

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

ریاضیات گسسته دوازدهم، آشنایی با نظریه‌ی اعداد - ۶ سوال

۱۲۱- اگر n عددی صحیح باشد، کدام گزینه دو گزاره هم‌ارز را نشان می‌دهد؟

- (۱) « n^2 مضرب ۳ است» و « n مضرب ۹ است.»
 (۲) « $n + 2$ فرد است» و « $3n^2$ زوج است.»
 (۳) « $n + 2$ فرد است» و « $n^2 + 8$ زوج است.»
 (۴) « $3n^2 + 1$ زوج است» و « $5n + 7$ زوج است.»

۱۲۲- اگر $d = a^2 + a + 5$ و d عددی اول باشد. در این صورت بیشترین مقدار برای $d^2 + d + 1$ کدام است؟ ($a \in \mathbb{Z}$)

- (۱) ۵۷ (۲) ۱۳ (۳) ۱۵ (۴) ۳۱

۱۲۳- اگر a, b و c اعداد صحیح و ناصفر باشند و $a^2 | bc$ و $ab | c^2$ کدام گزینه همواره درست است؟

- (۱) $a^5 | b^7$ (۲) $a^5 | c^7$ (۳) $a^2 | b$ (۴) $a^3 | c^2$

۱۲۴- اگر n عددی طبیعی باشد، باقی‌مانده تقسیم عدد 7^{8n+5} بر ۵ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۲۵- اگر ۲۷ شهریور یک سال چهارشنبه باشد، ۲۹ بهمن همان سال چه روزی از هفته است؟

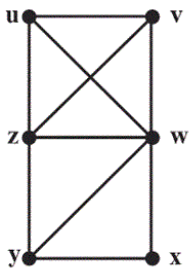
- (۱) سه‌شنبه (۲) چهارشنبه (۳) پنج‌شنبه (۴) جمعه

۱۲۶- به چند طریق می‌توان ۴۱۵ کیلوگرم برنج را به کیسه‌های ۱۵ و ۲۵ کیلوگرمی تقسیم کرد به گونه‌ای که تمام کیسه‌های استفاده

شده به‌طور کامل پُر شوند؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۲۷- در گراف شکل مقابل، چند مسیر از u به v وجود دارد؟



۸ (۲)

۷ (۱)

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۱۲۸- اگر G_1 و G_2 گراف‌هایی غیرتهی و به ترتیب k_1 -منتظم از مرتبه ۷ و k_2 -منتظم از مرتبه ۸ بوده و k_1 و k_2 کمترین

مقدار ممکن را داشته باشند، آنگاه $q(G_1) - q(G_2)$ کدام است؟

-۳ (۴)

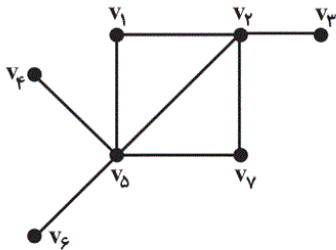
-۱ (۳)

۱ (۲)

۳ (۱)

۱۲۹- گراف G مطابق شکل زیر مفروض است. اگر $x \in V(G)$ ، آنگاه به ازای چند مقدار x ، $N_G[v_1] - N_G[x]$ مجموعه‌ای

غیرتهی است؟



۴ (۲)

۳ (۱)

۶ (۴)

۵ (۳)

۱۳۰- اگر مکمل گراف P_n دارای ۱۵ یال باشد، آنگاه $\delta(\overline{P_n})$ کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

حسابان دوازدهم، تابع ۵ - سوال -

۸۱- نقطه $(1, 0)$ روی نمودار تابع f ، به کدام نقطه روی نمودار تابع $g(x) = 1 + f(2x)$ تبدیل می‌شود؟

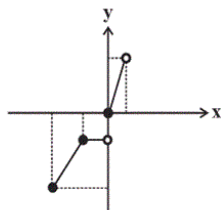
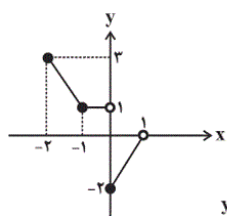
$(1, 2)$ (۴)

$(\frac{1}{2}, 1)$ (۳)

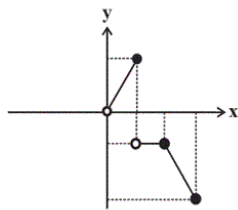
$(1, 1)$ (۲)

$(\frac{1}{2}, 2)$ (۱)

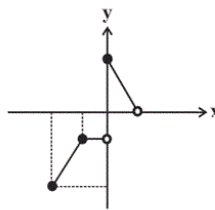
۸۲- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = -f(1-2x)$ کدام می‌تواند باشد؟



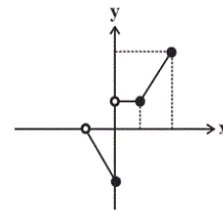
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

۸۳- تابع $f(x) = x(|x|-2)$ روی بازه $[a, b]$ نزولی است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

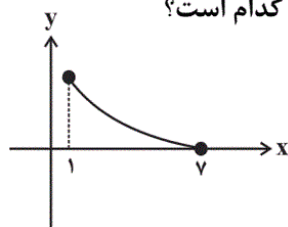
(۴) ۴

(۳) ۲

(۲) $\frac{3}{2}$

(۱) ۱

۸۴- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. بزرگ‌ترین مجموعه جواب نامعادله $f(3x-1) < f(x+3)$ کدام است؟



(۱) $(2, \frac{1}{3}]$

(۲) $(2, +\infty)$

(۳) $(2, 7]$

(۴) $\mathbb{R} - (2, 7]$

۸۵- چند جمله‌ای $f(x) = ax^2 + bx + 1$ بر $x+1$ بخش‌پذیر است و باقی‌مانده آن بر $x-1$ برابر ۱ است. مقدار a کدام است؟

(۴) -۱

(۳) $-\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) ۱

حسابان دوازدهم، مثلثات - سوال ۷ -

۸۶- دوره تناوب تابع $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3})\cos^3 x + \cos^3(\frac{2\pi}{3} - x)\sin x$ کدام است؟

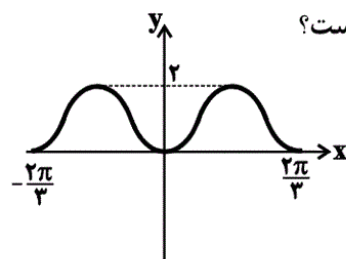
(۴) 2π

(۳) π

(۲) $\frac{\pi}{2}$

(۱) $\frac{\pi}{4}$

۸۷- بخشی از نمودار تابع $f(x) = 1 + a \cos bx$ در شکل زیر رسم شده است. حاصل $f(\frac{15\pi}{6})$ کدام است؟



