

سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

درسنامه ها و جزوه های ریاضی  
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور  
نمونه سوالات امتحانات ریاضی  
نرم افزارهای ریاضیات

و...

@riazisara

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

@riazisara.ir

ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

ریاضی عمومی ، مشتق - ۷ سوال

۱۰۴- یک بادکنک باد شده به شکل کره به شعاع اولیه ۱۰ سانتی‌متر موجود است. اگر شروع به باد کردن مجدد آن کنیم به طوری که در هر ثانیه یک میلی‌متر به شعاع آن افزوده شود، آنگاه متوسط تغییر مساحت این بادکنک در ۲۰ ثانیه اول چند سانتی‌متر مربع بر ثانیه است؟

- ۸π (۱)      ۸/۸π (۲)      ۷/۲π (۳)      ۹/۶π (۴)

۱۰۵- تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{1+|x-2|}$  در  $x = \alpha$  مشتق ندارد. حاصل  $f'_+(\alpha) - f'_-(\alpha)$  کدام است؟

- ۱ (۱)      ۱ (۲)      صفر (۳)      تعریف نشده (۴)

۱۰۶- اگر داشته باشیم  $f(x) = 2x^2 - 1$  و  $g(x) = x^3$ ، آنگاه حاصل  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) \cdot g(1+\Delta x) - 1}{\Delta x}$  کدام است؟

- ۵ (۱)      ۶ (۲)      ۷ (۳)      ۸ (۴)

۱۰۷- اگر  $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+5}}$ ، آنگاه مشتق تابع  $f(\sqrt[3]{x})$  در  $x = 8$  کدام است؟

- $\frac{1}{12}$  (۱)       $\frac{4}{9}$  (۲)       $\frac{1}{27}$  (۳)       $\frac{2}{9}$  (۴)

۱۰۸- خط مماس بر منحنی به معادله  $y = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$  در نقطه  $x = \frac{\pi}{4}$  واقع بر آن، محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

- $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}$  (۱)       $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}$  (۲)       $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$  (۳)       $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}$  (۴)

۱۰۹- یکی از خطوط قائم بر منحنی به معادله  $y = 3x^2 + x - 1$ ، با نیمساز ربع اول و سوم موازی است. عرض از مبدأ این خط قائم، کدام است؟

- $-\frac{2}{3}$  (۱)       $\frac{1}{3}$  (۲)       $-\frac{4}{3}$  (۳)      ۱ (۴)

۱۱۰- اگر  $f(x) = \frac{x - 2\sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}$ ، حاصل  $f''(1)$  کدام است؟

$-\frac{1}{2}$  (۴)

$\frac{1}{2}$  (۳)

$\frac{1}{4}$  (۲)

$-\frac{1}{4}$  (۱)

ریاضی عمومی، تابع - ۱۹ سوال

۸۱- اگر  $f = \{(1, 2), (-1, 3), (3, -1), (2, 0)\}$ ، آنگاه  $f(f(-1))$  کدام است؟

صفر (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

-۱ (۱)

۸۶- رأس سهمی به معادله  $y = 7 + k(x - 3)(x + 1)$  روی نیمساز ربع دوم و چهارم واقع است. این سهمی محور  $y$ ها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۸۷- اگر ریشه‌های معادله  $x^2 - 3x - 1 = 0$  برابر  $\alpha - 1$  و  $\beta - 1$  باشند، آنگاه معادله‌ای با ریشه‌های  $2\alpha$  و  $2\beta$  در کدام گزینه آمده است؟

$X^2 - 6X - 4 = 0$  (۲)

$X^2 - 6X - 2 = 0$  (۱)

$X^2 - 10X + 16 = 0$  (۴)

$X^2 - 10X + 12 = 0$  (۳)

۸۸- اگر نامعادله  $0 < -6[x] - 5[x]^2$  در بازه  $[a, b]$  برقرار باشد، بیشترین مقدار  $b - a$  کدام است؟ ([ ]: جزء صحیح)

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

۸۹- اگر  $n$  عددی طبیعی باشد، آنگاه حاصل عبارت  $[\sqrt{4n^2 + 2n + 1}] + [\sqrt[3]{n^3 + 1}]$  همواره کدام است؟ ([ ] علامت جزء صحیح است.)

