



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

هندسه ۲، دایره - ۲ سوال -

۱۳۳- در مثلث ABC، ضلع BC برابر $9\sqrt{3}$ و زاویه A برابر 60° است. شعاع دایره محیطی این مثلث کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $3\sqrt{3}$ (۳) ۹ (۴) $9\sqrt{3}$

۱۳۴- دو دایره به صورت مماس خارج در ربع اول طوری قرار دارند که هر کدام بر هر دو محور x ها و y ها مماس هستند. اگر شعاع دایره کوچکتر برابر ۱ باشد، شعاع دایره بزرگتر کدام است؟

- (۱) $1 + \sqrt{2}$ (۲) $3 + \sqrt{2}$ (۳) $1 + 2\sqrt{2}$ (۴) $3 + 2\sqrt{2}$

هندسه ۲، تبدیل های هندسی و کاربردها - ۳ سوال

۱۳۵- کدام تبدیل، طول پاره خطها را تغییر نمی دهد ولی ممکن است زوایای آنها را نسبت به محورهای مختصات تغییر دهد؟

- (۱) تجانس (۲) دوران
(۳) بازتاب مرکزی (۴) انتقال

۱۳۶- دوران یافته خط $3y = 2x + 6$ تحت دوران به مرکز $(0, 0)$ و زاویه 27° کدام است؟

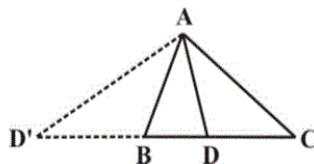
- (۱) $2y = 3x + 6$ (۲) $2y = -3x - 6$ (۳) $2y = -3x + 6$ (۴) $2y = 3x - 6$

۱۳۷- در تجانس به مرکز P و نسبت تجانس k، نقاط $A = (3, 3)$ و $B = (3, 7)$ ، به ترتیب بر نقاط $A' = (6, 0)$ و $B' = (6, 10)$ ، تصویر شده اند. مختصات مرکز تجانس کدام است؟

- (۱) $(0, 6)$ (۲) $(0, 4)$ (۳) $(0, 0)$ (۴) $(1, 5)$

هندسه ۲، استدلال در هندسه - ۲ سوال

۱۳۱- در شکل زیر $BC = 6$ ، $AC = 4$ و $AB = 3$ است. اگر AD و AD' به ترتیب نیمسازهای داخلی و خارجی رأس A باشند، طول پاره خط DD' کدام است؟ (D' روی امتداد ضلع BC قرار دارد.)



- (۱) ۱۸ (۲) $\frac{18}{7}$
(۳) $\frac{7}{18}$ (۴) $\frac{144}{7}$

۱۳۲- در مثلث ABC نقطه M روی BC طوری قرار دارد که $AB = MC$ است. کدام نتیجه گیری لزوماً درست است؟

- (۱) $AC > BM$ (۲) $AM < AC$
(۳) $AM > AB$ (۴) $AC > MC$

۱۳۸- در یک مکعب، قطر یک وجه با چند یال مکعب متناظر است؟

۸ (۴)

۴ (۳)

۱۰ (۲)

۶ (۱)

۱۳۹- خط l با فصل مشترک دو صفحه متقاطع P و P' موازی است. اگر صفحه Q شامل خط l بوده و به ترتیب با صفحه‌های P و P' در

خطوط متمایز Δ و Δ' مشترک باشد، وضعیت دو خط Δ و Δ' چگونه است؟

(۱) متناظرند.

(۲) متقاطع‌اند.

(۳) موازی‌اند.

(۴) نمی‌توان اظهار نظر قطعی کرد.

۱۴۰- کدام عبارت درست است؟

(۱) اگر خطی با صفحه‌ای موازی باشد، با هر خط در آن صفحه موازی است.

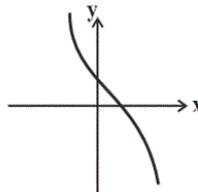
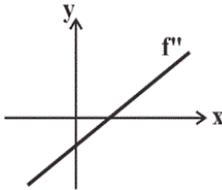
(۲) هرگاه دو خط از صفحه‌ای با دو خط از صفحه دیگر دو به دو موازی باشند، آن دو صفحه موازی‌اند.

(۳) اگر خطی با یکی از دو صفحه متقاطع موازی باشد، با فصل مشترک آن دو صفحه نیز موازی است.

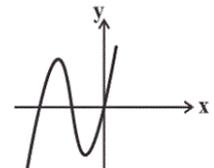
(۴) صفحه‌ای که با یکی از دو خط موازی، موازی باشد، با دیگری هم موازی است.

دیفرانسیل و انتگرال، کاربرد مشتق - سوال ۱۰ -

۸۱- شکل مقابل نمودار تابع f'' است. نمودار تابع f کدام می‌تواند باشد؟



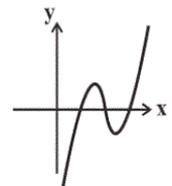
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

۸۲- در کدام تابع زیر $x=1$ مینیمم نسبی نیست؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است.

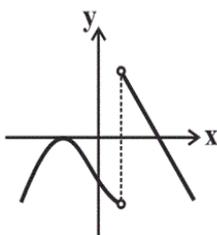
(۲) $y = (x-1)^2 [x]$

(۱) $y = \cos \pi [x]$

(۴) $y = x[-x]$

(۳) $y = \sqrt{x-[x]}$

۸۳- شکل مقابل نمودار مشتق تابع f را نشان می‌دهد $(D_f = \mathbb{R})$. نمودار تابع f دارای:



(۱) دو مینیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی است.

(۲) یک مینیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی است.

(۳) یک مینیمم نسبی و دو ماکزیمم نسبی است.

(۴) دو مینیمم نسبی و دو ماکزیمم نسبی است.

۸۴- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + 2 & ; x > 1 \\ m & ; x = 1 \\ x - 4 & ; x < 1 \end{cases}$ اکسترمم نسبی نداشته باشد، مجموعه مقادیر m کدام است؟

- (۱) $-3 \leq m \leq 2$
 (۲) $-4 < m < 2$
 (۳) $m \leq -3$ یا $m \geq 2$
 (۴) $m < -3$ یا $m > 2$

۸۵- اگر نقطه $A\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+3}$ باشد، طول و نوع نقطه اکسترمم نسبی دیگر تابع f کدام است؟

- (۱) ۱، ماکزیمم
 (۲) ۱، مینیمم
 (۳) ۳، ماکزیمم
 (۴) ۳، مینیمم

۸۶- خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^2 + bx^2 + cx + 20$ در نقطه $A(2, -26)$ روی آن، از نمودار عبور می کند. مقدار ماکزیمم نسبی نمودار f کدام است؟

- (۱) ۲۴
 (۲) ۲۶
 (۳) ۲۸
 (۴) ۳۰

۸۷- نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 16\sqrt{x}$ در اطراف نقطه عطفش، شبیه کدام نمودار است؟



۸۸- کدام گزینه در مورد نمودار تابع $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 5$ صحیح است؟

- (۱) دو ماکزیمم نسبی و یک مینیمم نسبی دارد.
 (۲) دو مینیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی دارد.
 (۳) یک ماکزیمم نسبی و دو عطف دارد.
 (۴) یک مینیمم نسبی و دو عطف دارد.

