

سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

درسنامه ها و جزوه های ریاضی  
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور  
نمونه سوالات امتحانات ریاضی  
نرم افزارهای ریاضیات  
و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

ریاضی و آمار ۲، توابع پلکانی و قدرمطلقی - ۹ سوال

۷۱- کدامیک از توابع زیر، یک تابع پلکانی است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

$$\begin{cases} g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = |x| \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = [x] \end{cases} \quad (1)$$

$$i(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \geq 0 \\ -x^2 & , \quad x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$h(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , \quad x \geq 3 \\ 2x + 1 & , \quad x < 3 \end{cases} \quad (3)$$

۷۲- حاصل  $2\text{sign}(5 - \sqrt{6}) - \text{sign}(\sqrt{2} - 1)$  کدام است؟

۱ (۴)

-۱ (۳)

۳ (۲)

-۳ (۱)

۷۳- به ازای  $x = -2$  مقدار کدام گزینه بیشتر از سایر گزینه‌های دیگر است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

$$h(x) = [\frac{1-x}{2}] \quad (4)$$

$$k(x) = [\frac{x}{3} - 2] \quad (3)$$

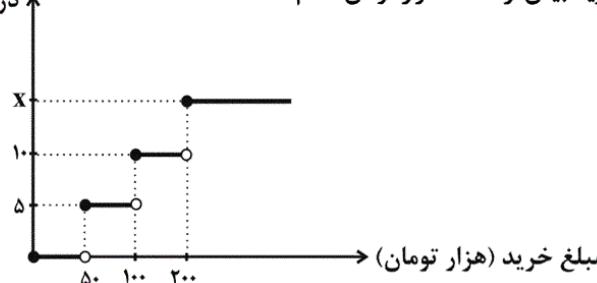
$$g(x) = [\frac{x}{4}] \quad (2)$$

$$f(x) = [2 - \frac{x}{3}] \quad (1)$$

۷۴- یک فروشگاه برای خریدهای مشتریان، طبق تابع پلکانی زیر تخفیف می‌دهد. اگر از این فروشگاه ۲۸۰ هزار تومان خرید کنیم، ۲۶۹۰۰ تومان

تخفیف شامل حال ما خواهد شد، درصد تخفیف به ازای خرید بیش از ۲۰۰ هزار تومان کدام است؟

درصد تخفیف



۱۲ (۱)

۱۵ (۲)

۱۶ (۳)

۱۸ (۴)

۷۵- برد تابع  $f(x) = [x] + 1$  با دامنه  $x < 1$  کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

$$\{1, 2, 3, 4\} \quad (2)$$

$$\{-2, -3, -4\} \quad (4)$$

$$\{0, 1, 2, 3\} \quad (1)$$

$$\{-1, -2, -3\} \quad (3)$$

۷۶- حاصل عبارت  $[-3/6] + [-6/6]$  کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

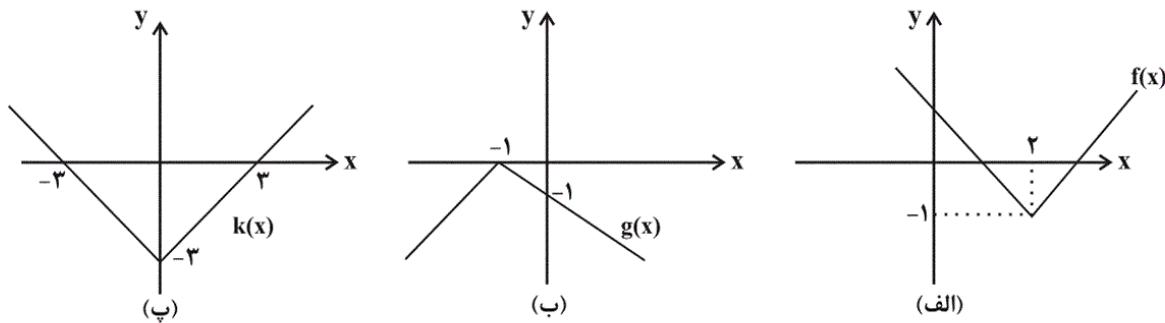
۴ صفر

-۱ (۳)

-۷/۲ (۲)

۷ (۱)

۷۷- ضابطه‌های توابع رسم شده در شکل‌های زیر به ترتیب در کدام گزینه به‌طور صحیح ذکر شده است؟



$$k(x) = |x| - 3, g(x) = |x + 1|, f(x) = |x - 2| - 1 \quad (1)$$

$$k(x) = |x| + 3, g(x) = -|x - 1|, f(x) = |x - 2| - 1 \quad (2)$$

$$k(x) = |x| + 3, g(x) = -|x + 1|, f(x) = |x - 2| - 1 \quad (3)$$

$$k(x) = |x| - 3, g(x) = -|x + 1|, f(x) = |x - 2| - 1 \quad (4)$$

۷۸- کدام مراحل زیر، برای تبدیل تابع  $f(x) = |x| + 3$  به تابع  $g(x) = |x - 4| - 1$  باید انجام بگیرد؟

(۱) نمودار  $f$  را باید ۴ واحد به چپ و ۴ واحد به پایین حرکت دهیم.

(۲) نمودار  $f$  را باید ۴ واحد به راست و ۴ واحد به بالا حرکت دهیم.

