{4}, \quad 2a + 2b = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2b = \frac{\pi}{2} - 2a$$

$$\sin 2b = \sin(\frac{\pi}{2} - 2a) = \cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 2(\frac{1}{4})^2 - 1 = -\frac{7}{8}$$

(مسایان ۱- مثلثات - صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴ و ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۴

۳

۲

۱

در این مسأله مرکز تجانس بین هر نقطه و تصویرش واقع شده است، پس تجانس معکوس است و نسبت تجانس عددی منفی می‌باشد. ($k < 0$)
 مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC و از نوع انبساط است، در نتیجه:

$$|k| = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} > 1 \xrightarrow{k < 0} k < -1$$

بنابراین نسبت تجانس باید عددی کوچک‌تر از -1 باشد.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۴۵ تا ۴۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

تجانس، شیب خط را حفظ می‌کند، داریم:

$$AB \parallel A'B' \Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle A'OB'$$

$$k = 3 \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = 3 \Rightarrow \frac{S_{\triangle A'OB'}}{S_{\triangle AOB}} = k^2 = 9 \Rightarrow S_{\triangle A'OB'} = 9S_{\triangle AOB}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ABB'A'}}{S_{\triangle AOB}} = \frac{S_{\triangle A'OB'} - S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOB}} = \frac{9S_{\triangle AOB} - S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOB}} = 8$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۴۵ تا ۵۰)

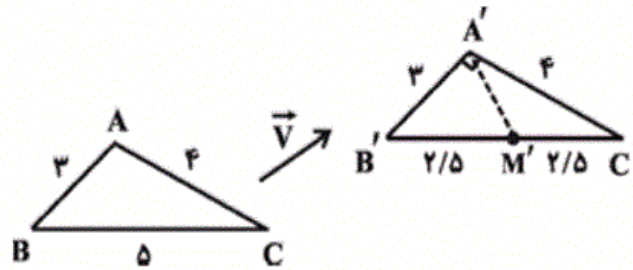
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

انتقال تبدیل طولیاست و دو مثلث ABC و $A'B'C'$ هم‌نهشت‌اند.



بزرگ‌ترین ضلع مثلث $A'B'C'$ ضلع $B'C'$ است، پس خواسته مسئله به دست آوردن طول $A'M'$ است. مثلث $A'B'C'$ قائم‌الزاویه است،

$$(B'C'^2 = A'B'^2 + A'C'^2) \quad \text{زیرا:}$$

از طرفی می‌دانیم در هر مثلث قائم‌الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر

$$A'M' = \frac{B'C'}{2} = \frac{5}{2} = 2.5 \quad \text{است، بنابراین:}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

۴

۳

۲ ✓

۱

در مثلث قائم‌الزاویه $B'AC'$ می‌دانیم:

$$AP \times B'C' = AB' \times AC' \Rightarrow AP = 1$$

$$PC = AC - AP = \sqrt{2} - 1 \quad \text{در نتیجه:}$$

$$S_{AMNP} = S_{\Delta AMC} - S_{\Delta NPC} \quad \text{حال داریم:}$$

$$S_{\Delta AMC} = \frac{AM \times MC}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta NPC} = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{2} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{AMNP} = \frac{1}{2} - \frac{3-2\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}-2}{2} = \sqrt{2}-1$$

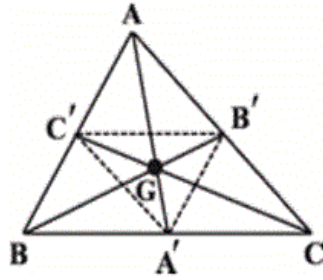
(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۴۲ تا ۴۴)

۴

۳

۲

۱ ✓



می‌دانیم میانه‌های هر مثلث، همدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند.
بنابراین:

$$\frac{GA'}{GA} = \frac{GB'}{GB} = \frac{GC'}{GC} = \frac{1}{2}$$

از طرفی چون مرکز تجانس (G) بین A و A' واقع می‌باشد، پس
تجانس معکوس است، بنابراین:

$$K = -\frac{GA'}{GA} = -\frac{1}{2}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۴۵ تا ۵۰)

۴

۳✓

۲

۱

تبدیل انتقال طولی است، پس شعاع دو دایره برابر است:

$$\begin{cases} R = a - 1 \\ R' = 3 - a \end{cases} \xrightarrow{R=R'} a - 1 = 3 - a \Rightarrow a = 2 \Rightarrow R = R' = 1$$