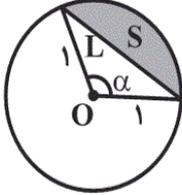
۸۹- ذره‌ای روی مسیر $y^4 + 4 = 5xy^3$ در حرکت است. وقتی ذره در نقطه‌ای به عرض $y=1$ قرار دارد، نسبت سرعت مؤلفه x آن

به سرعت مؤلفه y آن کدام است؟

$$\frac{24}{5} \quad (1) \qquad -\frac{24}{5} \quad (2)$$

$$-\frac{16}{5} \quad (3) \qquad -\frac{5}{16} \quad (4)$$

۹۰- در شکل زیر، آهنگ تغییرات مساحت ناحیه هاشور خورده نسبت به L کدام است؟



$$\frac{L^2}{\sqrt{4-(2-L)^2}} \quad (1) \qquad \frac{2L}{\sqrt{4-L^2}} \quad (2)$$

$$\frac{L^2}{2\sqrt{4-L^2}} \quad (3) \qquad \frac{L^2}{\sqrt{4-L^2}} \quad (4)$$

هندسه‌ی تحلیلی، دستگانه‌های معادلات خطی - ۱۰ سوال -

۱۱۱- ماتریس $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض است. اگر $AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \quad (1) \qquad \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3) \qquad \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \quad (4)$$

۱۱۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه سطر دوم ماتریس AA^* کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad (1) \qquad \begin{bmatrix} 0 & 14 & 5 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (3) \qquad \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

۱۱۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، درایه سطر دوم و ستون اول ماتریس A^{-1} کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (4) \qquad \frac{1}{2} \quad (3) \qquad -\frac{1}{2} \quad (2) \qquad -\frac{1}{4} \quad (1)$$

۱۱۴- اگر A و B ماتریس‌های مربعی از مرتبه ۲ باشند به طوری که $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ و $A + B = AB$ ، وارون ماتریس B کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2) \qquad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4) \qquad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

۱۱۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & a & -2 \\ 0 & 3 & b \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ و درایه واقع بر سطر سوم و ستون اول ماتریس A^{-1} برابر $\frac{1}{3}$ باشد، دترمینان ماتریس A کدام است؟

$$3 \quad (2) \qquad 2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{3} \quad (4) \qquad 6 \quad (3)$$

۱۱۶- اگر A یک ماتریس 3×3 و $|A| = \frac{1}{4}$ باشد، دترمینان وارون ماتریس $2A^2$ کدام است؟

$$2 \quad (2) \qquad 8 \quad (1)$$

$$\frac{1}{8} \quad (4) \qquad \frac{1}{2} \quad (3)$$

۱۱۷- اگر ماتریس‌های وارون پذیر A و B به ترتیب متقارن و پادمتقارن باشند، ماتریس $(BA)^t (AB)^{-1}$ همواره کدام است؟

$$-A \quad (2) \qquad -B \quad (1)$$

$$I \quad (4) \qquad -I \quad (3)$$

۱۱۸- اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ معکوس ماتریس A باشد، دترمینان A^* (ماتریس الحاقی A) کدام است؟

$$\frac{1}{81} \quad (2) \qquad \frac{1}{9} \quad (1)$$

$$\frac{1}{3} \quad (4) \qquad \frac{1}{27} \quad (3)$$

۱۱۹- $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & m \\ 2m & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ یک ماتریس وارون پذیر است. اگر در ماتریس A^{-1} ، درایه واقع در سطر سوم و ستون اول با درایه واقع در

سطر دوم و ستون سوم برابر باشد، m کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۱۲۰- مقدار x در معادله $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 5 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) ۴
(۴) $\frac{1}{4}$

ریاضیات گسسته، احتمال - ۱۰ سوال -

۱۲۱- تاسی را دو بار پرتاب می‌کنیم. با چه احتمالی حاصل ضرب اعداد رو شده مضرب ۵ است؟

- (۱) $\frac{5}{11}$
(۲) $\frac{5}{36}$
(۳) $\frac{12}{36}$
(۴) $\frac{11}{36}$

۱۲۲- در پرتاب یک تاس، احتمال ظاهر شدن هر عدد با توان دوم آن عدد متناسب است. احتمال آن که عدد رو شده مضرب ۳ نباشد

کدام است؟

- (۱) $\frac{55}{91}$
(۲) $\frac{46}{91}$
(۳) $\frac{4}{7}$
(۴) $\frac{4}{13}$

۱۲۳- اگر A و B دو پیشامد ناسازگار از یک فضای نمونه‌ای باشند، احتمال پیشامد $A' \Delta B'$ همواره کدام است؟

- (۱) $P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
(۲) $P(A) + P(B)$
(۳) $P(A - B)$
(۴) $P(A \cup B) - P(A)$

۱۲۴- عدد m را به تصادف از بازه‌ی $[-6, 6]$ انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که عبارت $x^2 - mx + m$ به ازای هر مقدار

حقیقی x ، مثبت باشد؟

$$(1) \quad \frac{2}{3}$$

$$(2) \quad \frac{1}{2}$$

$$(3) \quad \frac{1}{3}$$

$$(4) \quad \frac{1}{4}$$

۱۲۵- از بازه‌ی $[0, 4]$ دو عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که مجموع این دو عدد بزرگ‌تر از ۲ شود، چقدر است؟

$$(1) \quad \frac{1}{2}$$

$$(2) \quad \frac{3}{4}$$

$$(3) \quad \frac{7}{8}$$

$$(4) \quad \frac{4}{7}$$

۱۲۶- عددی به تصادف از بین اعداد $1, 2, \dots, 99$ انتخاب می‌شود. اگر عدد انتخابی مضرب ۳ باشد، احتمال آن که مضرب ۴ نباشد، کدام

است؟

$$(1) \quad \frac{8}{11}$$

$$(2) \quad \frac{8}{33}$$

$$(3) \quad \frac{25}{33}$$

$$(4) \quad \frac{3}{4}$$

۱۲۷- سه فرد A ، B و C به سوی هدفی شلیک می‌کنند. اگر احتمال زدن هدف توسط آن‌ها به ترتیب $\frac{2}{3}$ ، $\frac{3}{4}$ و $\frac{4}{5}$ باشد، احتمال آن

که فقط یکی از آن‌ها هدف را بزند، کدام است؟

$$(1) \quad \frac{2}{5}$$

$$(2) \quad \frac{3}{20}$$

$$(3) \quad \frac{1}{10}$$

$$(4) \quad \frac{1}{60}$$

۱۲۸- اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند به طوری که $P(A|B) = \frac{1}{4}$ و $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ ، حاصل $P(A' \cap B)$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{7}{20}$ (۳)

$\frac{7}{15}$ (۲)

$\frac{7}{60}$ (۱)

۱۲۹- سکه‌ای همگن را ۳ بار می‌اندازیم. اگر A پیشامد رخ دادن «رو» در هر دو پرتاب اول، B پیشامد رخ دادن «پشت» در پرتاب سوم

و C پیشامد رخ دادن دقیقاً دو «پشت» در سه پرتاب باشد، آنگاه:

(۱) A و B مستقل‌اند ولی C وابسته‌اند. (۲) A و B مستقل‌اند و C نیز مستقل‌اند.

(۳) A و B وابسته‌اند اما C مستقل‌اند. (۴) A و B وابسته‌اند و C نیز وابسته‌اند.

۱۳۰- در یک خانواده‌ی ۴ فرزند اگر جنسیت هر چهار فرزند یکسان نباشد، احتمال آن که تعداد دخترهای این خانواده بیش‌تر از

تعداد پسرها باشد چقدر است؟

$\frac{2}{7}$ (۴)

$\frac{3}{8}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{5}{14}$ (۱)

ریاضی پایه ، تابع - ۲ سوال

۹۱- معادله $|x^2 - 1| = \frac{3}{2}|x|$ چند جواب دارد؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۹۲- تابع متناوب f با دامنه \mathbb{R} و دوره تناوب ۴، در فاصله $[1, 5]$ به صورت $f(x) = \begin{cases} 2 \sin \frac{\pi}{2} x & ; 1 \leq x < 3 \\ -2x + 4 & ; 3 \leq x < 5 \end{cases}$ تعریف شده‌است. مقدار $f(102/5)$ کدام است؟

$-\sqrt{2}$ (۴)

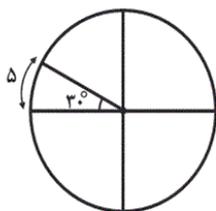
$\sqrt{2}$ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

ریاضی پایه ، مثلثات - ۱۸ سوال -

۹۳- مساحت دایره مقابل کدام است؟



$\frac{800}{\pi}$ (۲)