(۳) نمودار  $f$  را باید ۴ واحد به چپ و ۴ واحد به بالا حرکت دهیم.

(۴) نمودار  $f$  را باید ۴ واحد به راست و ۴ واحد به پایین حرکت دهیم.

۷۹- با توجه به ضابطه  $y = -|x - 2| + 3$  که نمودار آن در زیر رسم شده است، مساحت ناحیه هاشورخورده کدام است؟



ریاضی و آمار ۲، اعمال بروی توابع - ۱۱ سوال -

اگر  $f \times g$  باشد، در این صورت دامنه تابع  $g = \{(2, 1), (3, -1), (7, 2), (1, 0)\}$  و  $f = \{(1, 2), (-3, 4), (3, 5), (7, -1)\}$  -۸۱.

به ترتیب از راست به چپ کدام است؟  $f - g$

$$\{-3\}, \{3, 7\} \quad (2)$$

$$\{-3\}, \{1, 3, 7\} \quad (1)$$

$$\{2, 6, -3\}, \{0, -5, -2\} \quad (4)$$

$$\{1, 3, 7\}, \{1, 3, 7\} \quad (3)$$

اگر  $f + g$  باشد، تابع  $g = \{(-1, 5), (3, -4), (0, 2), (4, 3)\}$  و  $f = \{(2, -1), (-1, 0), (3, 4), (0, 3)\}$  -۸۲

$$\{(-1, 5), (3, 8), (0, 5)\} \quad (2)$$

$$\{(-1, 5), (3, 0), (0, 5), (2, -1), (4, 3)\} \quad (1)$$

$$\{(-1, 5), (0, 5)\} \quad (4)$$

$$\{(-1, 5), (3, 0), (0, 5)\} \quad (3)$$

اگر  $\frac{(f - g)(1)}{\frac{f}{g}(10)}$  کدام است؟  $g = \{(-3, 6), (1, -6), (10, 20)\}$  و  $f = \{0, 4\}, (1, 8), (10, 12)\}$  -۸۳

$$\frac{71}{3} \quad (4)$$

$$\frac{61}{3} \quad (3)$$

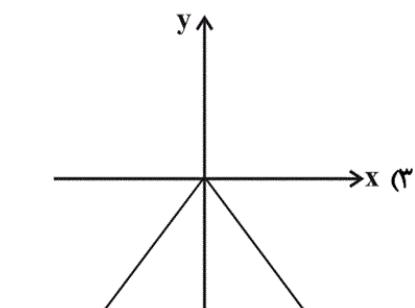
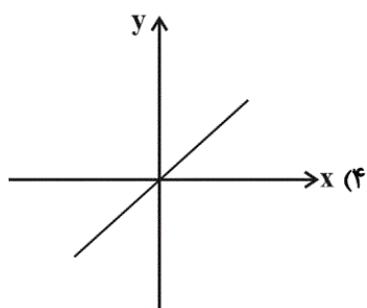
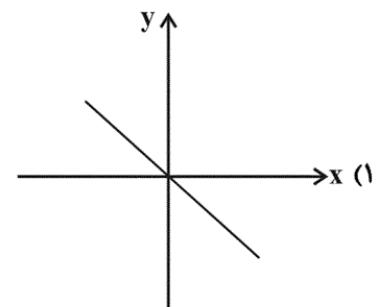
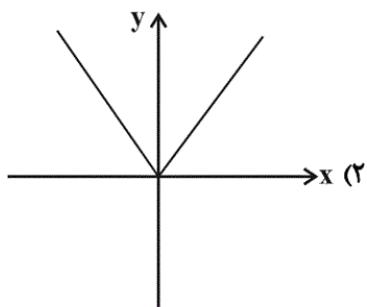
$$\frac{70}{3} \quad (2)$$

$$\frac{65}{3} \quad (1)$$

اگر  $(f \times f) + g$  باشد، تابع  $g = \{0, 8\}, (3, 9), (10, 11)\}$  و  $f = \{0, 2\}, (-1, -6), (3, 10)\}$  -۸۴

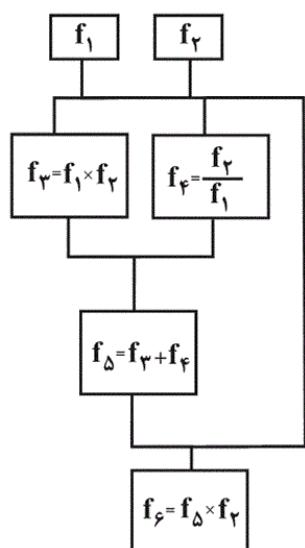
$$\{(3, 18), (10, 120)\} \quad (4) \quad \{(-1, 12), (0, 100)\} \quad (3) \quad \{(0, 18), (3, 96)\} \quad (2) \quad \{(0, 12), (3, 109)\} \quad (1)$$

اگر  $h(x) = f(x) \times g(x) = \text{sign}(x)$  و  $f(x) = -x$  باشد، در این صورت نمودار تابع  $g(x)$  کدام است؟



اگر  $f_1(x) = -x + 4$  و  $f_2(x) = 2x + 1$  باشد، مقدار تابع  $f_2(-2)$  کدام است؟

۶۴/۶ (۱)