(۱) -۱

(۲) ۲

(۳) ۱

(۴) -۲

۸۸- معادله $(1 + \sqrt{x})\cot x = 1$ چند جواب در بازه $(0, 5)$ دارد؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۸۹- جواب کلی معادله $\sqrt{2}|\sin x| - 1 = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{4}$

۹۰- مجموع جواب‌های معادله $\frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) π (۲) $\frac{3\pi}{2}$ (۳) 2π (۴) صفر

۹۱- جواب کلی معادله $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{4} \cos 4x$ ($k \in \mathbb{Z}$) کدام است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{12}$ (۳) $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{9}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{9}$

۹۲- اگر $\tan(2\alpha - \beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ و $\tan(\alpha + \beta) = 2 - \sqrt{3}$ باشد، مقدار زاویه α کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $\frac{7\pi}{12}$ (۲) $-\frac{\pi}{4}$ (۳) $-\frac{5\pi}{12}$ (۴) $\frac{\pi}{6}$

حسابان دوازدهم، حد‌های نامتناهی - حد در بی نهایت - ۸ سوال

۹۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x-1}{1-\sin x}$ کدام است؟

- (۱) $-\infty$ (۲) -1 (۳) $+1$ (۴) $+\infty$

۹۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3^x - 1}{3^x + 1} \right]$ کدام است؟ ($[\]$ ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) 1 (۲) صفر (۳) ∞ (۴) 3

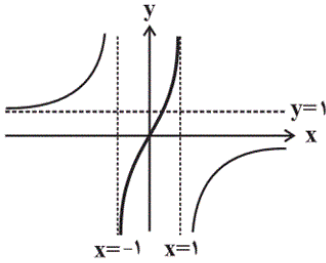
۹۵- اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n + 3x^2 + a}{ax^m - 1} = 1$ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟ ($m, n \in \mathbb{W}$)

- (۱) 3 (۲) 4 (۳) 5 (۴) 8

۹۶- به ازای چند مقدار m ، نمودار تابع $f(x) = \frac{x+3}{x^2 + mx - 3}$ فقط یک مجانب قائم دارد؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) صفر

۹۷- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} [(f \circ f)(x)]$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)



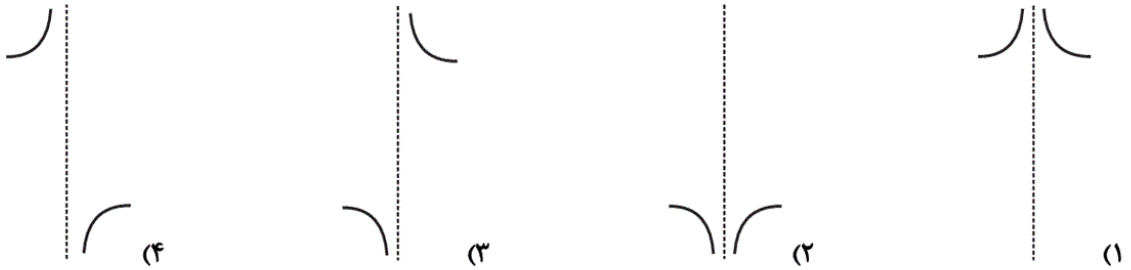
(۱) -۲

(۲) صفر

(۳) ۱

(۴) -۱

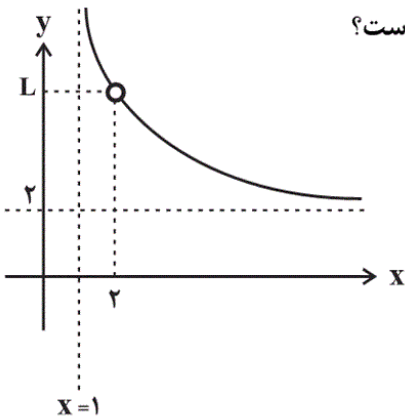
۹۸- نمودار تابع $f(x) = \frac{2x + [x]}{x^2}$ در اطراف مجانب قائم آن چگونه است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)



۹۹- نمودار تابع $f(x) = \frac{2x^2 - |x|}{x^2 + |x|}$ در اطراف مجانب افقی آن کدام است؟



۱۰۰- بخشی از نمودار تابع $f(x) = \frac{ax^2 - 2x + b}{x^2 + cx + d}$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار L کدام است؟



(۱) ۴

(۲) $\frac{9}{2}$

(۳) ۵

(۴) $\frac{11}{2}$

۱۰۶- نقاط A، B، C و D در صفحه مفروض‌اند. در کدام‌یک از حالت‌های زیر هیچ‌گاه بیش از یک نقطه در این صفحه وجود ندارد

که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد؟

(۱) A، B، C و D روی یک خط راست باشند.

(۲) هیچ سه نقطه‌ای از میان A، B، C و D روی یک خط راست نباشند.

(۳) پاره‌خط AB بر CD عمود باشد.

(۴) پاره‌خط AC بر BD عمود باشد.

۱۰۷- به ازای چند مقدار طبیعی k، معادله $x^2 + y^2 + 2x + 3y + k = 0$ معادله یک دایره است؟

(۴) ۳

(۳) ۴

(۲) ۵

(۱) ۶

۱۰۸- شعاع دایره‌ای به مرکز $O(3, -2)$ که بر دایره به معادله $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$ مماس بیرونی باشد، کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۱۰۹- اگر طول مماس رسم شده از نقطه $A(0, k)$ بر دایره به معادله $x^2 + y^2 - x - y - 2 = 0$ برابر ۲ باشد، مجموع مقادیر k کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

۱۱۰- نقاط ثابت $A(a, 0)$ ، $B(-a, 0)$ و $C(c, 0)$ مفروض‌اند ($c > a > 0$). اگر M نقطه تماس مماس‌های رسم شده از نقطه C بر دایره‌های گذرنده از A و B باشد، معادله مکان هندسی نقطه M کدام است؟

$$a^2x^2 + a^2y^2 - cx = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 - 2cx + a^2 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 - cx = 0 \quad (4)$$

$$x^2 + y^2 - 2cx - a^2 = 0 \quad (3)$$

۱۰۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^{1399} کدام است؟

- (۱) A^{1398} (۲) I^{1398} (۳) A^{1399} (۴) I^{1399}

۱۰۲- اگر $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = I$ باشد، حاصل $a+b+c+d$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۱۹ (۴) -۱۹

۱۰۳- اگر دستگاه $\begin{cases} mx+y = m^2+m^3 \\ x+my = 4m-2 \end{cases}$ بی‌شمار جواب داشته باشد، m کدام است؟

- (۱) ± 1 (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) مقداری برای m وجود ندارد.