$\frac{620}{\pi}$ (۴)

$\frac{900}{\pi}$ (۱)

$\frac{700}{\pi}$ (۳)

۹۴- مقدار $\sin 45^\circ$ با کدام گزینه زیر برابر نیست؟

- (۱) $\cos 1^\circ$
 (۲) $-\sin 269^\circ$
 (۳) $\sin 631^\circ$
 (۴) $\cos\left(-\frac{\pi}{180}\right)$

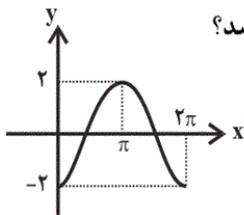
۹۵- مقدار عبارت $\frac{2\sin 20^\circ + \cos 29^\circ}{\sin 16^\circ + 2\cos 7^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$
 (۲) $\frac{2}{3}$
 (۳) -3
 (۴) 1

۹۶- دوره تناوب تابع $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\cos^3 x + \cos^3\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\sin x$ کدام است؟

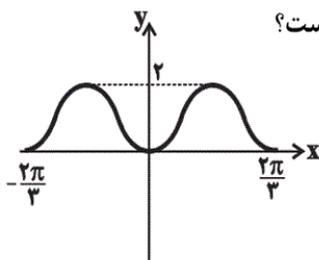
- (۱) $\frac{\pi}{4}$
 (۲) $\frac{\pi}{2}$
 (۳) π
 (۴) 2π

۹۷- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $f(x) = a\cos bx$ است. مقدار $a + b$ کدام می‌تواند باشد؟



- (۱) -2
 (۲) 3
 (۳) 2
 (۴) -3

۹۸- بخشی از نمودار تابع $f(x) = 1 + a\cos bx$ در شکل زیر رسم شده است. حاصل $f\left(\frac{15\pi}{6}\right)$ کدام است؟



- (۱) -1
 (۲) 2
 (۳) 1
 (۴) -2

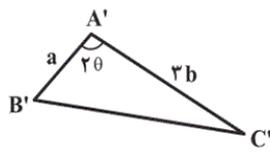
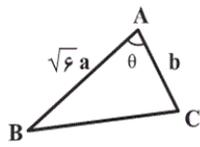
۹۹- اگر $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$ باشد، نمودار $y = 4\sin ax$ در بازه $(0, 2\pi)$ ، حداکثر چند نقطه برخورد با خط $y = a$ دارد؟

- (۱) 8
 (۲) 7
 (۳) 6
 (۴) 5

۱۰۰- شخصی با قد $1/80$ متر از روی پشت‌بام ساختمانی به ارتفاع 75 متر بالگردی را که از روبرو به آن شخص در حال نزدیک شدن است، می‌بیند. اگر زاویه دید شخص نسبت به سطح افق 30° درجه و فاصله بالگرد تا شخص در راستای زاویه دید شخص در حدود $440/4$ متر باشد، بالگرد در چند متری از سطح زمین قرار دارد؟

- (۱) $296/8$
 (۲) $295/2$
 (۳) 297
 (۴) 222

۱۰۱- اگر $\tan \theta = \sqrt{7}$ باشد، نسبت مساحت مثلث $A'B'C'$ به مساحت مثلث ABC کدام است؟



(۲) $\sqrt{3}$

(۴) ۲

(۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۳) ۳

۱۰۲- اگر $\sin x \cos y = \frac{5}{6}$ و $\cos x \sin y = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $x - y$ کدام می‌تواند باشد؟

(۴) $\frac{\pi}{2}$

(۳) $\frac{5\pi}{3}$

(۲) $\frac{\pi}{3}$

(۱) $\frac{\pi}{6}$

۱۰۳- مقدار عبارت $A = \left(1 + \cos \frac{\pi}{8}\right) \left(1 + \cos \frac{7\pi}{8}\right) \left(1 + \cos \frac{9\pi}{8}\right) \left(1 + \cos \frac{5\pi}{8}\right)$ کدام است؟

(۴) $\frac{1}{8}$

(۳) $\frac{1}{12}$

(۲) $\frac{1}{16}$

(۱) $\frac{1}{4}$

۱۰۴- حاصل عبارت $\frac{1}{2} + 2 \cos 2x \cdot \cos x$ به ازای $x = 20^\circ$ ، کدام است؟

(۴) $2 \cos 10^\circ$

(۳) $\sin 80^\circ$

(۲) $2 \sin^2 80^\circ$

(۱) $2 \cos^2 80^\circ$

۱۰۵- اگر $\tan(\alpha + \beta) = 2 - \sqrt{3}$ و $\tan(2\alpha - \beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ باشد، مقدار زاویه α کدام می‌تواند باشد؟

(۴) $\frac{\pi}{6}$

(۳) $-\frac{5\pi}{12}$

(۲) $-\frac{\pi}{4}$

(۱) $\frac{7\pi}{12}$

۱۰۶- جواب کلی معادله $\sqrt{2} |\sin x| - 1 = 0$ (کدام است؟) $(k \in \mathbb{Z})$

(۴) $k\pi - \frac{\pi}{4}$

(۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

(۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

(۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

۱۰۷- مجموع جواب‌های معادله $\frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

(۴) صفر

(۳) 2π

(۲) $\frac{3\pi}{2}$

(۱) π

۱۰۸- جواب کلی معادله $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{4} \cos 4x$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

(۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{9}$

(۳) $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{9}$

(۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{12}$

(۱) $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}$

۱۰۹- برد تابع $y = \cos^{-1}(-\sqrt{x})$ کدام است؟

(۴) $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

(۳) $[-\frac{\pi}{2}, 0]$

(۲) $[0, \frac{\pi}{2}]$

(۱) $[0, \pi)$

۱۱۰- حاصل $\sin^2\left(\cos^{-1}\frac{1}{5}\right)$ کدام است؟

$$\frac{1}{10} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{5} \quad (۳)$$

$$\frac{2}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{5} \quad (۱)$$

شعاع دایره‌ای که کمان درخور زاویه 60° روبرو به پاره‌خط BC ، بخشی از

آن است همان شعاع دایره محیطی مثلث است.

$$R = \frac{BC}{2 \sin \hat{A}} \Rightarrow R = \frac{BC}{2 \sin 60^\circ} = \frac{9\sqrt{3}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = 9$$

(هندسه ۲ - دایره؛ صفحه‌های ۶۱ تا ۶۵)

۴

۳

۲

۱

دوایری که در ربع اول بر هر دو محور مماس باشند مرکزهای آنها روی خط $y = x$ قرار دارند و همچنین شعاع آنها برابر طول (یا عرض) مرکز آنها است. اگر O_1 مرکز دایره کوچکتر باشد، آنگاه با توجه به فرض $O_1 = (1, 1)$ و $R_1 = 1$. اگر O_2 مرکز دایره بزرگتر باشد آنگاه با توجه به مماس خارج بودن دو دایره داریم:

$$|O_1 O_2| = R_1 + R_2 \Rightarrow \sqrt{(R_2 - 1)^2 + (R_2 - 1)^2} = 1 + R_2$$

$$(R_2 - 1)\sqrt{2} = R_2 + 1 \Rightarrow (\sqrt{2} - 1)R_2 = \sqrt{2} + 1$$

$$\Rightarrow R_2 = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = (\sqrt{2} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه ۵۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

تجانس، طول پاره‌خطها را به نسبت قدرمطلق ضریب تجانس، تغییر می‌دهد. در بازتاب مرکزی و انتقال، شیب پاره‌خطها ثابت می‌ماند، بنابراین زاویه آنها نسبت به محورهای مختصات تغییر نمی‌کند.