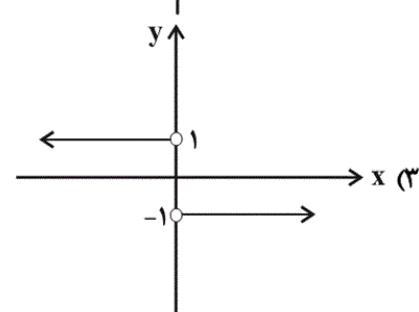
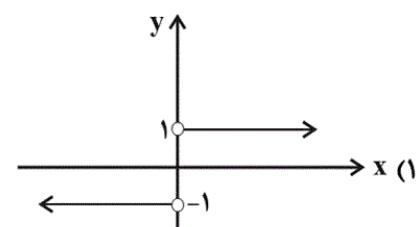
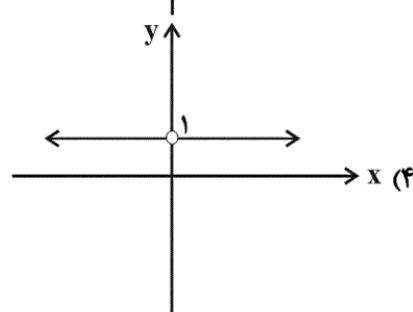
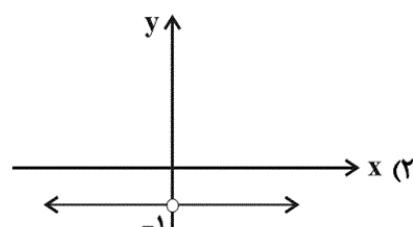


-۱۸/۴ (۲)

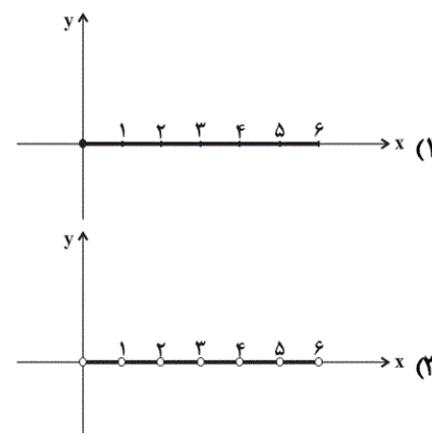
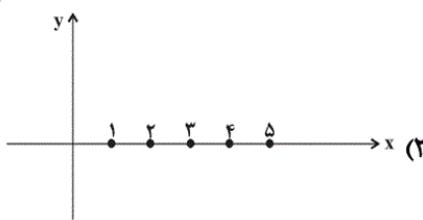
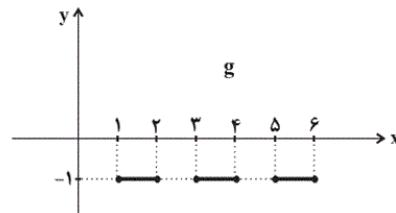
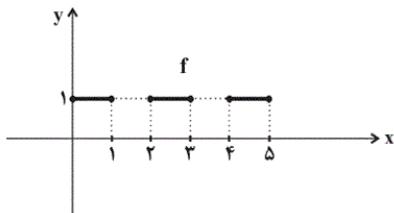
۵۵/۵ (۳)

-۴۲/۵ (۴)

اگر  $f(x) = -|x|$  و  $g(x) = |x|$  باشد، نمودار تابع  $\frac{g}{f}$  کدام است؟



-۸۷- با توجه به نمودار دو تابع  $f$  و  $g$  در شکل زیر، نمودار تابع  $f + g$  کدام است؟



۴) تابع  $f + g$  وجود ندارد.

-۸۸- اگر  $\frac{f}{g} = \{(-1, 1), (2, -1)\}$  و  $f = \{(2, -1), (3, -1), (1, -2), (-1, 4), (0, 3)\}$  باشد، تابعی با سه عضو باشد و مجموع اعضای

دامنه آن برابر با ۴ باشد، حاصل ضرب اعضای برد تابع  $g$  کدام است؟

۴) صفر

۳) ۳

-۴) ۲

۴) ۱

-۸۹- اگر  $\frac{f}{f-g}$  کدام است؟  $g = \{(2, 3), (4, -1), (-1, 3)\}$  و  $f = \{(2, 3), (4, 1), (-1, -2)\}$

$\left\{\left(4, \frac{1}{2}\right), \left(-1, \frac{2}{3}\right)\right\}$  ۲

$\left\{\left(4, \frac{1}{2}\right), \left(-1, \frac{2}{3}\right), (2, 0)\right\}$  ۱

$\left\{\left(4, 0\right), \left(-1, \frac{2}{3}\right), (2, 0)\right\}$  ۴

$\left\{\left(-1, \frac{2}{3}\right)\right\}$  ۳

-۹۰- اگر  $f(x) = [x]$  و  $g(x) = \text{sign}(x)$  باشد، در این صورت مساحت زیر نمودار تابع  $h(x) = f(x) \times g(x)$  در فاصله  $x < 3$  کدام است؟

(۱)، نماد جزء صحیح است.