$3n$  (۴)

$4n + 1$  (۳)

$4n - 1$  (۲)

$2n + 1$  (۱)

۹۰- مجموعه تمام مقادیر  $m$ ، که به ازای آن‌ها معادله  $|x^2 - 6x + 8| = m$  دارای چهار جواب متمایز باشد، کدام است؟

$m > 1$  (۲)

$m > 0$  (۱)

$0 < m < 1$  (۴)

$0 < m < 2$  (۳)

۹۱- مجموعه جواب معادله  $|x^2 + 4| - |x^2 + 3x + 10| = |3x + 6|$  کدام بازه است؟

$(-2, +\infty)$  (۲)

$[-2, +\infty)$  (۱)

$(-\infty, -2]$  (۴)

$(-\infty, -2)$  (۳)

۹۲- نمودار تابع  $y = \frac{|x|}{x} \sqrt{x+4}$  از کدام نواحی محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

(۴) سوم و چهارم

(۳) دوم و چهارم

(۲) اول و سوم

(۱) اول و دوم

۹۳- اگر تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \frac{x^2 + 3ax + 6a - 4}{x + 2}$  و دامنه  $\mathbb{R} - \{-2\}$  یک تابع همانی باشد، آنگاه حاصل  $f(3a)$  کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۹۴- اگر  $f = \{(1,0), (0,2), (2,3), (-1,1)\}$  و  $g = \{(1,2), (0,1), (-2,-1), (2,4)\}$  آنگاه مجموع اعضای مجموعه برد تابع  $f^{-1} - g$  کدام است؟

(۴) -۹

(۳) -۸

(۲) -۷

(۱) -۶

۹۵- اگر  $f(x) = \sqrt{x+1}$  و  $g(x) = -|\sqrt{x+1}| + 2$ ، آنگاه دامنه تابع  $f \circ g$  کدام است؟

(۴)  $[4, +\infty)$

(۳)  $[-2, 0]$

(۲)  $[0, 4]$

(۱)  $\{0\}$

۹۶- اگر  $f(x) = \sqrt{\tan(\pi|x|)}$ ، آنگاه  $(f \circ f)\left(\frac{-1}{4}\right)$  کدام است؟

(۴)  $\frac{1}{2}$

(۳) ۱

(۲) تعریف نمی‌شود.

(۱) صفر

۹۷-  $f$  و  $g$  دو تابع خطی هستند که عرض از مبدأ آن‌ها به ترتیب  $-4$  و  $2$  است. اگر  $(f \circ g)(x) = x$ ، آنگاه مساحت ناحیه محدود به محور  $x$  ها و دو تابع  $f$  و  $g$  کدام است؟

(۴) ۲۴

(۳) ۱۶

(۲) ۸

(۱) ۱۲

۹۸- مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله حسابی برابر با  $\frac{n(3n-1)}{2}$  است. قدر نسبت دنباله‌ای که جملات ردیف زوج در این دنباله می‌سازند، کدام است؟

(۴) ۱

(۳) ۶

(۲) ۳

(۱)  $\frac{3}{2}$

۹۹- کدام دنباله، صعودی و کراندار است؟

$$v_n = \frac{n^2 + 3}{n^2 + 2} \quad (۲)$$

$$u_n = \frac{n^2 + 5}{n + 4} \quad (۱)$$

$$b_n = \cos \frac{n\pi}{2} \quad (۴)$$

$$a_n = \cos \frac{\pi}{n} \quad (۳)$$

۱۰۰- اگر  $1 + \log_{\frac{x}{y}} = \log_{\frac{y}{x}}$  و  $x^2 + y^2 = 21$ ، آن گاه لگاریتم  $\frac{2x}{y}$  در پایه  $\frac{1}{3}$ ، کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳) ۲ (۴) -۲

۱۰۱- مجموع جواب‌های معادله  $\cos x = \cos(\pi + 3x)$ ، در فاصله  $(0, 2\pi)$  کدام است؟

- (۱)  $3\pi$  (۲)  $4\pi$  (۳)  $5\pi$  (۴)  $6\pi$

۱۰۲- معادله  $2 \cos^2 2x = \sin 2x + 1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۱۰۳- جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin(\pi - 2x) + \sin(\frac{3\pi}{2} + x) + \cos(\pi + x) = 0$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) کدام است؟

- (۱)  $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$  (۲)  $x = k\pi$  (۳)  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$  (۴)  $x = 2k\pi$

ریاضی عمومی، احتمال - ۴ سوال

۸۲- از معادله  $\frac{P(n-1, 3)}{C(n, 5)} = 10$ ، مقدار  $n$  کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴) ۶

۸۳- در فضای نمونه‌ای سه بار پرتاب یک سکه، پیشامدهای زیر را در نظر بگیرید:

A: همگی یکسان بیایند.