(هندسه ۲ - تبدیلها: صفحه‌های ۹۱ تا ۱۱۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$3y = 2x + 6 \Rightarrow A = (0, 2), B = (-3, 0)$$

$$\xrightarrow[\text{T}(x,y)=(y,-x)]{\alpha=27^\circ} A' = (2, 0), B' = (0, 3)$$

حال کافی است معادله خط گذرنده از نقاط A' و B' را بنویسیم.

$$y - 0 = \frac{3 - 0}{0 - 2}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{3}{2}(x - 2) \Rightarrow 2y = -3x + 6$$

(هندسه ۲ - تبدیل‌ها: صفحه‌های ۱۰۷ و ۱۱۹ تا ۱۲۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

(مهرداد مولودی)

۱۳۷ -

چون در هر تجانس با نسبت تجانس $k (k \neq 1)$ ، خطوطی که نقطه‌های نظیر

را به هم وصل می‌کنند، در مرکز تجانس هم‌مرس‌اند، لذا مرکز تجانس، نقطه

تقاطع خط گذرنده از نقاط A و A' با خط گذرنده از نقاط B و B' است.

$$A \text{ و } A' : \frac{y - 3}{x - 3} = \frac{0 - 3}{6 - 3}$$

$$\Rightarrow x + y - 6 = 0$$

$$B \text{ و } B' : \frac{y - 7}{x - 3} = \frac{10 - 7}{6 - 3}$$

$$\Rightarrow x - y + 4 = 0$$

$$\begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = 5 \Rightarrow P = (1, 5)$$

(هندسه ۲ - تبدیل‌ها: صفحه ۱۱۶)

۴ ✓

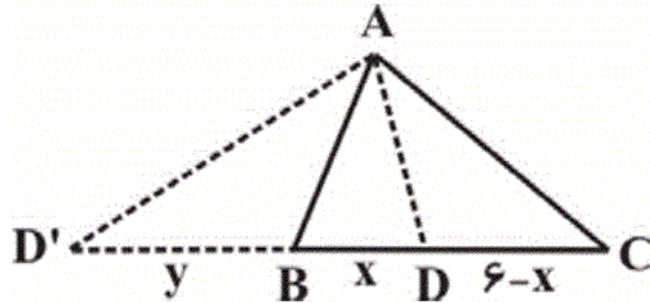
۳

۲

۱

$$(نیمساز داخلی) AD : \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{x}{6-x} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 4x = 18 - 3x \Rightarrow x = \frac{18}{7}$$



$$(نیمساز خارجی) AD' : \frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{y}{y+6} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 4y = 3y + 18 \Rightarrow y = 18$$

$$\Rightarrow DD' = x + y = \frac{18}{7} + 18 = \frac{144}{7}$$

(هندسه ۲ - استرلال در هندسه: صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

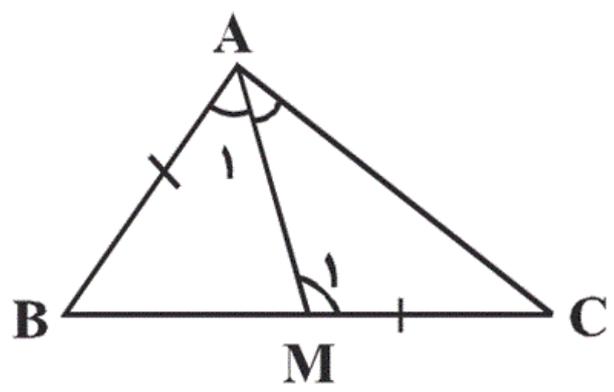
۴ ✓

۳

۲

۱

زاویه خارجی: $\hat{M}_1 = \hat{A}_1 + \hat{B} \Rightarrow \hat{M}_1 > \hat{A}_1$



در دو مثلث AMC و AMB طبق قضیه لولا داریم:

$$\left. \begin{array}{l} AB = MC \\ AM = AM \\ \hat{M}_1 > \hat{A}_1 \end{array} \right\} \Rightarrow AC > BM$$

(هندسه ۲ - استرلا در هندسه: صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۴

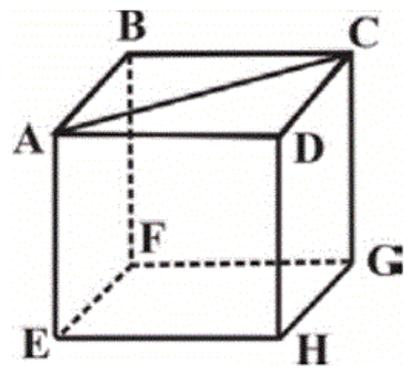
۳

۲

۱ ✓

مطابق شکل، قطر AC با یال‌های BF، DH، EF، FG، GH و

EH متناظر است.



(هندسه ۲ - هندسه در فضا: صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۳۵)

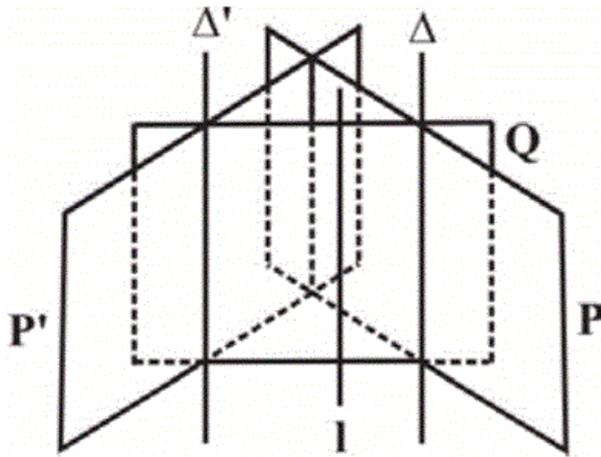
۴

۳

۲

۱ ✓

چون خط l با فصل مشترک دو صفحه P و P' موازی است، لذا با هر دو صفحه P و P' موازی خواهد بود (زیرا خطی که با یکی از خطوط صفحه‌ای موازی باشد، با آن صفحه موازی است). اگر صفحه Q شامل خط l بوده و دو صفحه P و P' را به ترتیب در خطوط Δ و Δ' قطع کند،
 آنگاه: $l \parallel \Delta$ و $l \parallel \Delta'$ و در نتیجه $\Delta \parallel \Delta'$.



(هندسه ۲ - هندسه در فضا: صفحه‌های ۱۳۹ تا ۱۴۷)

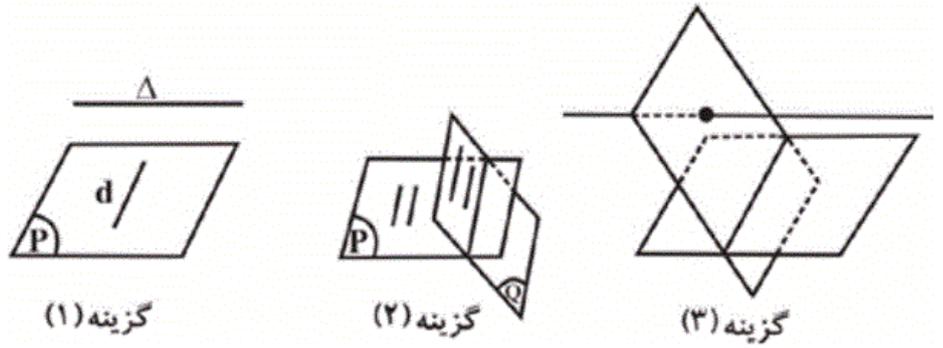
۴

۳

۲

۱

برای رد گزینه‌های ۱، ۲ و ۳، مثال‌های نقض زیر آورده شده است.



(هندسه ۲ - هندسه در فضا: صفحه‌های ۱۳۹ تا ۱۴۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(عرفان صادقی)

۸۱- گزینه ۳ صحیح است.

با توجه به نمودار f'' ، جواب معادله $f'' = 0$ مثبت است. بنابراین باید طول نقطه عطف f مثبت باشد. پس گزینه «۱» نادرست است.

هم‌چنین بعد از نقطه عطف، $f'' > 0$ و تقعر f رو به بالاست و قبل از آن، $f'' < 0$ و تقعر f رو به پایین است. بنابراین گزینه‌های «۲» و «۴» نیز

نادرست و گزینه «۳» پاسخ صحیح خواهد بود.