حال با توجه به روابط مماس مشترک داخلی و خارجی دو دایره داریم:

$$C \text{ و } C' \text{ دایره دو دایره مشترک داخلی} = \sqrt{OO'^2 - (R + R')^2}$$

$$= \sqrt{OO'^2 - 2^2} = 3 \Rightarrow OO'^2 = 13$$

$$C \text{ و } C' \text{ دایره دو دایره مشترک خارجی} = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2}$$

$$= \sqrt{OO'^2 - 0} = \sqrt{13}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲ و ۴۰ و ۴۱)

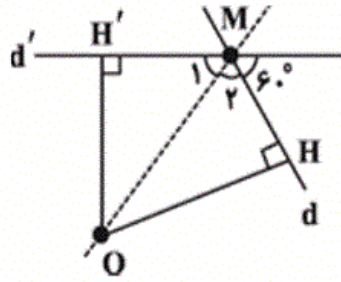
۴

۳✓

۲

۱

ابتدا شکل مورد نظر سوال را رسم می‌کنیم.



روشن است که نقطه O روی نیمساز زاویه M قرار دارد. لذا با توجه به

زوایای مفروض داریم:

$$\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = \frac{12^\circ}{2} = 6^\circ$$

$$\sin(\hat{M}_2) = \frac{OH}{OM} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{OM} \Rightarrow OM = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

۴

۳

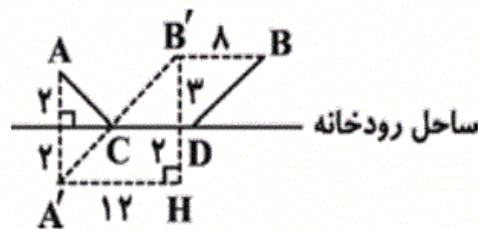
۲

۱

A' بازتاب یافته نقطه A نسبت به ساحل رودخانه است.

B' انتقال یافته نقطه B در راستای ساحل رودخانه است.

طبق شکل داریم:



$$A'B'^2 = A'H^2 + B'H^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow A'B' = 13$$

کوتاه‌ترین مسیر ACDB = $\frac{AC}{A'C} + \frac{CD}{BB'} + \frac{BD}{B'C} = A'C + B'C + BB'$

$$= A'B' + BB' = 13 + 8 = 21$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه ۵۵)

۴

۳

۲

۱

برای به دست آوردن کوتاه‌ترین مسیر، کافیسست نقطه A را نسبت به محور d بازتاب داده و نقطه حاصل (A') را به B وصل کنیم. محل تلاقی A'B با محور d را M می‌نامیم. AM + MB کوتاه‌ترین مسیر ممکن است. حال از آنجایی که AM = MA'، در نتیجه:

$$AM + MB = MA' + MB = A'B$$

لذا کافیسست طول A'B را بیابیم. از طرفی داریم:

$$\Delta AH'B : \hat{B} = 60^\circ \Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{AH'}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{27}}{AB} \Rightarrow AB = 6$$

اکنون با توجه به این که در رأس A قائم‌الزاویه است، بنابراین:

$$AA'^2 + AB^2 = A'B^2 \Rightarrow 8^2 + 6^2 = A'B^2 \Rightarrow A'B = 10$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۵۳ تا ۵۶)

۴

۳

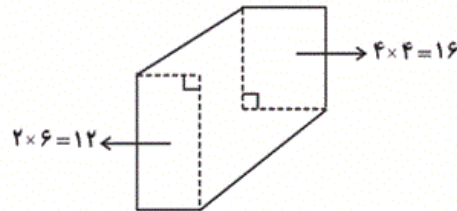
۲ ✓

۱

۱۱۰-

(ریم مشاق نظم)

طبق صورت سوال شکل نهایی به صورت زیر خواهد بود که مساحت یک مربع و یک مستطیل به زمین اضافه می‌شود، پس داریم:



$$\text{مساحت ماکزیمم} = 60 + 4 \times 4 + 2 \times 6 = 88$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۵۳ و ۵۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