۶) ۴

۴) ۳

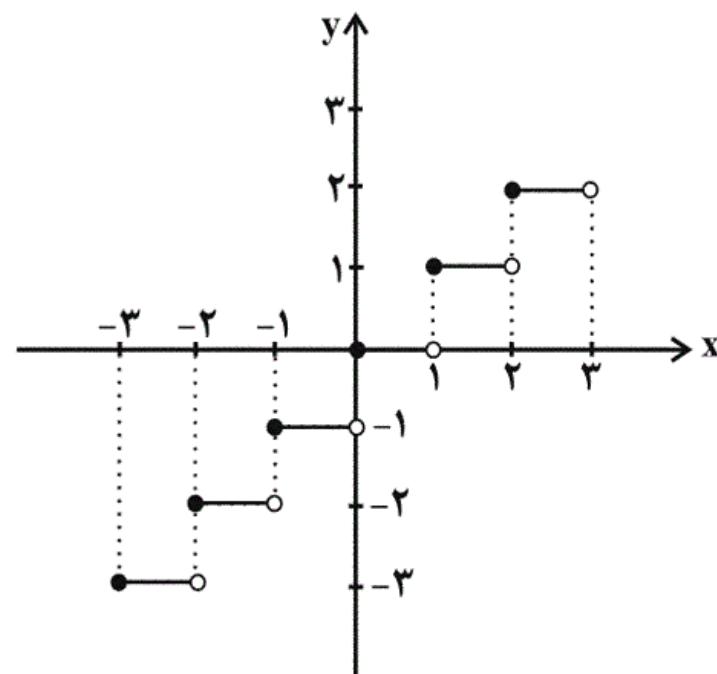
۲) ۲

۱) ۱

(امیر زرادر، توابع پلکانی و قدر مطلقی، صفحه ۳۴ و ۳۵)

-۷۱

نمودار تابع  $f(x) = [x]$  با دامنه  $\mathbb{R}$  به شکل زیر است:



مالحظه می کنید که نمودار از پاره خط های افقی تشکیل شده پس پلکانی محسوب

می شود.

۴

۳

۲

۱ ✓

(امیر مکمودیان، توابع پلکانی و قدر مطلقی، صفحه ۳۴)

$$1 < 2 < 4 \Rightarrow \sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4} \Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2$$

$$1 - 1 < \sqrt{2} - 1 < 2 - 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{2} - 1 < 1 \Rightarrow \sqrt{2} - 1 > 0$$

$$\text{sign}(\sqrt{2} - 1) = 1$$

$$4 < 6 < 9 \Rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{6} < \sqrt{9} \Rightarrow 2 < \sqrt{6} < 3 \Rightarrow -3 < -\sqrt{6} < -2$$

$$5 - 3 < 5 - \sqrt{6} < 5 - 2 \Rightarrow 2 < 5 - \sqrt{6} < 3 \Rightarrow 5 - \sqrt{6} > 0$$

$$\text{sign}(5 - \sqrt{6}) = 1 \Rightarrow 2 \text{ sign}(5 - \sqrt{6}) - \text{sign}(\sqrt{2} - 1) = 2 \times 1 - 1 = 1$$

 ✓ ۳ ۲ ۱

(فریده هاشمی، توابع پلکانی و قدر مطلقی، صفحه ۳۷ تا ۳۹)

با جایگذاری  $x = -2$  در تک تک گزینه ها داریم:

$$1) f(x) = [2 - \frac{x}{3}] \xrightarrow{x=-2} f(-2) = [2 - \frac{(-2)}{3}] = [2 + \frac{2}{3}] = 2$$

$$2) g(x) = [\frac{x}{4}] \xrightarrow{x=-2} g(-2) = [-\frac{2}{4}] = [-\frac{1}{2}] = -1$$

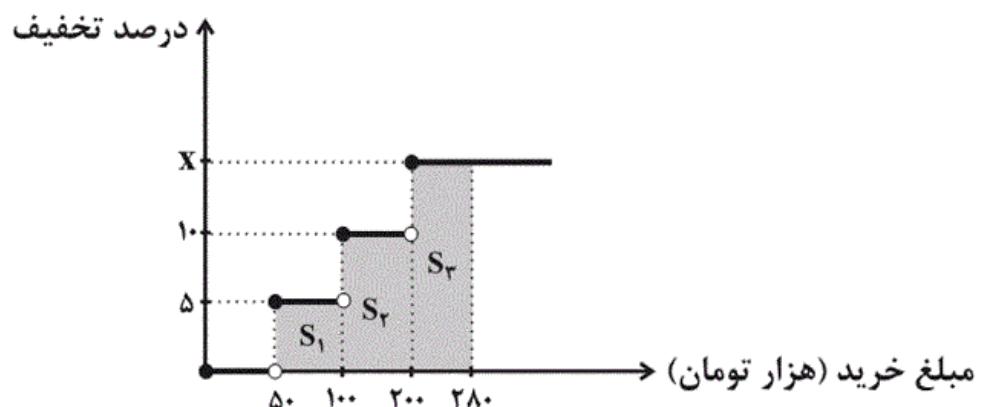
$$3) k(x) = [\frac{x}{3} - 2] \xrightarrow{x=-2} k(-2) = [-\frac{2}{3} - 2] = -\frac{8}{3}$$

$$4) h(x) = [\frac{1-x}{2}] \xrightarrow{x=-2} h(-2) = [\frac{1-(-2)}{2}] = [\frac{3}{2}] = 1$$