(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۸۱ و ۱۸۲)

 ۴

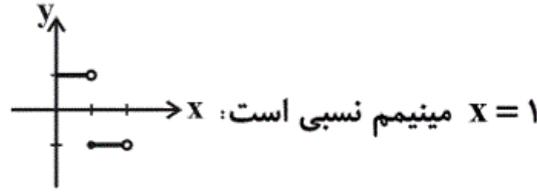
 ۳

 ۲

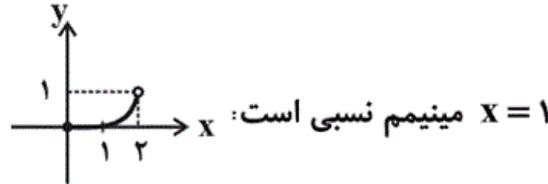
 ۱

(ظاهر) (دستانی)

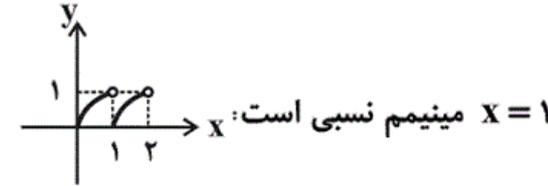
$$y = \cos \pi [x] \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x < 2 \Rightarrow y = \cos \pi = -1 \\ 0 \leq x < 1 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$



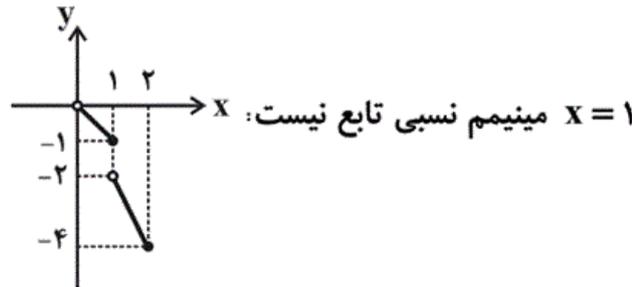
$$y = (x-1)^2 [x] \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x < 2 \Rightarrow y = (x-1)^2 \\ 0 \leq x < 1 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$



$$y = \sqrt{x - [x]} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x < 2 \Rightarrow y = \sqrt{x-1} \\ 0 \leq x < 1 \Rightarrow y = \sqrt{x} \end{cases}$$



$$y = x[-x] \Rightarrow \begin{cases} 1 < x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq -x < -1 \Rightarrow y = -2x \\ 0 < x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x < 0 \Rightarrow y = -x \end{cases}$$



بنابراین گزینه «۴» صحیح است.

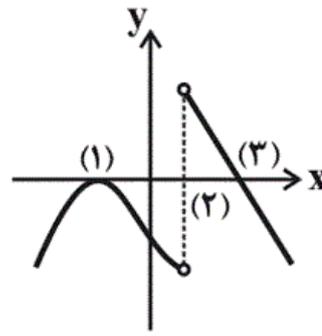
(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۸۴ و ۱۸۵)

۴ ✓

۳

۲

۱



در نقطه (۱) مشتق تابع صفر می‌شود اما تغییر علامت نمی‌دهد، پس اکسترمم نیست.

در نقطه (۲) مشتق به یک باره از منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهد، پس این نقطه مینیمم نسبی و همین‌طور گوشه‌ای است.

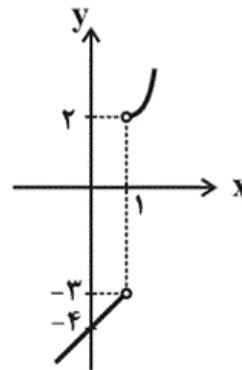
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

نمودار تابع f بدون در نظر گرفتن نقطه $(1, m)$ به صورت زیر است:



حال اگر نقطه $(1, m)$ بالاتر از نقطه $(1, 2)$ باشد، تابع ماکزیمم نسبی و اگر پایین‌تر از نقطه $(1, -3)$ باشد، مینیمم نسبی دارد. اما اگر نقطه $(1, m)$ بین این دو نقطه یا روی یکی از آنها باشد، تابع اکسترمم نسبی ندارد.

$$\Rightarrow -3 \leq m \leq 2$$

(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۸۴ و ۱۸۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$f'(x) = \frac{a(x^2 + 3) - 2x(ax + b)}{(x^2 + 3)^2}$$

چون $x = -1$ ، طول نقطهٔ اکسترمم نسبی f است، پس f' در این نقطه صفر است.

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow 4a - 2a + 2b = 0 \Rightarrow a + b = 0 \quad (1)$$

$$f(-1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-a + b}{1 + 3} = \frac{1}{2} \Rightarrow -a + b = 2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} b = 1, a = -1$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-(x^2 + 3) - 2x(-x + 1)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x^2 + 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1, 3$$

f' را تعیین علامت می‌کنیم:

x		-1		3	
f'	+	o	-	o	+
f	↗	max نسبی	↘	min نسبی	↗

پس طول نقطهٔ اکسترمم نسبی دیگر f ، $x = 3$ و نوع آن مینیمم است.

(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۸۴ تا ۱۸۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c \Rightarrow f''(x) = 6x + 2b$$

نقطه A، نقطه عطف تابع f است، پس:

$$f''(2) = 0 \Rightarrow 12 + 2b = 0 \Rightarrow b = -6$$

$$f(2) = 2^3 - 6(2)^2 + 2c + 20 = -26$$

$$\Rightarrow 8 - 24 + 2c + 40 = 0 \Rightarrow c = -15$$

پس ضابطه f' به صورت زیر در می آید:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15 = 3(x^2 - 4x - 5) = 3(x+1)(x-5)$$

f' را تعیین علامت می کنیم:

		-1		5	
f'	+	0	-	0	+
f	↗		↘		↗
		max		min	

مقدار ماکزیمم نسبی f برابر است با:

$$f(-1) = 28$$

(دیفرانسیل: صفحه های ۱۸۲ تا ۱۸۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 16\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{8}{\sqrt{x}} \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{x\sqrt{x}}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 4$$

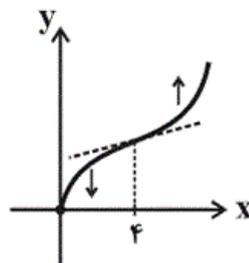
کافی است مشتق دوم را تعیین علامت کنیم:

x	0	4	$+\infty$
f''	-	0	+
f	∩	$f'(4) > 0$	∪

حال برای شیب خط مماس در نقطه عطف داریم:

$$m = f'(4) = \frac{1}{2}(4) + \frac{8}{\sqrt{4}} = 6$$

بنابراین نمودار آن در اطراف $x = 4$ ، به صورت زیر خواهد بود:



(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۸۲ و ۱۸۳)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 5 \Rightarrow f'(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x = 0$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x(x-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$f''(x) = -3x^2 + 8x - 4 = -(3x-2)(x-2)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = 2 \end{cases}$$

با تعیین علامت f' و f'' داریم:

x		0		$\frac{2}{3}$		2	
f''	-	o	-	o	+	o	-
f'	+	o	-	o	-	o	-
f	↗	o	↘	o	↘	o	↘
		max نسبی		عطف		عطف	

بنابراین نمودار تابع f دارای یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ عطف است.