۱۰۴- اگر A ماتریسی 3×3 و $|A| = 5$ باشد، حاصل $|A^{-1}| |A^2|$ کدام است؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۵ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{5}$

۱۰۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ ، B ماتریسی اسکالر از مرتبه ۳ و $|B| = |A^2|$ باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس B کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) -۱۲ (۳) ۲۴ (۴) -۲۴

هندسه ۳- دوازدهم - گواه، آشنایی با مقاطع مخروطی - سوال ۵ -

۱۱۶- مکان هندسی مراکز همه دایره‌هایی که بر دو خط متقاطع d و d' مماس‌اند، کدام است؟

- (۱) دو خط موازی (۲) یک دایره (۳) دو خط عمود بر هم (۴) یک خط

۱۱۷- دایره‌ای محور x ها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام

است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) ۳

۱۱۸- از نقطه $M(4,0)$ ، دو مماس بر دایره $x^2 + y^2 = 4$ رسم می‌کنیم. فاصله دو نقطه تماس از هم کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) ۴ (۴) $4\sqrt{3}$

۱۱۹- به ازای کدام مقادیر m ، خط به معادله $y = mx + 2$ بر دایره $x^2 + y^2 - 2x = 3$ مماس است؟

- (۱) $0, -\frac{4}{3}$ (۲) $0, \frac{4}{3}$ (۳) $1, -\frac{2}{3}$ (۴) $1, \frac{2}{3}$

۱۲۰- معادله وتر مشترک دو دایره به مراکز $(-1, 2)$ و $(2, 1)$ و به شعاع‌های مساوی ۲ واحد، کدام است؟

- (۱) $y = 2x$ (۲) $y = 3x$ (۳) $3y = 2x$ (۴) $2y = 3x$

هندسه ۳ - دوازدهم - گواه، ماتریس، و کاربردها - ۵ سوال

۱۱۱- ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2a-1 & a+2 \\ b-1 & a+b \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری و ماتریس $B = \begin{bmatrix} -a & b-1 \\ a+2 & c \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر است. مجموع درایه‌های

ماتریس AB کدام است؟

- (۱) -10 (۲) 10 (۳) 12 (۴) -12

۱۱۲- در ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ اگر $a_{ij} = \begin{cases} 2; i \neq j \\ 1; i = j \end{cases}$ باشد، ماتریس $A^2 - 4A$ برابر کدام است؟

- (۱) $3A$ (۲) $5A$ (۳) $2I$ (۴) $5I$

۱۱۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه به ازای کدام مجموعه مقادیر λ ، ماتریس $I - \lambda A$ وارون پذیر است؟

- (۱) $\{1\}$ (۲) $\mathbb{R} - \{1\}$ (۳) \mathbb{R} (۴) \emptyset

۱۱۴- در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = f \\ cx + dy = 1 \end{cases}$ معکوس ماتریس ضرایب به صورت $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ است. اگر $x = 1$ باشد، مقدار y کدام است؟

- (۱) -3 (۲) -2 (۳) 2 (۴) 3

۱۱۵- معادله $\begin{vmatrix} 0 & x-a & x-b \\ a-x & 0 & x-c \\ b-x & c-x & 0 \end{vmatrix} = 0$ دارای چند جواب حقیقی است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی‌شمار

۱۳۱- اگر حاصل $[(3a, 6a), [2a, 6a^2]]$ همواره مضرب ۳۰ باشد، چند عدد طبیعی برای a در مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ وجود دارد؟

- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۲۰ (۴) ۲۵

۱۳۲- اگر باقی مانده تقسیم a بر ۲۰ برابر ۶ و باقی مانده تقسیم b بر ۱۲ برابر ۵ باشد، باقی مانده تقسیم $6a - 15b$ بر ۳۰ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) -۹ (۳) ۲۱ (۴) ۱۵

۱۳۳- اگر $72x \equiv 84y \pmod{15}$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟ $(x, y \neq 0)$

- (۱) $6x \equiv 7y \pmod{5}$ (۲) $2x \equiv 3y \pmod{5}$ (۳) $x \equiv 2y \pmod{5}$ (۴) $3x \equiv y \pmod{5}$

۱۳۴- عدد $\overline{4318x}$ مضرب ۱۱ است. باقی مانده تقسیم آن بر ۹ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۷

۱۳۵- معادله هم نهشتی $72x \equiv 1 \pmod{31}$ در مجموعه اعداد طبیعی سه رقمی چند جواب دارد؟

- (۱) ۲۹ (۲) ۳۰ (۳) ۳۲ (۴) ۳۳

۱۳۶- معادله سیاله خطی $15x + 14y = 1050$ در مجموعه اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۳۷- اگر $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ ، $N_G(a) = \{b, d, f\}$ و $N_G(d) = \{a, c, e, f\}$ باشد، یال ad با چند یال در گراف G مجاور است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۱۳۸- گراف G فقط یک رأس زوج دارد. گراف \bar{G} چند رأس زوج دارد؟

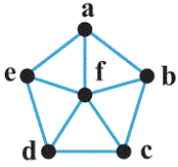
(۴) نامشخص

(۳) $p-1$

(۲) ۱

(۱) صفر

۱۳۹- گراف شکل زیر، چند دور به طول ۶ دارد؟



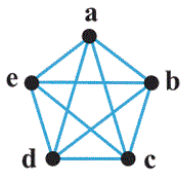
(۲) ۱

(۱) هیچ

(۴) ۶

(۳) ۵

۱۴۰- گراف شکل زیر، چند زیرگراف دارد به گونه‌ای که در هر کدام از آنها، $q=5$ و $\deg(a)=4$ باشد؟



(۲) ۵

(۱) ۳

(۴) ۸

(۳) ۶

(عمیدرضا امیری)

در گزینه «۱»، از این که n مضرب ۹ است می‌توان نتیجه گرفت که n^2

مضرب ۳ است ولی از مضرب ۳ بودن n^2 نمی‌توان همواره نتیجه گرفت که

n مضرب ۹ است. مثلاً فرض کنید $n^2 = 6^2 = 36$ که مضرب ۳ است ولی

$n = 6$ مضرب ۹ نیست.

در گزینه «۲»، اگر $n + 2$ فرد باشد، باید n فرد باشد، پس n^2 و $3n^2$

نیز فرد هستند.

در گزینه «۳»، اگر $n + 2$ فرد باشد، آنگاه n فرد و بنابراین n^2 و

$n^2 + 8$ نیز فرد هستند.