اگر A و B به ترتیب پیشامدهای «هر دو عدد، عدد اول باشند.» و «مجموع دو عدد، عددی اول باشد.» تعریف شوند، آنگاه داریم:

$$A = \{(2,2), (2,3), (2,5), (3,2), (3,3), (3,5), (5,2), (5,3), (5,5)\}$$

$$B = \{(1,1), (1,2), (1,4), (1,6), (2,1), (2,3), (2,5), (3,2), (3,4), (4,1), (4,3), (5,2), (5,6), (6,1), (6,5)\}$$

$$A \cap B = \{(2,3), (2,5), (3,2), (5,2)\}$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{4}{15}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۵۲ تا ۵۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

با توجه به شرط سوال، داریم:

$$B: \frac{8 \times 4 \times 7}{\text{زوج}} \Rightarrow 224$$

اکنون با توجه به شرط، حالت‌هایی را انتخاب می‌کنیم که عدد فرد باشد:

$$A \cap B: \frac{7 \times 4 \times 5}{\text{زوج فرد}} \Rightarrow 140$$

در نتیجه:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{140}{224} = \frac{5}{8}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۵۳ تا ۵۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مفرد پوراغمری)

 A_1 : پیشامد سالم بودن کالای اول A_2 : پیشامد سالم بودن کالای دوم A_3 : پیشامد سالم بودن کالای سوم

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_2 | A_1) \times P(A_3 | A_1 \cap A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{12}{20} \times \frac{11}{19} \times \frac{10}{18} = \frac{11}{57}$$

$$P(\text{حداقل یکی معیوب باشد}) = 1 - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1 - \frac{11}{57} = \frac{46}{57}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۵۶ تا ۵۸)

۴ ✓

۳

۲

۱

(مر تفضی فہیم علوی)

$$\text{احتمال هم جنس بودن} = \underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{1}{10}}_{\text{همسان}} + \underbrace{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}_{\text{ناهمسان}} = \frac{1}{30} + \frac{1}{3} = \frac{11}{30}$$

حال مطابق قانون بیز، احتمال مطلوب برابر می‌شود با:

$$\frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{30} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{11}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۶۰ تا ۶۶)

۴ ✓

۳

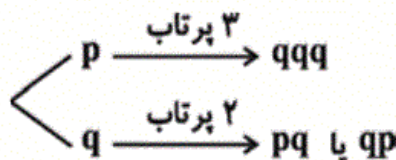
۲

۱

(امیر هوشنگ فمسه)

احتمال گل نشدن: q

احتمال گل شدن: p



$$\frac{4}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5} \times \frac{1}{5}\right) \times 2 = \frac{4}{625} + \frac{8}{125} = \frac{44}{625}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۵۸ تا ۶۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

-۱۲۶

(سهیل حسن خان پور)

باید احتمال اینکه دو توپ آبی یا دو توپ قرمز یا دو توپ سبز بیرون آورده شود را حساب کنیم و با هم جمع کنیم:

$$\left. \begin{aligned} P(\text{هر دو آبی}) &= \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \\ P(\text{هر دو سبز}) &= \frac{6}{12} \times \frac{5}{11} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{11} = \frac{5}{22} \\ P(\text{هر دو قرمز}) &= \frac{2}{12} \times \frac{1}{11} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{11} = \frac{1}{66} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9} + \frac{5}{22} + \frac{1}{66} = \frac{4+9+1}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۶۹ و ۷۰)

 ۴ ۳ ۲ ۱

-۱۲۷

(سیدوید زوالفقاری)

چون دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگرند، پس A' و B نیز مستقل از هم هستند و داریم:

$$P(A' \cap B) = P(A') \cdot P(B) \Rightarrow 0/3 = P(A') \times 0/5$$

$$\Rightarrow P(A') = 0/6$$

$$P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B)$$

$$= 0/6 + 0/5 - 0/3 = 0/8$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۶۷ تا ۶۹)

 ۴ ۳ ۲ ۱

-۱۲۸

(مبیر مضمیری نویسی)

$$\text{خانواده ۴ نفره: } \frac{3}{15} \times 360^\circ = 72^\circ$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۷۳ تا ۸۲)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(فخرشار فرامرزی)

$$\text{تعداد دانش آموزان} = ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ = ۲۰$$

$$\text{فراوانی نسبی دسته وسط قبل از اضافه شدن دانش آموز جدید} = \frac{۶}{۲۰} = \frac{۳}{۱۰}$$

دانش آموز جدید یک واحد به فراوانی دسته چهارم و کل داده‌ها اضافه می‌کند و در فراوانی دسته وسط تأثیری ندارد.

$$\text{فراوانی نسبی دسته وسط بعد از اضافه شدن دانش آموز جدید} = \frac{۶}{۲۱} = \frac{۲}{۷}$$

$$\text{تفاضل فراوانی‌های نسبی} = \frac{۲}{۷} - \frac{۳}{۱۰} = \frac{۲۰ - ۲۱}{۷۰} = -\frac{۱}{۷۰}$$

یعنی فراوانی نسبی دسته وسط، $\frac{۱}{۷۰}$ کم می‌شود.