(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۸۲ تا ۱۸۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(فریدون ساعتی)

-۸۹

$$y^4 + 4 = \Delta xy^4 \xrightarrow{y=1} (1)^4 + 4 = \Delta x(1)^4 \Rightarrow \Delta = \Delta x \Rightarrow x=1$$

$$y^4 + 4 = \Delta xy^4 \xrightarrow{\text{از طرفین نسبت به } t} 4y_t^3 + 0 = \Delta x_t' y^4 + \Delta x(4y_t^3 y_t')$$

مشتق می‌گیریم

$$\Rightarrow 4y_t'(1)^3 + 0 = \Delta x_t'(1)^4 + \Delta(1)(4y_t'(1)^3)$$

$$\Rightarrow 4y_t' = \Delta x_t' + 20y_t' \Rightarrow -16y_t' = \Delta x_t' \Rightarrow \frac{x_t'}{y_t'} = \frac{-16}{5}$$

(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۹۲ تا ۱۹۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(هاری پلاور)

$$L^2 = 1^2 + 1^2 - 2(1)(1)\cos\alpha \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2-L^2}{2}\right)$$

$$S = \text{مساحت مثلث} - \text{مساحت قطاع} = \pi(1)^2 \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) - \frac{1}{2}(1)(1)\sin\alpha$$

$$= \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin\alpha}{2}$$

$$\frac{dS}{dL} = \frac{dS}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dL} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos\alpha}{2}\right) \left(\frac{\frac{2L}{2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{2-L^2}{2}\right)^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{L^2}{2}\right) \frac{2L}{\sqrt{4 - (2-L^2)^2}} = \frac{L^3}{2\sqrt{4L^2 - L^4}} = \frac{L^2}{2\sqrt{4-L^2}}$$

(دیفرانسیل: صفحه‌های ۱۹۲ تا ۱۹۷)

۴

۳✓

۲

۱

(ممدابراهیم کیتی زاده)

-۱۱۱

طرفین رابطه $AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ را از طرف راست در B^{-1} ضرب می‌کنیم،

$$A \underbrace{BB^{-1}}_I = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} B^{-1} \quad (1)$$

داریم:

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} B^* = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه معادلات قطبی: صفحه‌های ۱۳۲ تا ۱۳۴)

۴

۳

۲✓

۱

اگر A ماتریس مربعی از مرتبه ۳ باشد، آنگاه: $AA^* = |A| I$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 16 - 12 + 2 = 6 \Rightarrow AA^* = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

(هندسهٔ تحلیلی - دستگاه معادلات قطبی: صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۶)

۴

۳

۲

۱

اگر A یک ماتریس وارون‌پذیر باشد، درایهٔ سطر i ام و ستون j ام

ماتریس A^{-1} برابر است با: $\frac{1}{|A|} A_{ji}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

بسط بر حسب سطر دوم $\rightarrow |A| = 0 + 2(4 + 6) - 4(3 - 2) = 16$

A^{-1} درایهٔ سطر دوم و ستون اول $= \frac{1}{16} A_{12}$

$$= \frac{1}{16} (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}$$

(هندسهٔ تحلیلی - دستگاه معادلات قطبی: صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۷)

۴

۳

۲

۱

(مهرداد ملونری)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -2 - (-1) = -1 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A + B = AB \Rightarrow A = (A - I)B \Rightarrow A^{-1}A = A^{-1}(A - I)B$$

$$\Rightarrow I = (I - A^{-1})B \xrightarrow{B^{-1}B=I}$$

$$B^{-1} = I - A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه معادلات خطی: صفحه ۱۳۷)

۴

۳✓

۲

۱

(رامین فسروی)

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$A^{-1} \text{ درایه سطر سوم و ستون اول} = \frac{1}{|A|} A_{13} = \frac{1}{|A|} \times 3 = \frac{1}{2}$$

۴

۳✓

۲

۱

(مسمن فاطمی)

$$|(2A^2)^{-1}| = \frac{1}{|2A^2|} = \frac{1}{2^3 |A|^2} = \frac{1}{8 \times (\frac{1}{4})^2} = 2$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه معادلات خطی: صفحه ۱۳۷)

۴

۳

۲✓

۱

(مهدا ابراهیم کیتی زاده)

$$\begin{aligned} A^t &= A, B^t = -B \Rightarrow (AB)^{-1}(BA)^t \\ &= (B^{-1}A^{-1})(A^tB^t) = (B^{-1}A^{-1})(A(-B)) \\ &= -B^{-1} \underbrace{(A^{-1}A)}_I B = -B^{-1}B = -I \end{aligned}$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه معادلات خطی: صفحه ۱۳۷)

۴

۳✓

۲

۱

(عمید کرویسی)

اگر ماتریس $A_{3 \times 3}$ وارون پذیر باشد، دترمینان ماتریس A^* برابر است با:

$$|A^*| = |A|^2$$

طبق فرض داریم:

$$|A^{-1}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{ساروس}} (6 + 4 + 0) - (12 + 0 + 1) = -3$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \Rightarrow |A| = -\frac{1}{3}$$

$$|A^*| = |A|^2 = \frac{1}{9}$$

(هندسهٔ تحلیلی - دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۷)

۴

۳

۲

۱

(مهمعلی نادرپور)

فرض کنیم $A^{-1} = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ و A_{ij} برابر $-ij$ امین همسازۀ

ماتریس A باشد، داریم:

$$b_{ij} = \frac{1}{|A|} A_{ji}$$

$$b_{31} = b_{23} \Rightarrow \frac{1}{|A|} A_{13} = \frac{1}{|A|} A_{32}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2m & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & m \\ 2m & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow 4m = 2 + 2m^2$$

$$\Rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow (m-1)^2 = 0 \Rightarrow m = 1$$

(هندسهٔ تحلیلی - دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۶)

۴

۳

۲

۱

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [x \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = [x \quad 1] \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} = 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه معادلات فخطی: صفحه‌های ۱۳۲ تا ۱۳۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(ممدصارق نیک‌کار)

با توجه به صورت سؤال، باید در پرتاب دو تاس حداقل یک عدد ۵ ظاهر

شود.

کل حالات

$$n(A) = \overset{\uparrow}{6} \times 6 - \underset{\uparrow}{5} \times 5 = 11 \Rightarrow P(A) = \frac{11}{36}$$

۵ ظاهر نشود.

(ببرواهمال - احتمال: صفحه‌های ۸۲ تا ۸۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر $P(1) = x$ باشد آنگاه داریم:

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

$$\Rightarrow x + 4x + 9x + 16x + 25x + 36x = 1$$

$$\Rightarrow 91x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{91}$$

$$P(\text{عدد رو شده مضرب ۳ نباشد}) = P(1) + P(2) + P(4) + P(5)$$

$$= x + 4x + 16x + 25x = 46x = \frac{46}{91}$$

(پیرواحتمال - احتمال: صفحه‌های ۹۵ تا ۱۰۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

چون A و B ناسازگارند، پس: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

$$P(A' \Delta B') = P(A \Delta B) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - \overbrace{2P(A \cap B)}^0$$

$$\Rightarrow P(A' \Delta B') = P(A) + P(B)$$

نکته: $A' \Delta B' = A \Delta B$

(پیرواحتمال - احتمال: صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۲۱)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4m < 0 \Rightarrow m(m-4) < 0 \Rightarrow 0 < m < 4 \\ a = 1 > 0 \end{cases}$$

$$P(A) = \frac{I_A}{I_S} = \frac{4-0}{6-(-6)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

(پیروا احتمال - احتمال: صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۹)

۴

۳ ✓

۲

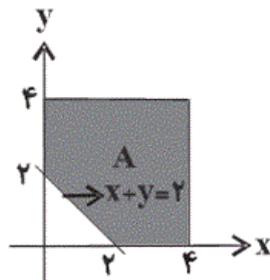
۱

(ملک مفسر خرداری)

۱۲۵ -

فضای نمونه‌ای: $S = \{(x, y) \mid 0 \leq x, y \leq 4\}$

پیشامد مطلوب: $A = \{(x, y) \mid x + y > 2, 0 \leq x, y \leq 4\}$



مطابق شکل، فضای نمونه‌ای مربعی به طول ضلع

۴ است. پیشامد مطلوب به صورت هاشور خورده

نمایش داده شده است. داریم:

$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{4 \times 4 - \frac{1}{2}(2 \times 2)}{4 \times 4} = \frac{16 - 2}{16} = \frac{7}{8}$$