B: حداکثر یک بار رو بیاید.

C: حداقل یک بار رو و حداقل یک بار پشت بیاید.

چه تعداد از جفت پیشامدهای زیر از هم مستقل‌اند؟

- (الف) A, B (ب) A, C (پ) B, C  
(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۸۴- در ظرف A، ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در ظرف B، ۳ مهره سفید و ۲ مهره سیاه وجود دارد. به ظرف B چند مهره سیاه اضافه کنیم تا در انتخاب تصادفی یک ظرف و خارج کردن مهره‌ای از آن، احتمال سفید بودن و سیاه بودن مهره انتخابی با هم برابر باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۵- در آزمایشگاهی ۴ موش سالم و ۶ موش بیمار نگهداری می‌شوند. به تصادف و به صورت متوالی سه موش از بین آنها انتخاب

می‌کنیم. اگر بدانیم که موش اول بیمار است، با کدام احتمال دو موش دیگر هر دو سالم یا هر دو بیمار خواهند بود؟

$$\frac{۳۲}{۱۰۰} \quad (۴)$$

$$\frac{۴}{۱۰} \quad (۳)$$

$$\frac{۳۲}{۹۰} \quad (۲)$$

$$\frac{۴}{۹} \quad (۱)$$

### ۱۰۴- گزینه ۲»

(ابراهیم شاه ابراهیمی)

۲۰ ثانیه اول یعنی بازه زمانی ۰ تا ۲۰ ثانیه:

$$4\pi r^2 = \text{مساحت کره}$$

$$S(0) = 4\pi(10)^2 \leftarrow r = 10\text{cm} \leftarrow t = 0 \text{ در}$$

$$S(20) = 4\pi(12)^2 \leftarrow r = 10 + (20 \times 0/1) = 12\text{cm} \leftarrow t = 20 \text{ در}$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{S(20) - S(0)}{20 - 0} = \frac{4\pi(12)^2 - 4\pi(10)^2}{20}$$

$$= \frac{4\pi(144 - 100)}{20} = \frac{44\pi}{5} = 8.8\pi$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۳۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_+(2) = \frac{1}{2\sqrt{2-1}} = \frac{1}{2} \\ f'_-(2) = -\frac{1}{2\sqrt{3-2}} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

بنابراین  $\alpha = 2$  و داریم:

$$\Rightarrow f'_+(\alpha) - f'_-(\alpha) = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

(مشتق توابع) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۶۹ تا ۷۱)

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۴۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$L = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) \cdot g(1 + \Delta x) - 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) \cdot g(1 + \Delta x) - f(1) \cdot g(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g)(1 + \Delta x) - (f \cdot g)(1)}{\Delta x} = (f \cdot g)'(1) \quad (*)$$

$$(f \cdot g)(x) = (2x^2 - 1)(x^3) = 2x^5 - x^3 \Rightarrow (f \cdot g)'(x) = 10x^4 - 3x^2$$

$$\Rightarrow (f \cdot g)'(1) = 10 - 3 = 7 \xrightarrow{(*)} L = 7$$

(مشتق توابع) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۷۱ تا ۷۳)

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$y(x) = f(\sqrt[3]{x}) \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} f'(\sqrt[3]{x}) \Rightarrow y'(8) = \frac{1}{12} f'(2) \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+5}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(\sqrt{x^2+5}) - \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+5}}\right)(2x-1)}{x^2+5}$$

$$\Rightarrow f'(2) = \frac{2(3) - \left(\frac{2}{3}\right)(3)}{9} = \frac{4}{9} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow y'(8) = \frac{1}{12} f'(2) = \frac{1}{12} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{27}$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۴۳)

۴

۳ ✓

۲

۱



$$\Rightarrow y' = \frac{\cos^3 x + 2 \cos x \sin^2 x}{\cos^4 x} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} m = 3\sqrt{2}$$

$$\frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \text{ مقدار تابع در } x = \frac{\pi}{4} \text{ برابر است با:}$$