(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۷۳ تا ۸۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

(امیر هوشنگ فمسه)

اگر کوچک‌ترین فراوانی x باشد، سایر فراوانی‌ها $۲x$ ، $۴x$ و $۸x$ خواهند بود.

$$x + ۲x + ۴x + ۸x = ۷۵ \Rightarrow ۱۵x = ۷۵ \Rightarrow x = ۵$$

پس فراوانی‌ها برابر ۵، ۱۰، ۲۰ و ۴۰ هستند.

$$\theta_1 = \frac{f_1}{\sum f} \times ۳۶۰^\circ = \frac{۵}{۷۵} \times ۳۶۰^\circ = ۲۴^\circ$$

$$\theta_4 = \frac{f_4}{\sum f} \times ۳۶۰^\circ = \frac{۴۰}{۷۵} \times ۳۶۰^\circ = ۱۹۲^\circ$$

$$\Rightarrow ۱۹۲^\circ - ۲۴^\circ = ۱۶۸^\circ$$

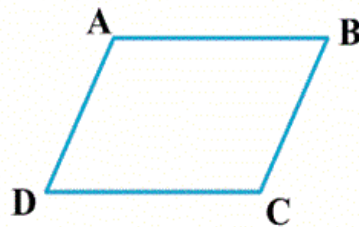
(آمار و احتمال - آمار توصیفی - صفحه‌های ۷۶ تا ۸۲)

۴ ✓

۳

۲

۱



با توجه به شکل بردارهای گزینه‌های ۱ و ۳ ضلع AB را در امتداد DC تصویر می‌کنند ولی چون AB بر DC منطبق نمی‌شود، پس نمی‌توانند جواب سؤال باشند.

تذکر: فقط در مورد خط‌های موازی است که هر بردار که ابتدا و انتهای آن روی دو خط باشد، یک بردار انتقال است. این موضوع در مورد پاره-خط صادق نیست. بردار انتقال پاره‌خط‌های موازی باید به گونه‌ای باشد که ابتدا و انتهای آنها بر هم منطبق باشد.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه ۴۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

مرکز دوران روی عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های واصل بین دو جفت نقاط متناظر می‌باشد. با توجه به فرض سؤال، نقاط B و D و همچنین نقاط A و C متناظر یکدیگر هستند، پس مرکز دوران محل تلاقی عمودمنصف‌های AC و BD می‌باشد.

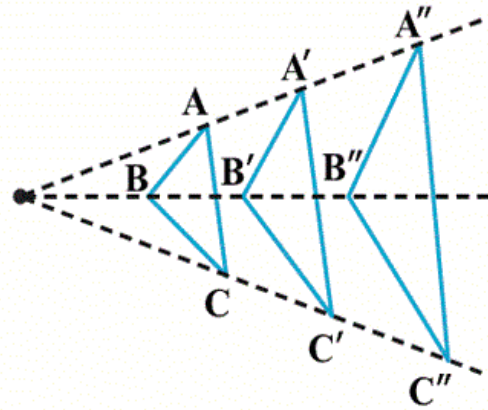
(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۲ تا ۴۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



به عنوان مثال دو شکل $A'B'C'$ و $A''B''C''$ مجانس شکل ABC به

مرکز O هستند. حال طبق تعریف تجانس داریم:

$$\begin{cases} A'B' = k \cdot AB \\ A''B'' = k' \cdot AB \end{cases} \Rightarrow \frac{A'B'}{A''B''} = \frac{k}{k'} \Rightarrow A'B' = \frac{k}{k'} A''B''$$

$$\text{و } B'C' = \frac{k}{k'} B''C'' \text{ و } A'C' = \frac{k}{k'} A''C''$$

یعنی شکل $A'B'C'$ مجانس شکل $A''B''C''$ با نسبت $\frac{k}{k'}$ است.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