(پیروا احتمال - احتمال: صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۹)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$S = \{1, 2, 3, \dots, 99\}$$

$$\text{مضرب } 3: A = \{3, 6, 9, \dots, 99\}$$

$$\text{مضرب } 4: B = \{4, 8, 12, \dots, 96\}$$

باید احتمال $P(B' | A)$ را بیابیم. داریم:

$$P(B' | A) = \frac{P(A \cap B')}{P(A)} = \frac{P(A - B)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= 1 - \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = 1 - \frac{\left[\frac{99}{12} \right]}{\left[\frac{99}{3} \right]} = 1 - \frac{8}{33} = \frac{25}{33}$$

(ریاضیات گسسته - احتمال: صفحه‌های ۸۱ و ۸۲)

۴

۳

۲

۱

احتمال اینکه فقط یکی از ۳ نفر، هدف را بزند برابر است با:

$$P(A \cap B' \cap C') + P(A' \cap B \cap C') + P(A' \cap B' \cap C)$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{4}{5}$$

$$= \frac{2+3+4}{60} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20}$$

(ریاضیات گسسته - احتمال: صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

 ۴

 ۳

 ۲ ✓

 ۱

دو پیشامد **A** و **B** مستقل از یکدیگر هستند پس داریم:

$$P(A) = P(A | B) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{5} \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} + P(B) - \frac{1}{4}P(B) = \frac{3}{5} \Rightarrow P(B) = \frac{7}{15}$$

پیشامدهای **A** و **B** مستقل از یکدیگرند، پس دو پیشامد **A'** و **B** نیز

مستقل از هم هستند و داریم:

$$P(A' \cap B) = P(A').P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{7}{15} = \frac{7}{20}$$

(ریاضیات گسسته - احتمال: صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{\binom{3}{2}}{2^3} = \frac{3}{8}$$

$$P(B \cap C) = \frac{\binom{2}{1}}{2^3} = \frac{1}{4} \neq P(B).P(C)$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = P(A).P(B)$$

A و B مستقل اند ولی B و C وابسته اند.

(ریاضیات گسسته - احتمال: صفحه‌های ۸۳ تا ۸۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

A: پیشامد آن که جنسیت هر چهار فرزند یکسان نباشد.

B: پیشامد آن که تعداد دخترها بیش تر از تعداد پسرها باشد. (حداقل ۳ دختر)

$$P(B|A) = \frac{n(B \cap A)}{n(A)} = \frac{\binom{4}{3}}{2^4 - 1 - 1} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

(ریاضیات گسسته - احتمال: صفحه‌های ۸۱ و ۸۲)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

(عادل مسینی)

۹۱ - آزمون جامع

معادله، تبدیل به معادله زیر می‌شود:

$$2[x^2] - 3|x| - 2 = 0$$

واضح است که X باید عددی صحیح و زوج باشد؛ بنابراین:

$$x < 0: \quad 2x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} & \text{غ.ق.ق} \\ x = -2 & \text{ق.ق} \end{cases}$$

$$x \geq 0: \quad 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} & \text{غ.ق.ق} \\ x = 2 & \text{ق.ق} \end{cases}$$

در نتیجه $x = \pm 2$ جواب‌های معادله هستند.

(مسابان - تابع: صفحه‌های ۹۶ تا ۹۹)

 ۴

 ۳ ✓

 ۲

 ۱

چون تابع f متناوب است، پس داریم:

$$f(x+nT) = f(x), n \in \mathbb{Z}$$

$$f\left(\frac{102}{5}\right) = f\left(\frac{2}{5} + 25 \times 4\right) = f\left(\frac{2}{5}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$= 2 \sin \frac{5\pi}{4} = -\sqrt{2}$$

(مسابان - تابع: صفحه‌های ۹۶ تا ۹۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

(سعید بعفری کافی آباد)

ابتدا از قطاع داده شده، شعاع دایره و سپس مساحت آن را حساب می‌کنیم:

$$\frac{36^\circ}{3^\circ} = 12 \Rightarrow 12 \times 5 = \text{محیط دایره} = 2\pi r$$

$$\Rightarrow r = \frac{5 \times 12}{2 \times \pi} = \frac{3^\circ}{\pi} \Rightarrow S = \pi r^2 = \frac{3^\circ}{\pi} \times \frac{3^\circ}{\pi} \times \pi = \frac{900}{\pi}$$

(ریاضیات ۲- مثلثات: صفحه‌های ۱۲۵ تا ۱۲۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

(امسان جوانی بادی)

همه گزینه‌ها و صورت سؤال را ساده می‌کنیم:

$$\sin 451^\circ = \sin(36^\circ + 91^\circ) = \sin 91^\circ = \cos 1^\circ$$

$$\text{گزینه «۱» : } \cos 1^\circ$$

$$\text{گزینه «۲» : } -\sin 269^\circ = -\sin(27^\circ - 1^\circ) = -(-\cos 1^\circ) = \cos 1^\circ$$

$$\text{گزینه «۳» : } \sin 631^\circ = \sin(72^\circ - 89^\circ) = \sin(-17^\circ) = -\cos 1^\circ$$

$$\text{گزینه «۴» : } \cos\left(-\frac{\pi}{180}\right) = \cos(-1^\circ) = \cos 1^\circ$$

(ریاضیات ۲- مثلثات: صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۹)

۴

۳ ✓

۲

۱

(مرضیه کوردزی)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin 200^\circ = \sin(180^\circ + 20^\circ) = -\sin 20^\circ \\ \cos 290^\circ = \cos(360^\circ - 70^\circ) = \cos 70^\circ = \sin 20^\circ \\ \sin 160^\circ = \sin(180^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ \\ \cos 70^\circ = \sin 20^\circ \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{-2\sin 20^\circ + \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ + 2\sin 20^\circ} = -\frac{1}{3}$$

(ریاضیات ۲ - مثلثات: صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

(عمید مام‌قادر)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cos^3 x + \cos^3\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \sin x \\ &= \cos x \cdot \cos^3 x + (-\sin x)^3 \sin x = \cos^4 x - \sin^4 x \end{aligned}$$

از طرفی هم داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &\times (\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos 2x \end{aligned}$$

دوره تناوب این تابع برابر $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ است.

(ریاضیات ۲ - مثلثات: صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۹)

۴

۳ ✓

۲

۱

(یاسین سپهر)

با توجه به نمودار تابع: $f(0) = -2 \Rightarrow a \cos 0 = -2 \Rightarrow a = -2$ از طرفی دوره تناوب تابع 2π است. پس: $\frac{2\pi}{|b|} = 2\pi \Rightarrow |b| = 1$ تابع $\cos x$ ، نسبت به محور y ها تقارن دارد؛ بنابراین b می‌تواند هر دو مقدار -1 و $+1$ را بپذیرد؛ در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} b = 1 \Rightarrow a + b = -1 \\ b = -1 \Rightarrow a + b = -3 \end{cases}$$

(ریاضیات ۲ - مثلثات: صفحه ۱۴۹)

 ۴ ✓ ۳ ۲ ۱

(مهدی پیمانی)

مقدار تابع در نقطه $x = 0$ برابر صفر است. $f(0) = 1 + a \cos b(0) = 0$

$$\Rightarrow 1 + a = 0 \Rightarrow a = -1$$

دوره تناوب تابع $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3}$ است. پس $|b| = 3$ و $b = \pm 3$ خواهد بود، با داشتن a و b داریم:

$$f(x) = 1 - \cos(\pm 3x) = 1 - \cos 3x$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{15\pi}{6}\right) = 1 - \cos(3) \times \left(\frac{15\pi}{6}\right) = 1 - \cos \frac{15\pi}{2}$$

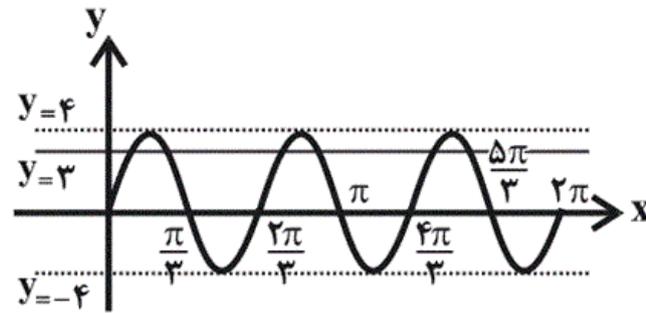
$$= 1 - \cos\left(\lambda\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos \frac{\pi}{2} = 1 - 0 = 1$$

(ریاضیات ۲ - مثلثات: صفحه ۱۴۹)

 ۴ ۳ ✓ ۲ ۱

برای اینکه تعداد نقاط برخورد بیشتر شوند، دوره تناوب باید کوچک‌ترین مقدار ممکن باشد. یعنی:

$$T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{3}$$



در این حالت $y = 3$ با نمودار $y = 4 \sin 3x$ ، ۶ نقطه برخورد دارد.