 ۳ ۲ ۱ ✓

با توجه به نمودار زیر، فرض می‌کنیم درصد تخفیف خرید بالای ۲۰۰ هزار تومان  $x$

باشد، در این صورت طبق نمودار زیر داریم:



$$\text{مقدار تخفیف} = S_1 + S_2 + S_3 \Rightarrow 26900 = (100 - 50) \times 1000 \times \frac{5}{100}$$

$$+ (200 - 100) \times 1000 \times \frac{10}{100} + (280 - 200) \times 1000 \times \frac{X}{100}$$

$$\Rightarrow 26900 = 25000 + 10000 + 800X \Rightarrow 800X = 26900 - 35000$$

$$\Rightarrow 800X = 14400 \Rightarrow X = 18$$

✓

۳

۲

۱

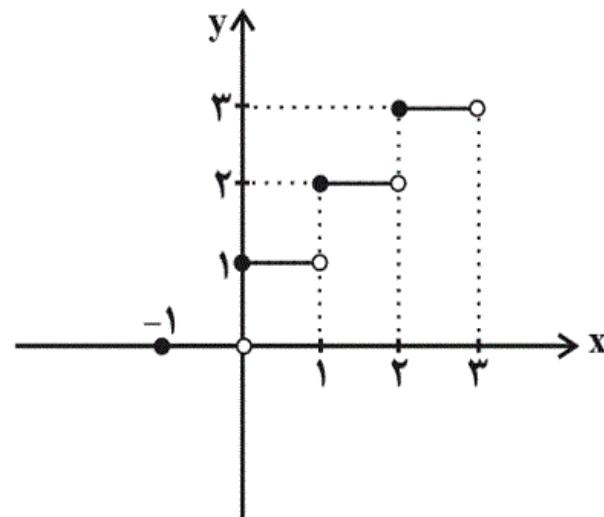
ابتدا دامنه تابع را به بازه های کوچکتر بین دو عدد صحیح متواالی تقسیم می کنیم، داریم:

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow f(x) = -1 + 1 = 0$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = 0 + 1 = 1$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = 1 + 1 = 2$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow f(x) = 2 + 1 = 3$$



با توجه به نمودار برد تابع  $f$  برابر است با:  $\{0, 1, 2, 3\}$

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\begin{aligned} [-3/6] &= [3/6] = 3 \\ |[-3/6]| &= |-4| = 4 \end{aligned} \Rightarrow \text{جواب نهایی} \Rightarrow 3 + 4 = 7$$

۴

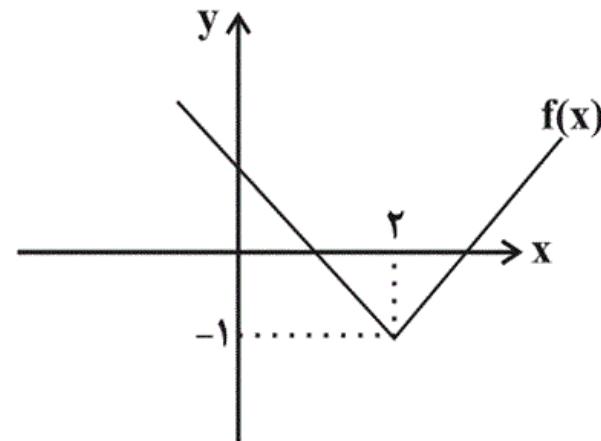
۳

۲

۱ ✓

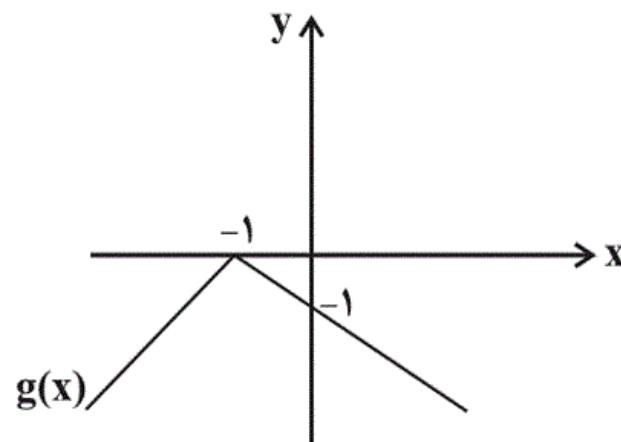
تابع  $f(x)$  همان  $|x|$  است که ابتدا دو واحد به سمت راست و سپس یک واحد به

پایین منتقل شده است، پس  $f(x) = |x - 2| - 1$  است.



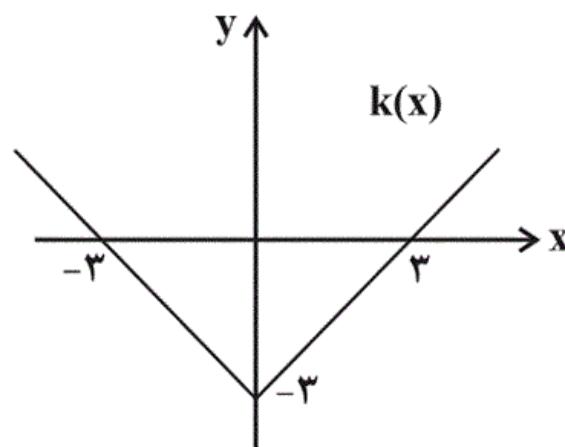
در قسمت (ب)، تابع  $|x| - 1$  یک واحد به سمت چپ منتقل شده پس تابع به

صورت  $g(x) = -|x + 1|$  است.