 ۴

 ۳

 ۲

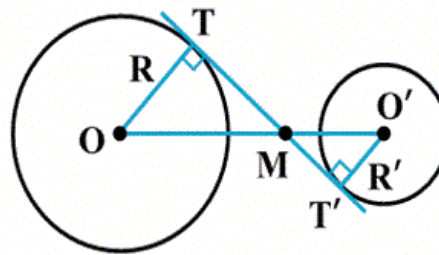
 ۱

می‌دانیم قدرمطلق نسبت تجانس دو دایره همان نسبت شعاع‌های آنها

$$\frac{R}{R'} = \frac{5}{3} \text{ می‌باشد. بنابراین:}$$

از طرفی دو مثلث قائم‌الزاویه MOT و $MO'T'$ به حالت دو زاویه

برابر متشابه‌اند. پس:



$$\begin{aligned} \frac{MO}{MO'} &= \frac{OT}{O'T'} \Rightarrow \frac{MO}{MO'} = \frac{R}{R'} \\ \Rightarrow \frac{MO}{MO'} &= \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{MO + MO'}{MO'} = \frac{5+3}{3} \\ \Rightarrow \frac{10}{MO'} &= \frac{8}{3} \Rightarrow MO' = \frac{15}{4} \end{aligned}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه ۵۰)

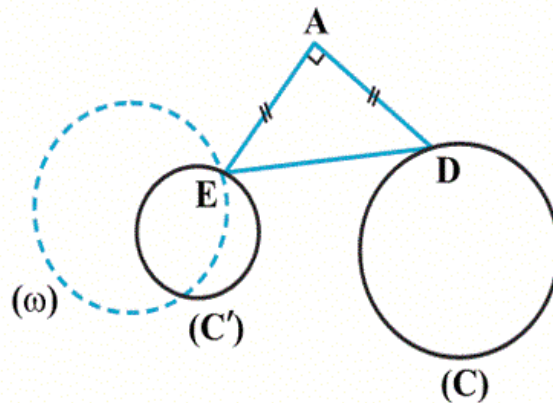
۴

۳

۲

۱ ✓

ابتدا مسأله را حل شده در نظر گرفته و فرض کنید دو نقطه D و E به ترتیب روی دو دایره C و C' طوری موجود هستند که مثلث ADE قائم الزاویه متساوی الساقین است. با توجه به شکل می توان گفت که در واقع D و E دوران یافته هم به زاویه 90° حول نقطه A هستند. با این توضیحات کافیست که نحوه ی پیدا کردن نقاط D و E را مشخص کنیم: دایره C را حول A به اندازه 90° دوران می دهیم تا دایره ω به دست آید، نقطه برخورد C' با ω را E می نامیم. دوران یافته E حول A و به زاویه 90° ، قطعاً نقطه D واقع بر دایره C است که با استفاده از تعریف دوران:



$$\left\{ \begin{array}{l} AE = AD \\ \hat{EAD} = 90^\circ \end{array} \right. \Rightarrow \Delta ADE \text{ قائم الزاویه متساوی الساقین است.}$$

(هندسه ۲- تبدیل های هندسی و کاربردها: صفحه های ۴۲ و ۴۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

گزینه «۱»: اگر یک تجانس طولیا باشد، آن گاه $|k| = 1$ است و به ازای $k = -1$ تجانس، تبدیل همانی نیست.

گزینه «۲»: دو شکل متشابه ممکن است متجانس یک دیگر نباشند.

گزینه «۳»: تبدیل انتقال در حالت کلی نقطه ثابت تبدیل ندارد.

گزینه «۴»: اگر یک تبدیل اندازه پاره خطها را حفظ کند، طولیاست و شکل را به یک شکل همنهشت دیگر تصویر می کند و اندازه زاویه و مساحت حفظ می شود.

(هندسه ۲- تبدیل های هندسی و کاربردها: صفحه های ۳۷ تا ۵۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ترکیب دو دوران با زاویه های α و β ، یک دوران با زاویه $\alpha + \beta$ است. بنابراین ترکیب دو دوران با زوایای 5° و 13° درجه یک دوران با زاویه 18° درجه می باشد.