(ریاضیات ۲ - مثلثات: صفحه ۱۴۹)

۴

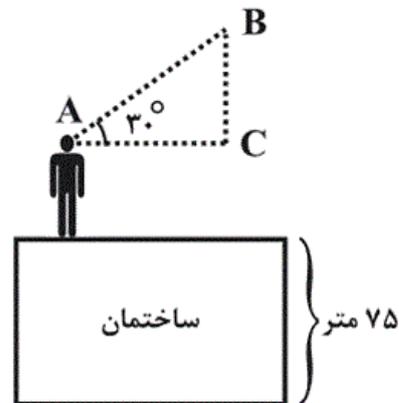
۳

۲

۱

(سعید مدیرفراسانی)

۱۰۰ - ۱۰۰۰



$$\sin 30^\circ = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{440/4} \Rightarrow BC = 220/2$$

$$\Rightarrow \text{فاصله بالگرد تا سطح زمین} = 220/2 + 1/8 + 75 = 297 \text{ (متر)}$$

(ریاضیات ۲ - مثلثات: صفحه‌های ۱۵۲ تا ۱۵۶)

۴

۳

۲

۱

(عادل مسینی)

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(\sqrt{6}a)(b)\sin\theta$$

$$S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{2}(a)(3b)\sin 2\theta$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{2}(a)(3b)\sin 2\theta}{\frac{1}{2}(\sqrt{6}a)(b)\sin\theta} = \frac{3ab(2\sin\theta\cos\theta)}{\sqrt{6}ab\sin\theta}$$

$$= \sqrt{6}\cos\theta$$

از طرفی طبق رابطه $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ ، $\cos\theta$ به سادگی به دست

می آید:

$$\tan\theta = \sqrt{7} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

θ باید در ربع اول قرار گیرد، در غیر این صورت 2θ نمی تواند زاویه یک مثلث باشد.

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\sqrt{6}\sqrt{2}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(ریاضیات ۲ - مثلثات: صفحه های ۱۵۲ تا ۱۵۶)

۴

۳

۲

۱✓

(مهمربهری وزیر)

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin(x-y) = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x-y = \frac{\pi}{6}$$

(مسایان - مثلثات: صفحه های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۴

۳

۲

۱✓

(جهانبفش نیکنام)

$$\begin{aligned}
 A &= \left(1 + \cos \frac{\pi}{\lambda}\right) \left(1 + \cos \frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda}\right) \left(1 + \cos \frac{\sqrt{3}\pi}{\lambda}\right) \left(1 + \cos \frac{\Delta\pi}{\lambda}\right) \\
 &= \left(1 + \cos \frac{\pi}{\lambda}\right) \left(1 - \cos \frac{\pi}{\lambda}\right) \left(1 + \cos \frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda}\right) \left(1 - \cos \frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda}\right) \\
 &= \left(1 - \cos^2 \frac{\pi}{\lambda}\right) \left(1 - \cos^2 \frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda}\right) = \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \sin^2 \frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda} \\
 &= \left(\sin \frac{\pi}{\lambda} \sin \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{\lambda}\right)\right)^2 = \left(\sin \frac{\pi}{\lambda} \cos \frac{\pi}{\lambda}\right)^2 \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{\lambda}
 \end{aligned}$$

(مسابان - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

(بواد اساقی)

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} + 2 \cos 4^\circ \cos 2^\circ \\
 &= \frac{1}{2} + \cos(4^\circ + 2^\circ) + \cos(4^\circ - 2^\circ) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cos 2^\circ \\
 &= 1 + \cos 2^\circ = 2 \cos^2 1^\circ = 2 \sin^2 8^\circ
 \end{aligned}$$

(مسابان - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

با استفاده از رابطه تانژانت مجموع دو زاویه داریم:

$$\tan 3\alpha = \tan[(2\alpha - \beta) + (\alpha + \beta)] = \frac{\tan(2\alpha - \beta) + \tan(\alpha + \beta)}{1 - \tan(2\alpha - \beta)\tan(\alpha + \beta)}$$

$$\Rightarrow \tan 3\alpha = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 2 - \sqrt{3}}{1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = 1$$

$$\Rightarrow 3\alpha = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \alpha = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}; k \in \mathbb{Z}$$

با جای‌گذاری مقدار $k = -1$ ، جواب $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ به دست می‌آید.

(مسابان - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۴

۳

۲ ✓

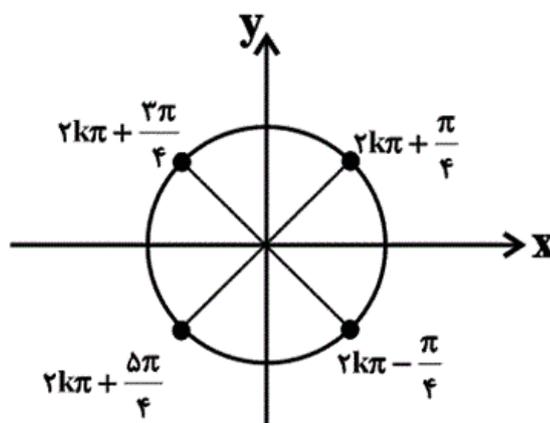
۱

$$|\sin x| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

اگر در دایره مثلثاتی، جواب‌های فوق را مشخص کنیم، داریم:



می‌توانیم برای نقاط مشخص شده جواب $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ را در نظر بگیریم.

راه حل دوم:

$$\sqrt{2} |\sin x| = 1 \Rightarrow 2 \sin^2 x = 1 \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 x = \cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}$$

(مسابان - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۳)

جواب $t = -1$ با توجه به شرط $\cos x \neq -1$ غیرقابل قبول است، بنابراین

داریم:

$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های بازه $[0, 2\pi]$ عبارتند از $\frac{\pi}{3}$ و $2\pi - \frac{\pi}{3}$ که مجموع آن‌ها برابر

2π است.

(مسئله‌بان - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۳)

۴

۳

۲

۱

(کاظم ابلالی)

۱۰۸ - 

ابتدا توجه کنید که:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$= 1 - 2\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$$

بنابراین معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x = \frac{5}{4} \cos 4x \Rightarrow \cos 4x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 4x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}; k \in \mathbb{Z}$$

(مسئله‌بان - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۳)

۴

۳

۲

۱

(قسم کتابچی)

$$y = \cos^{-1}(-\sqrt{x}) \xrightarrow{-\sqrt{x} \leq 0} R_y = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$\begin{cases} y = \cos^{-1} x \\ D_y = [-1, 1] \\ R_y = [0, \pi] \end{cases}$$

(مسابان - مثلثات: صفحه‌های ۱۲۴ تا ۱۳۰)

۴

۳

۲

۱

(عمید ستاری)

$$\sin^2\left(\frac{1}{2}a\right) = \frac{1 - \cos a}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2\left(\frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{1}{5}\right) = \frac{1 - \cos(\cos^{-1} \frac{1}{5})}{2} = \frac{1 - \frac{1}{5}}{2} = \frac{2}{5}$$

(مسابان - مثلثات: صفحه‌های ۱۲۴ تا ۱۳۰)

۴

۳

۲

۱