در قسمت (پ)، تابع  $|x| - 3$  سه واحد به پایین منتقل شده پس تابع به صورت

صورت  $k(x) = |x| - 3$  است.



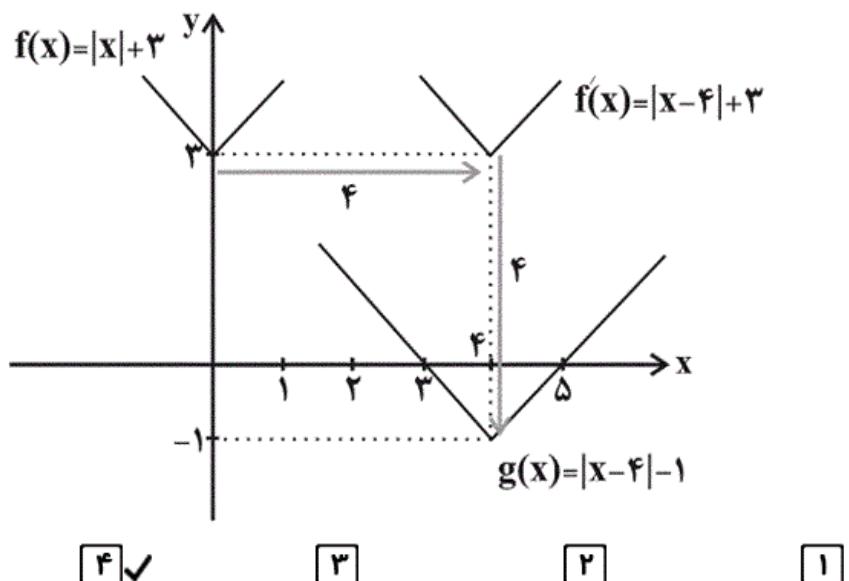
۴ ✓

۳

۲

۱

با توجه به نمودار تابع  $f$  و  $g$  در می‌باییم که ابتدا نمودار تابع  $f$  چهار واحد به سمت راست و سپس چهار واحد نیز به سمت پایین منتقل شده است.



ابتدا تابع را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

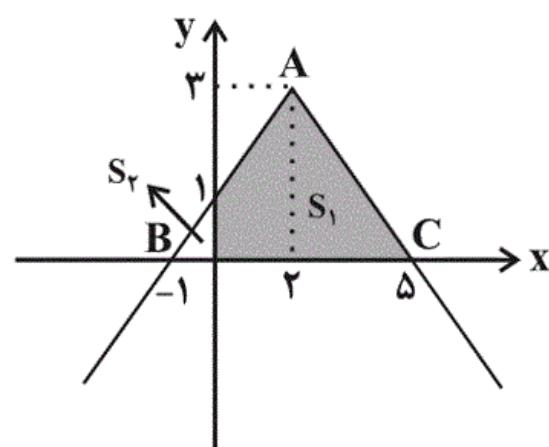
$$y = -|x-2| + 3 = \begin{cases} -(x-2) + 3 & , \quad x-2 \geq 0 \\ x-2+3 & , \quad x-2 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} -x+5 & , \quad x \geq 2 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 2 & 5 \\ y & 3 & 0 \end{array} \\ x+1 & , \quad x < 2 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 2 & -1 \\ y & 3 & 1 \end{array} \end{cases}$$

نمودار داده شده را رسم می‌کنیم، مساحت  $S_1$  خواسته سؤال است.

ابتدا مساحت مثلث  $ABC$  را به دست می‌آوریم:

طول ارتفاع مثلث ۳ واحد است و قاعده  $BC$  را محاسبه می‌کنیم:



پس طول قاعده  $BC$  برابر با  $= 5 - (-1) = 6$  واحد است.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 6 = 9$$

حال مساحت  $S_2$  را می‌یابیم:

$$S_2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$S_1 = S_{\Delta ABC} - S_2 = 9 - \frac{1}{2} = 8.5$$

-۸۰

(هادی پلاور، اعمال بر روی تابع، صفحه ۳۵ تا ۵۳)

دامنه تابع  $f \times g$  و  $f - g$  از اشتراک دامنه هر دو تابع بدست می‌آید و هر دو دامنه با

یکدیگر برابرند، داریم:

$$D_f = \{1, -3, 3, 7\}$$

$$D_g = \{2, 3, 7, 1\}$$

$$D_{f \times g} = D_{f-g} = D_f \cap D_g = \{1, -3, 3, 7\} \cap \{2, 3, 7, 1\} = \{1, 3, 7\}$$

۴

۳

۲

۱

-۸۱

(محمد بهیرایی، اعمال بر روی توابع، صفحه ۳۵ تا ۵۳)

ابتدا دامنه  $f + g$  را می‌باییم که از اشتراک دامنه دو تابع بدست می‌آید.