در گزینه «۴»، اگر $3n^2 + 1$ زوج باشد پس $3n^2$ فرد و در نتیجه n^2 و

n فرد هستند، پس $5n$ فرد و $(5n + 7)$ زوج است. اگر $5n + 7$ زوج

باشد، $5n$ فرد و در نتیجه n فرد است و n^2 و $3n^2$ نیز فرد و $3n^2 + 1$

زوج است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۴ تا ۸)

۴

۳

۲

۱

$$(2a + 5, a^2 + a) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid 2a + 5 \xrightarrow{\times a} d \mid 2a^2 + 5a \\ d \mid a^2 + a \xrightarrow{\times 2} d \mid 2a^2 + 2a \end{cases}$$

$$\Rightarrow d \mid (2a^2 + 5a) - (2a^2 + 2a) \Rightarrow d \mid 3a$$

$$\left. \begin{array}{l} d \mid 2a + 5 \xrightarrow{\times 3} d \mid 6a + 15 \\ d \mid 3a \xrightarrow{\times 2} d \mid 6a \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{تفاضل} \\ \text{زا} \end{array} \rightarrow d \mid 15$$

$$\xrightarrow{\text{d اول است}} d = 3 \text{ یا } d = 5$$

$$\max(d^2 + d + 1) = 5^2 + 5 + 1 = 31$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۹ تا ۱۴)

۴

۳

۲

۱

$$a^2 \mid bc \xrightarrow{\times a} a^3 \mid abc \quad (1)$$

$$ab \mid c^2 \xrightarrow{\times c} abc \mid c^3 \quad (2)$$

$$(1), (2) \xrightarrow{\text{تعددی}} a^3 \mid c^3 \Rightarrow a \mid c$$

$$\xrightarrow{\text{به‌توان ۵}} a^5 \mid c^5 \xrightarrow{c^5 \mid c^7} a^5 \mid c^7$$

به عنوان مثال نقض برای سایر گزینه‌ها، فرض کنید $a = 8$ ، $b = 4$ و

$c = 16$ باشد.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۴

۳

۲

۱

$$7 \equiv 2^5$$

$$2^2 \equiv -1 \xrightarrow{\text{بم توان 4}} 2^8 \equiv 1 \xrightarrow{\text{بم توان n}} 2^{8n} \equiv 1$$

$$2^2 \equiv -1 \xrightarrow{\text{بم توان 2}} 2^4 \equiv 1 \xrightarrow{\times 2} 2^5 \equiv 2$$

$$7^{8n+5} \equiv 2^{8n+5} \equiv 2^{8n} \times 2^5 \equiv 1 \times 2 \equiv 2$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۴

۳

۲

۱

ابتدا فاصله ۲۷ شهریور تا ۲۹ بهمن را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{array}{c} 4 \\ \downarrow \\ \text{شهریور} \end{array} + \underbrace{4 \times 30}_{\text{مهرتادی}} + \begin{array}{c} 29 \\ \downarrow \\ \text{بهمن} \end{array} = 153$$

$$153 = 21 \times 7 + 6 \Rightarrow 153 \equiv 6^7$$

اگر روز چهارشنبه را به عنوان مبدأ، معادل صفر انتخاب کنیم، آنگاه داریم:

سه‌شنبه	دوشنبه	یکشنبه	شنبه	جمعه	پنج‌شنبه	چهارشنبه
۶	۵	۴	۳	۲	۱	صفر

پس ۲۹ بهمن در سال مورد نظر، روز سه‌شنبه است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه ۲۴)

۴

۳

۲

۱

اگر تعداد کیسه‌های ۱۵ و ۲۵ کیلوگرمی مورد استفاده را به ترتیب با x و y نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$15x + 25y = 415 \xrightarrow{+5} 3x + 5y = 83$$

$$\Rightarrow 5y \equiv 83 \Rightarrow 2y \equiv 2 \xrightarrow[\substack{\div 2 \\ (2,5)=1}]{+2} y \equiv 1 \Rightarrow y = 3k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$3x + 5(3k + 1) = 83 \Rightarrow 3x = -15k + 78$$

$$\Rightarrow x = -5k + 26$$

$$x \geq 0 \Rightarrow -5k + 26 \geq 0 \Rightarrow k \leq \frac{26}{5}$$

$$y \geq 0 \Rightarrow 3k + 1 \geq 0 \Rightarrow k \geq -\frac{1}{3}$$

با توجه به اینکه k عددی صحیح است، پس ۶ مقدار ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ قابل قبول است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۲۶ تا ۲۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

$u-v$ مسیرها در این گراف عبارت‌اند از:

مسیر به طول ۱: uv

مسیر به طول ۲: uwv و uzv

مسیر به طول ۳: $uzyw$ و $uzwv$

مسیر به طول ۴: $uzywv$ و $uwyzv$

مسیر به طول ۵: $uzyxwv$ و $uwxzyv$

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی: مشابه مثال صفحه ۳۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(امیرحسین ابومصوب)

با توجه به اینکه گراف‌های G_1 و G_2 غیرتهی هستند و تعداد رأس‌های فرد

هر گراف، عددی زوج است، بنابراین $k_1 = 2$ و $k_2 = 1$ است. در هر گراف

k - منتظم از مرتبه p ، رابطه $2q = kp$ برقرار است، بنابراین داریم:

$$\left. \begin{array}{l} q(G_1) = \frac{2 \times 7}{2} = 7 \\ q(G_2) = \frac{1 \times 8}{2} = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow q(G_1) - q(G_2) = 3$$

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی: مشابه تمرین‌های ۱۴ و ۱۵، صفحه ۴۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$N_G[v_1]$ همسایگی بسته رأس v_1 و برابر مجموعه $\{v_1, v_2, v_5\}$ است. با توجه به اینکه هیچ کدام از رئوس v_3, v_4, v_6, v_7 و v_7 با رأس v_1 مجاور نیستند، پس مجموعه همسایگی بسته هر کدام از این رئوس فاقد v_1 است و در نتیجه تفاضل این مجموعه‌ها از $N_G[v_1]$ غیرتهی است.

از طرفی چون سه رأس v_1, v_2, v_5 دو به دو مجاور یکدیگرند، پس مجموعه همسایگی بسته هر یک از دو رأس v_2 و v_5 ، شامل مجموعه $\{v_1, v_2, v_5\}$ بوده و در نتیجه تفاضل هر کدام از آنها از $N_G[v_1]$ تهی است.

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل سازی: صفحه ۳۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

گراف P_n تنها از یک مسیر n رأسی تشکیل شده و در نتیجه دارای $n-1$ یال است. بنابراین داریم:

$$q(\overline{P_n}) = \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = 15$$

$$\Rightarrow (n-1)(n-2) = 30 = 6 \times 5$$

$$\Rightarrow n-1 = 6 \Rightarrow n = 7$$

گراف P_n فقط شامل رأس‌هایی از درجه‌های ۱ و ۲ است، پس

$$\Delta(P_n) = 2 \text{ است.}$$

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(عادل مسینی)

اگر تبدیل یافته $(1, 0)$ را روی نمودار g ، (x_0, y_0) در نظر بگیریم، داریم:

$$2x_0 = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$$

$$g(x_0) = 1 + f(2x_0) = 1 + f(1) = 1 + 0 = 1$$

$$\Rightarrow (x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

(مسایان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۴

۳

۲

۱

(سعید علم‌پور)

روش اول:

ابتدا نمودار f را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار

$y = f(x+1)$ رسم شود. سپس نمودار را در راستای افقی منقبض

می‌کنیم. به طوری که طول نقاط نصف شود تا نمودار $y = f(2x+1)$

به دست آید. سپس نمودار را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم. تا نمودار

$y = f(-2x+1)$ رسم شود. در انتها نیز نمودار را نسبت به محور x ها

قرینه می‌کنیم تا نمودار g به دست آید.