معادله خط مماس بر منحنی در  $x = \frac{\pi}{4}$  برابر است با:

$$y - \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{y=0} x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}$$

(مشتق توابع) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۶۵ تا ۶۹ و ۷۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

### ۱۰۹- گزینه «۱»

(مسئله فایلو)

$$y = 3x^2 + x - 1 \Rightarrow y' = 6x + 1$$

پس شیب خط مماس بر این منحنی در  $x = x_0$ ، برابر  $m = 6x_0 + 1$  و

شیب خط قائم بر آن در این نقطه برابر  $m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{6x_0 + 1}$  است. چون

شیب نیم‌ساز ربع اول و سوم (خط  $y = x$ ) برابر ۱ است، پس برای آن که خط قائم بر منحنی تابع در  $x = x_0$  با نیم‌ساز ربع اول و سوم موازی باشد، باید:

$$m' = 1 \Rightarrow \frac{-1}{6x_0 + 1} = 1 \Rightarrow 6x_0 + 1 = -1$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \Rightarrow y_0 = 3\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} - 1 = -1$$

بنابراین، خط قائم مورد نظر، خطی با شیب  $m' = 1$  است که از نقطه

$(x_0 = -\frac{1}{3}, y_0 = -1)$  می‌گذرد، پس معادله آن به صورت زیر است:

$$y - y_0 = m'(x - x_0) \Rightarrow y + 1 = 1\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

$$\xrightarrow{x_1=0} y_1 = -\frac{2}{3} \text{ (عرض از مبدأ)}$$

(مشتق توابع) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۶۵ تا ۶۹ و ۷۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x - 2\sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}{-(\sqrt{x} - 2)} = -\sqrt{x} \quad ; x \neq 4$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f''(1) = \frac{1}{4}$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۵ تا ۱۴۳)

۴

۳

۲✓

۱

(مهری ملارمضانی)

$$(-1, 3) \in f \Rightarrow f(-1) = 3 \Rightarrow f(f(-1)) = f(3)$$

$$(3, -1) \in f \Rightarrow f(3) = -1 \Rightarrow f(f(-1)) = -1$$

(تابع) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۹ تا ۵۴) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۹ تا ۶۶)

۴

۳

۲

۱✓

(آرش رهیمی)

$$y = 7 + k(x-3)(x+1) \Rightarrow y = 7 + k(x^2 - 2x - 3)$$

$$\Rightarrow y = kx^2 - 2kx - 3k + 7$$

طول رأس سهمی به معادله  $y = ax^2 + bx + c$ ، برابر است با  $x_S = \frac{-b}{2a}$ ،

$$x_S = \frac{-(-2k)}{2k} = 1 \quad \text{پس:}$$

مختصات رأس سهمی در معادله آن صدق می‌کند، پس:

$$y_S = 7 + k(1-3)(1+1) = 7 - 4k$$

طبق فرض سؤال، مختصات رأس سهمی در معادله  $y = -x$  (نیمساز ربع

دوم و چهارم) نیز صدق می‌کند، پس:  $y_S = -1$ .

$$\Rightarrow 7 - 4k = -1 \Rightarrow 4k = 8 \Rightarrow k = 2$$

$$y = kx^2 - 2kx - 3k + 7 \xrightarrow{k=2} y = 2x^2 - 4x + 1$$

(عرض نقطه تقاطع سهمی با محور  $y$ ها)  $y_0 = 1$   $\xrightarrow{x_0=0}$

(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۰ تا ۲۵)

۴

۳

۲

۱ ✓

(سروش موئینی)

اعداد  $2\alpha$  و  $2\beta$ ، از دو برابر مقادیر  $\alpha - 1$  و  $\beta - 1$ ، ۲ واحد بیشتراند.

پس می‌خواهیم ریشه‌ها ۲ برابر شده و سپس ۲ واحد افزایش یابند. یعنی

اگر ریشه‌های اولیه  $x_1$  و  $x_2$  هستند، ریشه‌های جدید  $X = 2x + 2$

باشند.

$$x = \frac{X-2}{2} \Rightarrow \left(\frac{X-2}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{X-2}{2}\right) - 1 = 0$$

۴

۳ ✓

۲

۱

(امسان شبلی)

$$[x] = t \Rightarrow t^2 - 5t - 6 < 0 \Rightarrow (t+1)(t-6) < 0 \Rightarrow -1 < t < 6$$

$$\Rightarrow -1 < [x] < 6 \xrightarrow{[x] \in \mathbb{Z}} 0 \leq x < 6 \Rightarrow x \in [0, 6)$$

پس اگر نامعادله در بازه  $[a, b)$  برقرار باشد، بیشترین مقدار  $b - a$  برابر است با:  $6 - 0 = 6$ .