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{f+g} = \{2, -1, 3, 0\} \cap \{-1, 3, 0, 4\} = \{-1, 3, 0\}$$

$$f + g = \{(-1, 0+5), (3, 4+(-4)), (0, 3+2)\} = \{(-1, 5), (3, 0), (0, 5)\}$$

۴

۳

۲

۱

-۸۲

(امیر زراندوز، اعمال بر روی توابع، صفحه ۳۵ تا ۵۳)

$$(f - g)(1) = f(1) - g(1) = 8 - (-6) = 14$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{14}{3}}{\frac{5}{5}} = \frac{5 \times 14}{3} = \frac{70}{3}$$

۴

۳

۲

۱

دامنه تابع  $f \times f$  همان دامنه تابع  $f$  است، لذا ابتدا تابع  $f \times f$  را می‌یابیم:

$$f \times f = \{(0, 2 \times 2), (-1, (-6) \times (-6)), (3, 10 \times 10)\}$$

$$= \{(0, 4), (-1, 36), (3, 100)\}$$

دامنه تابع  $f \times f + g$  از اشتراک دامنه تابع  $f$  و  $g$  بدست می‌آید، داریم:

$$D_{f \times f + g} = D_f \cap D_g = \{0, -1, 3\} \cap \{0, 3, 10\} = \{0, 3\}$$

$$f \times f + g = \{(0, 4 + 8), (3, 100 + 9)\} = \{(0, 12), (3, 109)\}$$

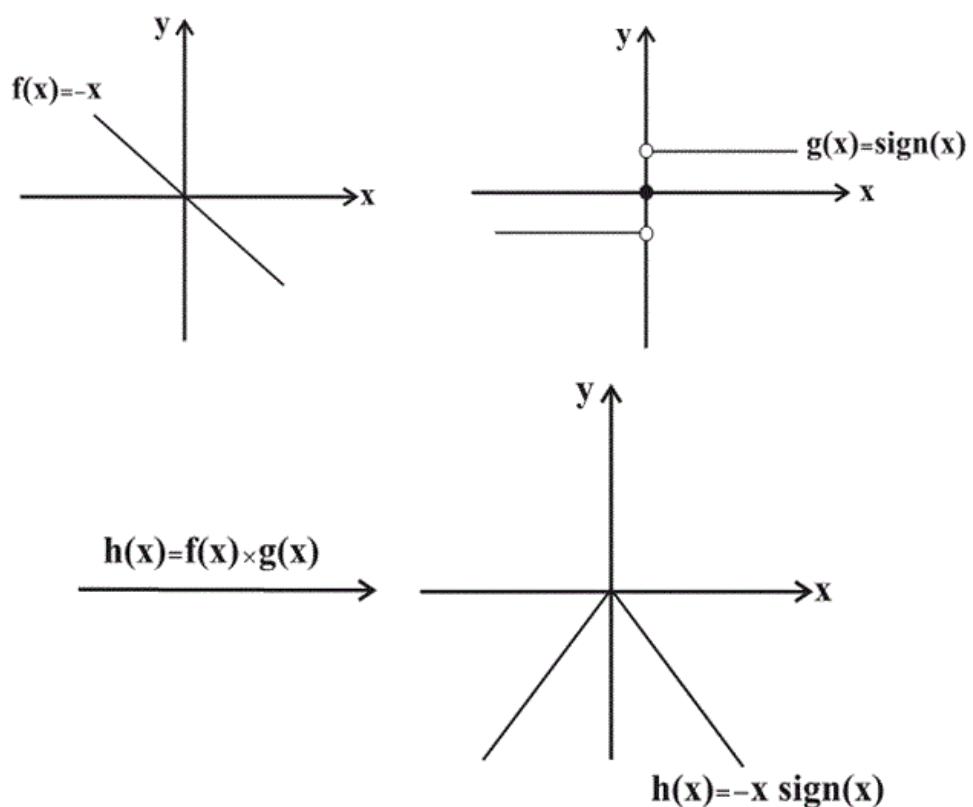
۴

۳

۲

۱ ✓

ابتدا نمودار هر یک از توابع را جداگانه رسم می‌کنیم:



۴

۳ ✓

۲

۱

ابتدا خوابط توابع  $f_3$ ,  $f_4$  و  $f_5$  را به ترتیب می‌یابیم:

$$f_1(x) = -x + 4, \quad f_2(x) = 2x + 1$$

$$f_3 = f_1 \times f_2 = (-x + 4) \times (2x + 1) = -2x^2 - x + 8x + 4 = -2x^2 + 7x + 4$$

$$f_4 = \frac{f_2}{f_1} = \frac{2x + 1}{-x + 4}$$

$$f_5 = f_3 + f_4 = -2x^2 + 7x + 4 + \frac{2x + 1}{-x + 4}$$

$$f_6 = f_5 \times f_2 = \left( -2x^2 + 7x + 4 + \frac{2x + 1}{-x + 4} \right) \times (2x + 1)$$

$$\Rightarrow f_6(-2) = \left( -2 \times (-2)^2 + 7 \times (-2) + 4 + \frac{2 \times (-2) + 1}{-(-2) + 4} \right) \times (2 \times (-2) + 1)$$

$$= (-8 - 14 + 4 - \frac{3}{5})(-3) = 55 / 5$$

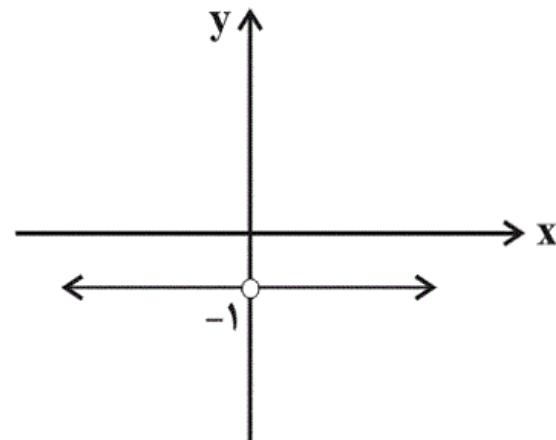
۱

۲

۳

۴

$$\frac{g}{f} = \frac{|x|}{-|x|} = \begin{cases} \frac{x}{-x} = -1 & , \quad x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1 & , \quad x < 0 \end{cases}$$