روش دوم: نقطه‌یابی

نقطه $(0, -2)$ روی نمودار تابع f ، به نقطه $(\frac{1}{2}, 2)$ روی نمودار تابع g و

نقطه $(0, 1)$ نیز به نقطه $(\frac{1}{2}, -1)$ تبدیل می‌شود. بنابراین فقط نمودار تابع

گزینه «۳» است که این شرایط را دارد. دقت کنید که نقطه $(0, 1)$ نقطه

$(\frac{1}{2}, -1)$ باید توخالی باشند.

(مسایان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

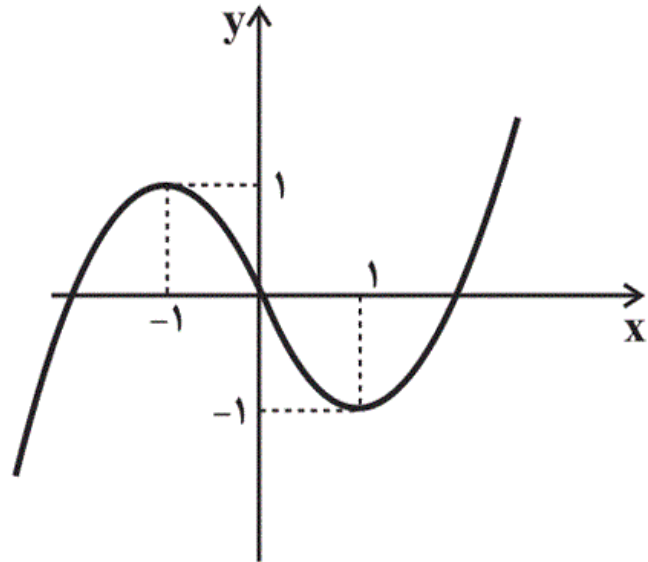
۴

۳

۲

۱

توجه کنید که نمودار تابع به صورت زیر است:



$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & ; \quad x \geq 0 \\ -x^2 - 2x & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

بنابراین تابع f روی بازه $[-1, 1]$ و هر زیر مجموعه از آن نزولی و حداکثر مقدار $b - a$ برابر ۲ است.

(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

نمودار تابع f با دامنه $[1, 7]$ اکیداً نزولی است. بنابراین داریم:

$$1 \leq x+3 < 3x-1 \leq 7 \quad (*)$$

دقت کنید که چون f نزولی است، جهت نامعادله عوض می‌شود. همچنین با

توجه به دامنه محدود f ، مقادیر $f(3x-1)$ و $f(x+3)$ باید

تعریف‌پذیر باشند:

$$\begin{cases} 1 \leq x+3 \Rightarrow x \geq -2 & (1) \\ x+3 < 3x-1 \Rightarrow x > 2 & (2) \\ 3x-1 \leq 7 \Rightarrow x \leq \frac{8}{3} & (3) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1),(2),(3)} x \in \left(2, \frac{8}{3}\right]$$

(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۴

۳

۲

۱

(عادل حسینی)

$f(x)$ بر $x+1$ بخش‌پذیر است. یعنی $f(-1) = 0$ است و چون باقی‌مانده

آن بر $x-1$ برابر ۱ است، $f(1) = 1$ است. داریم:

$$\begin{cases} f(-1) = a - b + 1 = 0 \Rightarrow b - a = 1 & (1) \\ f(1) = a + b + 1 = 1 \Rightarrow b + a = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(-1) = a - b + 1 = 0 \Rightarrow b - a = 1 & (1) \\ f(1) = a + b + 1 = 1 \Rightarrow b + a = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}, a = -\frac{1}{2}$$

(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

۴

۳

۲

۱

$$f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cos^3 x + \cos^3\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \sin x$$

$$= \cos x \cdot \cos^3 x + (-\sin x)^3 \sin x = \cos^4 x - \sin^4 x$$

از طرفی هم داریم:

$$f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$\times (\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos 2x$$

دوره تناوب این تابع برابر $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ است.

(مسئله ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۴

۳✓

۲

۱

(مسئله پیمانی)

مقدار تابع در نقطه $x = 0$ برابر صفر است.

$$f(0) = 1 + a \cos b(0) = 0$$

$$\Rightarrow 1 + a = 0 \Rightarrow a = -1$$

دوره تناوب تابع $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3}$ است. پس $|b| = 3$ و $b = \pm 3$

خواهد بود، با داشتن a و b داریم:

$$f(x) = 1 - \cos(\pm 3x) = 1 - \cos 3x$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{15\pi}{6}\right) = 1 - \cos(3)\left(\frac{15\pi}{6}\right) = 1 - \cos \frac{15\pi}{2}$$

$$= 1 - \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos \frac{\pi}{2} = 1 - 0 = 1$$

(مسئله ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۴

۳✓

۲

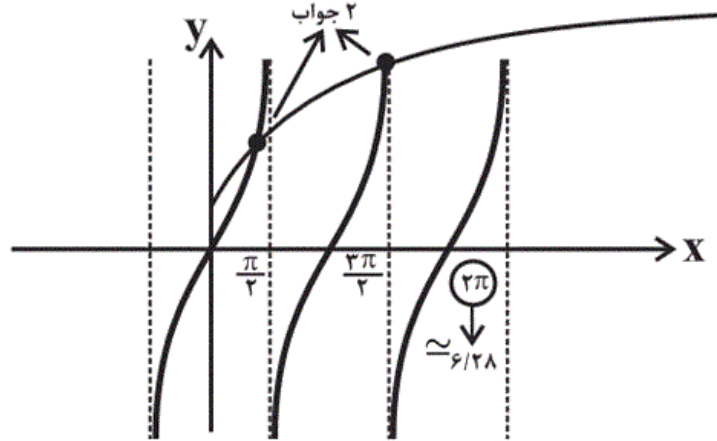
۱

(علی شهبازی)

معادله را به شکل زیر می‌نویسیم: $x \neq k\pi$ و

$$(1 + \sqrt{x}) \cot x = 1 \Rightarrow 1 + \sqrt{x} = \frac{1}{\cot x} = \tan x$$

$y = \tan x$ و $y = \sqrt{x} + 1$ را با لحاظ کردن دامنه رسم می‌کنیم:



(مسئله ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۹ تا ۳۲)

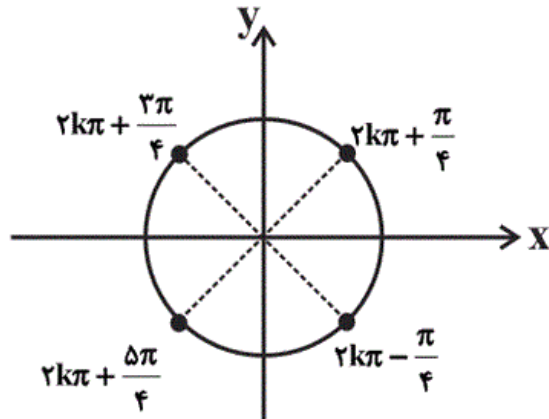
۴

۳

۲

۱

اگر در دایره مثلثاتی، جواب‌های فوق را مشخص کنیم، داریم:



می‌توانیم برای نقاط مشخص شده جواب $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ را در نظر بگیریم.