(هندسه ۲- تبدیل های هندسی و کاربردها: صفحه های ۴۲ و ۴۳)

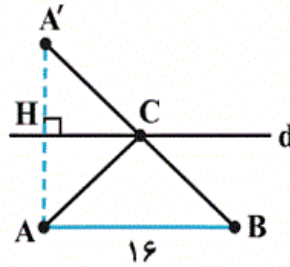
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

با توجه به مفروضات مسئله، ابتدا ارتفاع وارد بر ضلع AB را به دست می آوریم:



$$S_{ABC} = \frac{AB \times h}{2} \Rightarrow 48 = \frac{16 \times h}{2} \Rightarrow h = 6$$

پس رأس C روی خطی به فاصله ۶ واحد از ضلع AB قرار دارد. چون مقدار AB ثابت است و می خواهیم محیط ABC کم ترین مقدار ممکن باشد، مسأله تبدیل می شود به پیدا کردن رأس C روی خط d که مقدار $AC + BC$ کم ترین باشد. با توجه به مسئله هرون، قرینه A را نسبت به d پیدا می کنیم (نقطه A'). چون $AC = A'C$ ، بنابراین حداقل مقدار $AC + CB$ برابر است با:

$$AC + CB = A'C + BC = A'B$$

در مثلث قائم الزاویه $AA'B$ داریم:

$$A'B = \sqrt{AA'^2 + AB^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{400} = 20$$

پس حداقل محیط برابر است با: $16 + 20 = 36$

(هندسه ۲- تبدیل های هندسی و کاربردها- صفحه ۵۴)

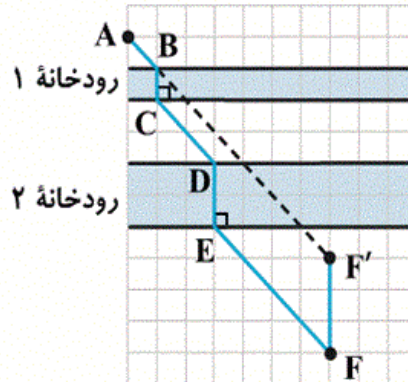
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر، نقطه F را یک بار با برداری عمود بر راستای رودخانه ۱ به اندازه یک واحد به بالا و یک بار با برداری عمود بر راستای رودخانه ۲ به اندازه دو واحد به بالا انتقال می‌دهیم که در این جا نقطه F' به دلیل موازی بودن راستای رودخانه‌ها، ۳ واحد به بالا منتقل می‌شود.



راستای AF' رودخانه ۱ را در نقطه B قطع می‌کند. از نقطه B به اندازه یک واحد پایین می‌آیم و نقطه حاصل را C می‌نامیم. از نقطه C موازی AF' حرکت می‌کنیم و به نقطه D می‌رسیم. سپس از نقطه D دو واحد به صورت عمودی پایین می‌آیم و به نقطه E می‌رسیم. مطابق شکل طول مسیر $ABCDEF$ برابر طول $AF' + FF'$ است. حال طبق شکل داریم:

$$\begin{cases} AF' = \sqrt{7^2 + 7^2} = 7\sqrt{2} \\ FF' = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{طول مسیر } ABCDEF = 3 + 7\sqrt{2}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه ۵۵)

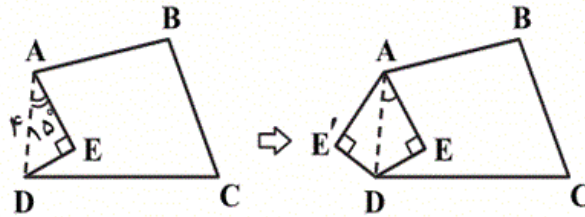
۴

۳

۲ ✓

۱

نقطه E را نسبت به پاره خط AD بازتاب می‌دهیم. اختلاف مساحت شکل ABCDE' با مساحت شکل ABCDE در مساحت چهارضلعی AEDE' است. پس کافی است مساحت AEDE' را بیابیم.



چهارضلعی AEDE' از دو مثلث هم‌نهشت AED و AE'D تشکیل شده است. پس مساحت AEDE' دو برابر مساحت مثلث AED است. در مثلث قائم‌الزاویه ADE یک زاویه 15° است، طبق کتاب درسی هندسهٔ دهم، طول ارتفاع وارد بر وتر در این مثلث $\frac{1}{4}$ طول وتر است. پس مساحت

این مثلث $2 = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{4}{4}$ و مساحت AEDE' برابر ۴ است.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۵۳ و ۵۴)

۴

۳

۲ ✓

۱