(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۹ تا ۳۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

(بابک سادات)

برای همه  $n$  های طبیعی، روابط زیر برقرار است:

$$n^3 < n^3 + 1 < (n+1)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{n^3} < \sqrt[3]{n^3 + 1} < \sqrt[3]{(n+1)^3}$$

$$\Rightarrow n < \sqrt[3]{n^3 + 1} < n+1 \Rightarrow [\sqrt[3]{n^3 + 1}] = n$$

$$4n^2 < 4n^2 + 2n + 1 < 4n^2 + 4n + 1$$

$$\Rightarrow (2n)^2 < 4n^2 + 2n + 1 < (2n+1)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{(2n)^2} < \sqrt{4n^2 + 2n + 1} < \sqrt{(2n+1)^2}$$

$$\Rightarrow 2n < \sqrt{4n^2 + 2n + 1} < 2n+1 \Rightarrow [\sqrt{4n^2 + 2n + 1}] = 2n$$

$$\Rightarrow [\sqrt[3]{n^3 + 1}] + [\sqrt{4n^2 + 2n + 1}] = n + 2n = 3n$$

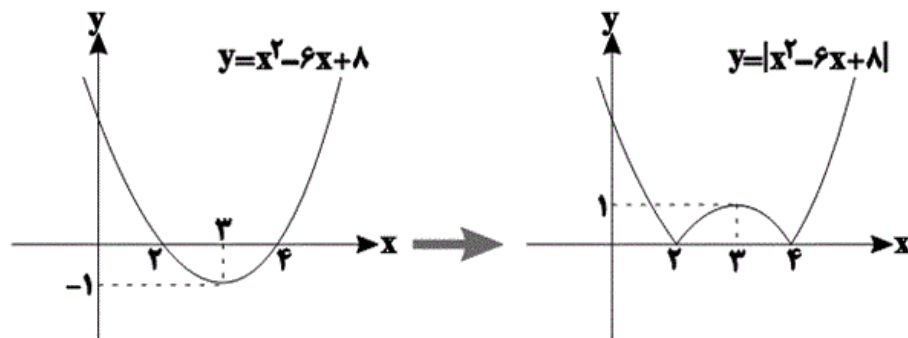
(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۹ تا ۳۲)

۴ ✓

۳

۲

۱



با توجه به شکل، برای اینکه معادله  $|x^2 - 6x + 8| = m$  چهار ریشه متمایز داشته باشد یا به عبارت دیگر خط  $y = m$ ، نمودار  $y = |x^2 - 6x + 8|$  را در چهار نقطه قطع کند، باید:  $0 < m < 1$   
 (توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۷ تا ۲۹)

۴

۳

۲

۱

طبق نامساوی مثلث داریم:

$$|x + y| \leq |x| + |y| : \begin{cases} x \cdot y \geq 0 \\ x \cdot y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x + y| = |x| + |y| \\ |x + y| < |x| + |y| \end{cases}$$

همواره مثبت

$$|3x + 6| + |x^2 + 4| = |x^2 + 3x + 10| \Rightarrow (3x + 6)(x^2 + 4) \geq 0$$

$$\Rightarrow 3x + 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$

$$\Rightarrow x \in [-2, +\infty)$$

(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۷ تا ۲۹)

۴

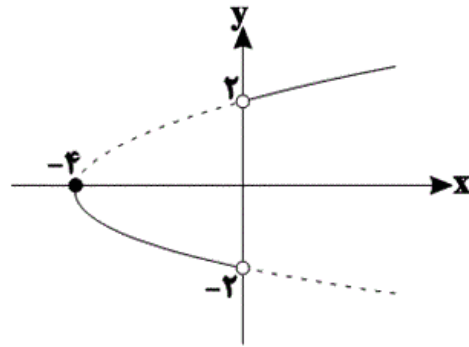
۳

۲

۱

(میثم فلاح)

$$y = \begin{cases} -\sqrt{x+4} & ; -4 \leq x < 0 \\ \sqrt{x+4} & ; x > 0 \end{cases}$$