راه حل دوم:

$$\sqrt{2} |\sin x| = 1 \Rightarrow 2 \sin^2 x = 1 \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 x = \cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

(مسئله ۲- مثلثات: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۲)

۴

۳

۲

۱

(میلاد سبازی لاریبانی)

$$\frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\cos x \neq -1} 2 \sin^2 x = 1 + \cos x$$

$$\Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) = 2 - 2 \cos^2 x = 1 + \cos x$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \xrightarrow{\cos x = t} 2t^2 + t - 1 = 0$$

در معادله بالا، مجموع ضریب t^2 و مقدار ثابت، برابر ضریب t است.

بنابراین یکی از جواب‌های آن -1 و جواب دیگر $\frac{1}{2}$ است. واضح است که

جواب $t = -1$ با توجه به شرط $\cos x \neq -1$ غیرقابل قبول است، بنابراین داریم:

$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

جواب‌های بازه $[0, 2\pi]$ عبارتند از $\frac{\pi}{3}$ و $2\pi - \frac{\pi}{3}$ که مجموع آن‌ها برابر 2π است.

(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

(کاظم اجلالی)

ابتدا توجه کنید که:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$= 1 - 2\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$$

بنابراین معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x = \frac{1}{4} \cos 4x \Rightarrow \cos 4x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 4x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}; k \in \mathbb{Z}$$

(مسئله ۲- مثلثات: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

با استفاده از تانژانت، مجموع دو زاویه داریم:

$$\tan 3\alpha = \tan[(2\alpha - \beta) + (\alpha + \beta)] = \frac{\tan(2\alpha - \beta) + \tan(\alpha + \beta)}{1 - \tan(2\alpha - \beta)\tan(\alpha + \beta)}$$

$$\Rightarrow \tan 3\alpha = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 2 - \sqrt{3}}{1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = 1$$

$$\Rightarrow 3\alpha = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \alpha = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}; k \in \mathbb{Z}$$

با جای گذاری مقدار $k = -1$ ، جواب $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ به دست می‌آید.

(مسئله ۲- مثلثات: صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(میلاد سجادی لاریجانی)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x-1}{1-\sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x-1}{\left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2} = +\infty$$

توجه کنید که اگر $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ، صورت و مخرج کسر بالا مثبت هستند به

طوری که حد صورت مخالف صفر و حد مخرج برابر صفر است.

(مسئله ۲- فرهای نامتناهی - هر در بی نهایت: صفحه‌های ۴۶ تا ۵۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

تابعی را به صورت $f(x) = \left[\frac{3x-1}{3x+1} \right]$ در نظر می‌گیریم و هدف به دست

آوردن حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ است. ضابطه تابع f را می‌توان به صورت زیر

ساده کرد:

$$f(x) = \left[\frac{3x+1-2}{3x+1} \right] = \left[1 - \frac{2}{3x+1} \right] = 1 + \left[-\frac{2}{3x+1} \right]$$

در بازه $\left(\frac{1}{3}, +\infty \right)$ ، مقدار عبارت $\frac{-2}{3x+1}$ در بازه $(-1, 0)$ قرار می‌گیرد

و در نتیجه $\left[-\frac{2}{3x+1} \right] = -1$ است.

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

از آنجا که حاصل حد در بی‌نهایت موجود است، درجه چند جمله‌ای‌های صورت و مخرج باید برابر باشند. بنابراین در حالت‌های زیر مسئله را بررسی می‌کنیم:

$$\text{i) } n < 2, m = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n + 3x^2 + a}{ax^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{ax^2} = \frac{3}{a} = 1 \Rightarrow a = 3$$

$$\text{ii) } n = m = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n + 3x^2 + a}{ax^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{ax^2} = \frac{4}{a} = 1 \Rightarrow a = 4$$

$$\text{iii) } n = m > 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n + 3x^2 + a}{ax^n - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{ax^n} = \frac{1}{a} = 1 \Rightarrow a = 1$$

در نتیجه مجموع مقادیر ممکن برای a برابر است با ۸.

(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۶)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

Δ ی عبارت مخرج برابر $m^2 + 12$ و همواره مثبت است، پس عبارت مخرج همواره دو ریشه دارد. حال برای آن که نمودار تابع f فقط یک مجانب قائم داشته باشد، باید یکی از ریشه‌های عبارت مخرج برابر ریشه عبارت صورت یعنی $x = -3$ باشد. داریم:

$$x = -3 : (-3)^2 + m(-3) - 3 = 6 - 3m = 0 \Rightarrow m = 2$$

فقط به ازای یک مقدار، شرط مورد نظر برقرار است.

(مسئله ۲- مرهای نامتناهی - هر در بی نهایت: صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

(عادل حسینی)

با توجه به نمودار مشخص است که $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ است.

حال داریم: $\lim_{x \rightarrow 1^-} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

خط $y = 0$ مجانب افقی نمودار تابع در $+\infty$ است و مقادیر تابع f در

$+\infty$ در بازه $(-1, 0)$ قرار دارند. پس در $+\infty$ ، $[f(x)]$ با -1 برابر

است و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [(f \circ f)(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 = -1$$

(مسئله ۲- مرهای نامتناهی - هر در بی نهایت: صفحه‌های ۴۶ تا ۵۵ و ۵۹ تا ۶۶)

۴ ✓

۳

۲

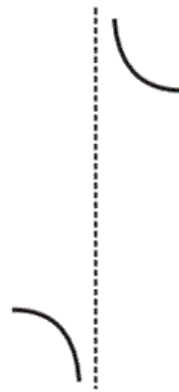
۱

توجه کنید که در همسایگی راست $x = 0$ تابع $y = [x]$ با تابع $y = 0$ و در همسایگی چپ آن با تابع $y = -1$ برابر است حال حد چپ و حد راست تابع f در $x = 0$ را به دست می آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + 0}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x - 1}{x^2} = -\infty$$

بنابراین نمودار تابع f در اطراف خط $x = 0$ به صورت زیر است.