دقت کنید تابع  $\frac{f}{g}$  در  $x = 0$  تعریف نمی‌شود.

۴

۳

۲✓

۱

با توجه به نمودار دو تابع درمی‌یابیم که دامنهٔ دو تابع  $f$  و  $g$  فقط در نقاطی به طول

اعداد طبیعی  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  با یکدیگر اشتراک دارند که به ازای طول این نقاط مقدار

تابع  $f$  برابر یک و مقدار تابع  $g$  برابر  $-1$  است که حاصل جمع آن‌ها صفر خواهد شد.

پس نمودار گزینه «۲» پاسخ صحیح است.

۴

۳

۲✓

۱

(امیر مفمودیان، اعمال بر روی تابع، صفحه ۱۴۵ تا ۱۴۳)

از آنجا که  $\{x \mid g(x) = 0\}$  است، دامنه تابع  $g$  شامل  $x = -1$  و  $x = 2$  است. از آنجا که تابع  $g$  شامل سه عضو دامنه با مجموع اعضای ۴ است، عضو سوم دامنه  $g$  برابر با ۳ است.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(-1) = \frac{f(-1)}{g(-1)} = \frac{4}{g(-1)} = 1 \Rightarrow g(-1) = 4$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{-1}{g(2)} = -1 \Rightarrow g(2) = 1$$

از آنجا که  $\{3\} \in D_f \cap D_g$  است اما در تابع  $\frac{f}{g}$  وجود ندارد، باید  $g(3) = 0$  باشد.

بنابراین حاصل ضرب اعضای برد  $g$  برابر است با  $0 \times (1) \times (4) = 0$ .

 ✓ ۳ ۲ ۱

(فریده هاشمی، اعمال بر روی تابع، صفحه ۱۴۵ تا ۱۴۳)

ابتدا خود تابع  $f - g$  را می‌یابیم:

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \{2, 4, -1\} \cap \{2, 4, -1\} = \{2, 4, -1\}$$

$$f - g = \{(2, 3 - 2), (4, 1 - (-1)), (-1, -2 - 2)\} = \{(2, 1), (4, 2), (-1, -5)\}$$

حال تابع  $\frac{f}{f-g}$  را تشکیل می‌دهیم:

$$D_{\frac{f}{f-g}} = D_f \cap D_{f-g} - \{x \mid f - g = 0\}$$

$$D_{\frac{f}{f-g}} = \{2, 4, -1\} \cap \{2, 4, -1\} - \{2\} = \{4, -1\}$$

$$\frac{f}{f-g} = \left\{ \left(4, \frac{1}{1}\right), \left(-1, \frac{-2}{-5}\right) \right\} = \left\{ \left(4, \frac{1}{1}\right), \left(-1, \frac{2}{5}\right) \right\}$$

 ۳ ۲✓ ۱

ابتدا با توجه به فاصله‌های متواالی بین هر دو عدد صحیح متواالی داریم:

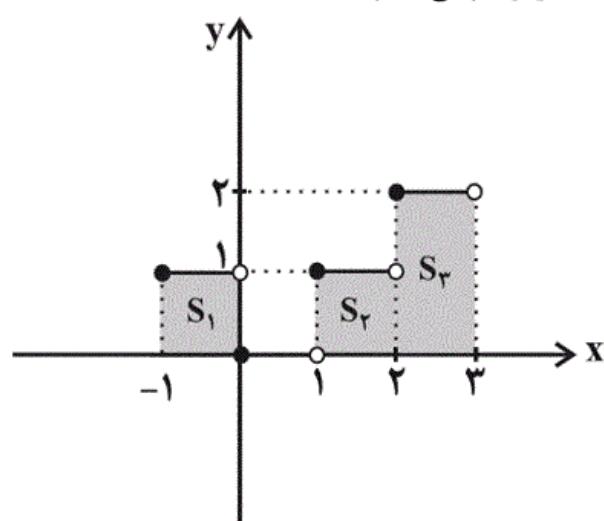
$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = -1 \\ g(x) = -1 \end{cases} \Rightarrow h(x) = f(x) \times g(x) = (-1) \times (-1) = 1$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow h(x) = 0 \times 0 = 0$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ g(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow h(x) = 1 \times 1 = 1$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2 \\ g(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow h(x) = 2 \times 1 = 2$$

حال نمودار تابع  $h(x)$  را رسم می‌کنیم:



$$\text{مساحت کل } = S_1 + S_2 + S_3 = 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 2 = 1 + 1 + 2 = 4$$

۴

۳ ✓

۲

۱