(تابع) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۶۶ تا ۷۲)

(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۷ تا ۲۹)

۴

۳ ✓

۲

۱

(کاظم ابلالی)

$$f(x) = \frac{(x^2 - 4) + (3ax + 6a)}{x + 2} = \frac{(x-2)(x+2) + 3a(x+2)}{x+2}$$

$$= \frac{(x+2)(x-2+3a)}{x+2} = x + 3a - 2$$

برای اینکه تابع همانی باشد، باید  $f(x) = x$  پس  $3a - 2 = 0$  و در نتیجه

$$f(3a) = 3a = 2 \text{ و داریم } a = \frac{2}{3}$$

(تابع) (ریاضی ۲، صفحه ۵۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

جای مولفه‌های  $f$  را جابه‌جا می‌کنیم تا  $f^{-1}$  به دست آید:

$$f^{-1} = \{(1, -1), (3, 2), (2, 0), (0, 1)\}$$

$$g = \{(1, 2), (-2, -1), (2, 4), (0, 1)\}$$

$$\Rightarrow f^{-1} - g = \{(1, -3), (2, -4), (0, 0)\}$$

$$\Rightarrow R_{f^{-1}-g} = \{-3, -4, 0\} \Rightarrow \text{مجموع} = -7$$

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۵ تا ۵۹) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۱ تا ۴۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

(ریم مشتاق نظم)

$$D_f : x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \Rightarrow D_f = [-1, +\infty)$$

$$D_g : x \geq 0 \Rightarrow D_g = [0, +\infty)$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \in [0, +\infty) \mid -|\sqrt{x} + 1| + 2 \in [-1, +\infty)\} \Rightarrow -(\sqrt{x} + 1) + 2 \geq -1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} + 1 \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \leq 2 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow D_{f \circ g} = [0, 4]$$

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۹ تا ۶۶)

(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۷ تا ۲۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

(علیرضا زواره)

$$f(x) = \sqrt{\tan(\pi |x|)} \Rightarrow f\left(\frac{-1}{4}\right) = \sqrt{\tan \frac{\pi}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\Rightarrow (f \circ f)\left(\frac{-1}{4}\right) = f\left(f\left(\frac{-1}{4}\right)\right) = f(1) = \sqrt{\tan \pi} = \sqrt{0} = 0$$

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۹ تا ۶۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

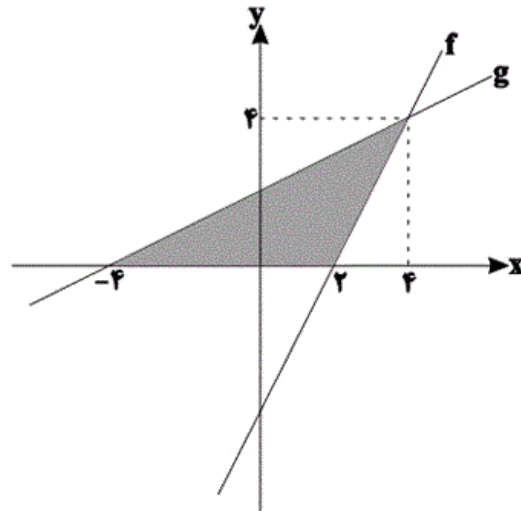
از  $(fog)(x) = x$  نتیجه می‌گیریم که  $g(x) = f^{-1}(x)$  و داریم:

$$f(x) = ax + b$$

$$\frac{f(0) = -4}{\rightarrow b = -4}$$

$$g(0) = 2 \Rightarrow f(2) = 0 \Rightarrow 2a - 4 = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x - 4 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x + 2$$



با توجه به شکل، داریم:

$$S = \frac{6 \times 6}{2} = 12$$

(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۳۴ تا ۳۹)

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۹ تا ۶۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$d = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

اما قدرنسبت جملات ردیف زوج را می‌خواهیم

که برابر است با:

$$d' = 2d = 2(3) = 6$$

(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۴۰ تا ۴۴)

۴

۳ ✓

۲

۱



با افزایش  $n$  کمان  $\frac{\pi}{n}$  که در بازه  $[0, \pi]$  قرار دارد، کوچکتر شده و لذا

کسینوس آن افزایش می‌یابد. از طرفی داریم  $1 \leq \cos \frac{\pi}{n} \leq -1$ ، پس دنباله

$$a_n = \cos \frac{\pi}{n}$$

صعودی و کراندار است.