(مسئله ۲- مرهای نامتناهی - در در بی نهایت: صفحه های ۵۵ تا ۵۷)

۴

۳

۲

۱

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1} & ; \quad x < 0 \\ \frac{2x-1}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1} & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$$

در $+\infty$ عبارت $\frac{-3}{x+1}$ و در $-\infty$ نیز عبارت $\frac{3}{x-1}$ منفی هستند. این

یعنی در $\pm\infty$ ، نمودار تابع با مقادیر کم تر از ۲ به خط مجانب افقی خود

یعنی $y = 2$ نزدیک می شود. در نتیجه نمودار گزینه «۴» پاسخ صحیح

است.



(مسئله ۲- فرهای نامتناهی - در در بی نهایت: صفحه های ۶۷ و ۶۸)

۴

۳

۲

۱

$y = 2$ خط مجانب افقی نمودار تابع است:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^2 - 3x + b}{x^2 + cx + d} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^2}{x^2} = a = 2$$

$x = 1$ خط مجانب قائم نمودار تابع است و مقدار تابع نیز در $x = 2$

تعریف نشده است، بنابراین این مقادیر ریشه‌های عبارت مخرج هستند:

$$\Rightarrow x^2 + cx + d = (x-1)(x-2)$$

همچنین تابع در $x = 2$ دارای حد است، پس $x = 2$ ریشه صورت نیز

می‌باشد:

$$\Rightarrow 2(2)^2 - 3(2) + b = 2 + b = 0 \Rightarrow b = -2$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 2}{(x-1)(x-2)} = \frac{(2x+1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2x+1}{x-1} ; \quad x \neq 2$$

$$\Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{x-1} = \frac{5}{1} = 5$$

(مسئله ۲- مرهای نامتناهی - در در بی نهایت: صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

۴

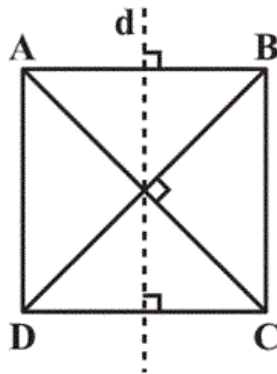
۳ ✓

۲

۱

مثال نقض گزینه‌های «۲» و «۴»: در مربع ABCD، هیچ سه نقطه‌ای از میان نقاط A، B، C و D روی یک خط راست نیستند و همچنین قطرهای AC و BD برهم عمودند. از طرفی در این مربع، عمودمنصف‌های دو پاره‌خط AB و CD برهم منطبق‌اند، پس مسئله بی‌شمار جواب دارد.

گزینه «۳»: اگر پاره‌خط‌های AB و CD برهم عمود باشند، آنگاه عمودمنصف‌های آنها نیز برهم عمودند و در نتیجه در یک نقطه متقاطع‌اند و مسئله همواره یک جواب دارد.



(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: مشابه تمرین ۲ صفحه ۳۹)

۴

۳

۲

۱

(یاسین سپهر)

۱۰۷ - ۰۸۰۰۰۰۰۰۰۰

رابطه ضمنی $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ، معادله یک دایره است، اگر و تنها اگر $a^2 + b^2 > 4c$ باشد.

پس در معادله $x^2 + y^2 + 2x + 3y + k = 0$ داریم:

$$2^2 + 3^2 > 4k \Rightarrow k < \frac{13}{4} \Rightarrow k < 3.25$$

بنابراین به ازای سه عدد طبیعی ۱، ۲ و ۳، رابطه داده شده معادله یک دایره است.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: مشابه تمرین ۲ صفحه ۴۶)

۴

۳

۲

۱

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$$

مرکز دایره: $O'(-1, -2)$

$$\text{شعاع دایره: } R' = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + 4^2 - 4 \times 1} = 2$$

$$OO' = \sqrt{(-1-3)^2 + (-2+2)^2} = 4$$

اگر شعاع دایره مورد نظر را با R نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$\text{دو دایره مماس بیرونی هستند.} \Rightarrow OO' = R + R' \Rightarrow 4 = R + 2$$

$$\Rightarrow R = 2$$

(هنر سه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: مشابه مثال صفحه ۴۳)

۴

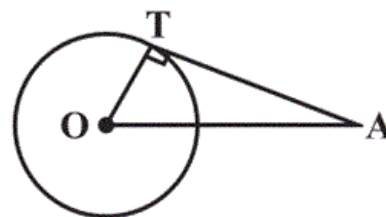
۳

۲ ✓

۱

$$x^2 + y^2 - x - y - 2 = 0$$

$$\text{مرکز دایره: } O\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$



$$\text{شعاع دایره: } R = \frac{1}{2} \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 - 4(-2)} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$OA = \sqrt{\left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(k - \frac{1}{2}\right)^2} \Rightarrow OA^2 = \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

$$\triangle OAT: OA^2 = AT^2 + OT^2 \Rightarrow \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = 4 + \frac{10}{4}$$

$$\Rightarrow \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow k^2 - k - 6 = 0$$

$$\Rightarrow k \text{ مجموع مقادیر } = -\frac{b}{a} = -\frac{(-1)}{1} = 1$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر $M(x,y)$ نقطه تماس باشد، آنگاه با توجه به رابطه طولی بین مماس و

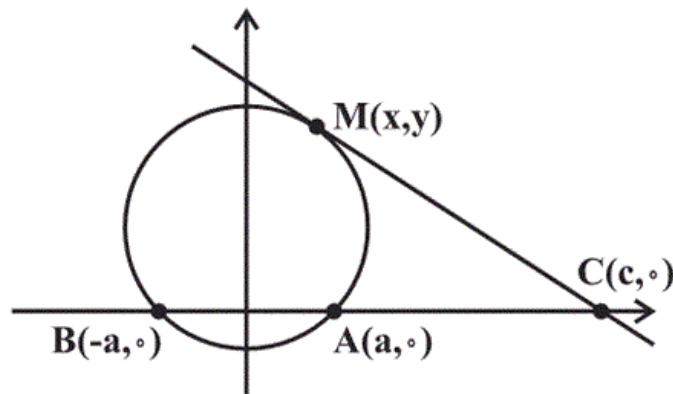
قاطع در دایره داریم:

$$CM^2 = CA \cdot CB$$

$$\Rightarrow (x-c)^2 + (y-0)^2 = (c-a)(c+a)$$

$$\Rightarrow x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = c^2 - a^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2cx + a^2 = 0$$



(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

(علیرضا طایفه تبریزی)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = 9I = 3^2 I$$

$$A^{1399} = (A^2)^{699} \times A = (3^2 I)^{699} \times A = 3^{1398} I \times A = 3^{1398} A$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

چون حاصل ضرب دو ماتریس، برابر ماتریس واحد (همانی) است، پس این دو

ماتریس وارون یکدیگرند و در نتیجه داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 3 \times 7 - (-5)(-4) = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow a + b + c + d = 19$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ بی‌شمار جواب دارد، هرگاه

باشد. $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ در این صورت داریم:

$$\frac{m}{1} = \frac{1}{m} = \frac{m^2 + m^3}{4m - 2}$$

$$\frac{m}{1} = \frac{1}{m} \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

$$m = 1 \Rightarrow \frac{m^2 + m^3}{4m - 2} = \frac{1 + 1}{4 - 2} = 1 = \frac{1}{m} \Rightarrow \frac{c}{c'} = \frac{b}{b'}$$

$$m = -1 \Rightarrow \frac{m^2 + m^3}{4m - 2} = \frac{1 - 1}{-4 - 2} = 0 \neq \frac{1}{m} \Rightarrow \frac{c}{c'} \neq \frac{b}{b'}$$

بنابراین تنها به ازای $m = 1$ ، دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه ۲۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$|A^{-1}| = \frac{1}{5} \quad \text{از آنجا که } |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \text{، داریم:}$$

$$||A^{-1}| A^2| = \left| \frac{1}{5} A^2 \right| = \left(\frac{1}{5}\right)^3 |A^2|$$

$$= \frac{1}{125} \times |A|^2 = \frac{1}{125} \times 25 = \frac{1}{5}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه ۳۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

با استفاده از دستور ساروس برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های 3×3

داریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-2 - 8 + 0) - (2 - 4 + 0) = -10 - (-2) = -8$$

$$|B| = |A^2| = |A|^2 = 64$$

$$\text{اگر } B = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \text{ باشد، در این صورت داریم:}$$

$$|B| = b^3 = 64 \Rightarrow b = 4$$

$$B = 3 \times 4 = 12 \text{ مجموع درایه‌های ماتریس}$$

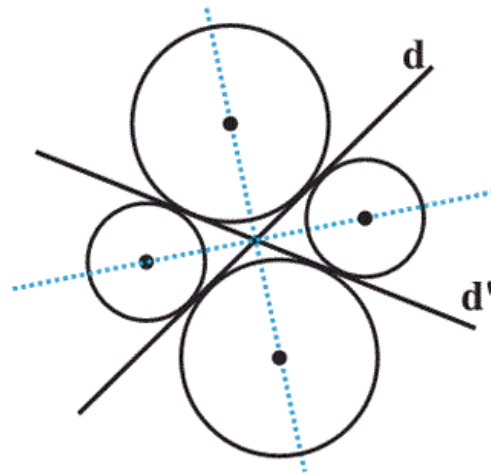
(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۲ و ۲۷ تا ۳۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



مراکز دایره‌های مماس بر دو خط
 متقاطع d و d' ، از این دو خط به
 یک فاصله‌اند، پس مراکز این دایره‌ها
 روی نیمسازهای داخلی زاویه‌های ایجاد
 شده بین دو خط d و d' قرار دارند

و چون نیمسازهای دو زاویه مکمل و مجاور هم، بر هم عمود هستند، پس مکان
 هندسی مورد نظر، دو خط عمود بر هم است.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ مشابه تمرین ۱ (الف)، صفحه ۳۹)

۴

۳✓

۲

۱

(سراسری تهرانی فارغ از کشور ۹۵)

نقاط $A(1,0)$ و $B(3,0)$ روی دایره قرار دارند، بنابراین مرکز دایره باید
 روی عمود منصف پاره خط AB به معادله $x=2$ واقع باشد. از تلاقی این
 خط با نیمساز ربع اول، مختصات مرکز دایره حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} y = x \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow O(2,2) \text{ مرکز دایره}$$

$$R = OA = \sqrt{(1-2)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{5}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ مشابه تمرین ۱ (ج)، صفحه ۴۶)

۴

۳✓

۲

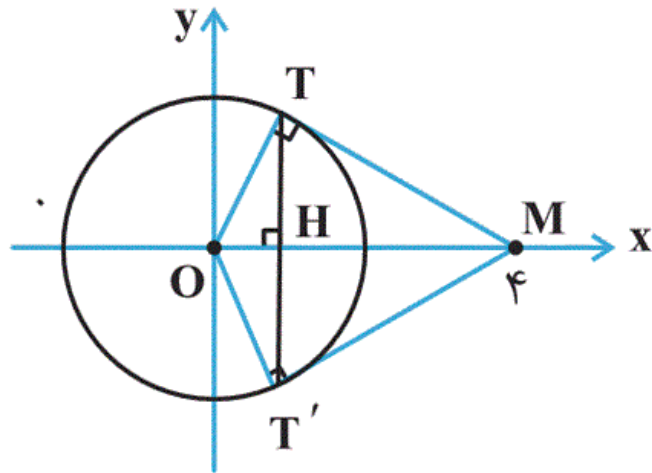
۱

مرکز و شعاع دایره به ترتیب $O(0,0)$ و $R=2$ هستند.

بنابراین $OM=4$ است و داریم:

$$\Delta OTM: MT^2 = OM^2 - OT^2 = 16 - 4 = 12$$

$$\Rightarrow MT = 2\sqrt{3}$$



از طرفی در هر مثلث قائم‌الزاویه، حاصل ضرب دو ضلع زاویه قائمه برابر است

با حاصل ضرب وتر در ارتفاع وارد بر وتر، در نتیجه:

$$OT \times MT = OM \times TH \Rightarrow 2 \times 2\sqrt{3} = 4 \times TH \Rightarrow TH = \sqrt{3}$$

دو مثلث OTM و $OT'M$ همنهشت هستند، بنابراین ارتفاع‌های وارد بر

وتر یعنی TH و $T'H$ در این مثلث‌ها برابر یکدیگرند. داریم:

$$\text{فاصله نقاط تماس} = TT' = 2TH = 2\sqrt{3}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۴

۳

۲✓

۱

مرکز دایره: $O(1, 0)$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 - 4(-3)} = \frac{1}{2} \sqrt{16} = 2$$
 شعاع دایره

فاصله مرکز دایره از خط مماس بر دایره برابر طول شعاع دایره است. پس

این فاصله را محاسبه کرده و با شعاع دایره برابر قرار می‌دهیم. داریم:

$$R = \frac{|m(1) - (0) + 2|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{|m + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{|m + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} \frac{(m + 2)^2}{m^2 + 1} = 4 \Rightarrow m^2 + 4m + 4 = 4m^2 + 4$$

$$\Rightarrow 3m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m(3m - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{4}{3} \end{cases}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۴

۳

۲ ✓

۱

معادلات دو دایره عبارتند از:

$$C_1 : (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$$

$$C_2 : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

اگر معادله دایره C_2 را از معادله دایره C_1 کم کنیم، معادله وتر مشترک دو

دایره حاصل می‌شود:

$$6x - 2y = 0 \Rightarrow y = 3x$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۴

۳

۲ ✓

۱