گزینه «۱»: واگرا و غیرکراندار

گزینه «۲»: نزولی و کراندار

گزینه «۴»: نه صعودی، نه نزولی و کراندار

(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

می دانیم که  $\log_a^x n = \frac{1}{n} \log_a^x$  و  $n \log_a^x = \log_a^{x^n}$  پس:

$$1 + \log_4^x = \log_2^y \Rightarrow 1 + \log_{\frac{x}{2}}^x = \log_2^y \Rightarrow 1 + \frac{1}{2} \log_2^x = \log_2^y$$

$$\Rightarrow 1 + \log_2^{x^{\frac{1}{2}}} = \log_2^y$$

هم چنین می دانیم که  $1 = \log_2^2$  و  $\log_a^x + \log_a^y = \log_a^{xy}$  پس:

$$\log_2^2 + \log_2^{x^{\frac{1}{2}}} = \log_2^y \Rightarrow \log_2^{2x^{\frac{1}{2}}} = \log_2^y$$

$$\Rightarrow 2x^{\frac{1}{2}} = y \Rightarrow 2\sqrt{x} = y \quad (*)$$

$$x^2 + y^2 = 21 \xrightarrow{(*)} x^2 + (2\sqrt{x})^2 = 21 \Rightarrow x^2 + 4x - 21 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x+7) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \xrightarrow{(*)} y = 2\sqrt{3} \\ x = -7 \end{cases}$$

(چون به ازای این مقدار، عبارت  $\log_4^x$ ، تعریف نمی شود.) غیر قابل قبول  $x = -7$

$$\Rightarrow \frac{2x}{y} = \frac{2 \times 3}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}^{\frac{2x}{y}} = \log_{\frac{1}{3}}^{\sqrt{3}}$$

۴

۳

۲ ✓

۱

از فرم جواب کلی معادله کسینوس داریم:

$$\begin{cases} \pi + 3x = 2k\pi + x \\ \pi + 3x = 2k\pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \pi \\ 4x = 2k\pi - \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi - \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

در فاصله  $(0, 2\pi)$  از جواب اول به ازای  $k = 1, 2$ ، مقادیر  $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  را داریم.

از جواب دوم به ازای  $k = 1, 2, 3, 4$  مقادیر  $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$  را داریم.

مجموع تمام جوابها برابر است با:

$$\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = 6\pi$$

(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۵۹ تا ۶۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$2(1 - \sin^2 2x) = \sin 2x + 1 \Rightarrow 2 \sin^2 2x - 2 + \sin 2x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = -1 \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\sin 2x = -1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{4}$$

$$\xrightarrow{[0, 2\pi]} x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12} \xrightarrow{[0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{12}, \frac{13\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \xrightarrow{[0, 2\pi]} x = \frac{5\pi}{12}, \frac{17\pi}{12} \end{cases}$$

پس معادله در این بازه، ۶ جواب دارد.

(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۵۹ تا ۶۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\text{می دانیم: } \begin{cases} \sin(\pi - 2x) = \sin 2x \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x \\ \cos(\pi + x) = -\cos x \end{cases}$$

$$\sin(\pi - 2x) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos(\pi + x) = 0 \quad \text{پس داریم:}$$

$$\Rightarrow \sin 2x - \cos x - \cos x = 0 \Rightarrow \sin 2x - 2\cos x = 0$$

از طرفی  $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ ، لذا از معادله اخیر نتیجه می شود:

جواب کلی:

$$2\sin x \cos x - 2\cos x = 0 \Rightarrow 2\cos x(\sin x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \text{یا} \\ \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{جواب کلی:}$$

توجه: کمان های  $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، کمان های  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$  را نیز شامل

می شوند.

(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه های ۵۹ تا ۶۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

## ۸۲- گزینه ۴»

(عمیدرضا دهقانی)

$$P(n-1, 3) = 10 \cdot C(n, 5)$$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)!}{(n-4)!} = 10 \times \frac{n!}{5!(n-5)!} \Rightarrow \frac{(n-1)!}{(n-5)!(n-4)!}$$

$$= \frac{10(n-1)!n}{120(n-5)!} \Rightarrow n(n-4) = 12$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به}} n = 6$$

گزینه ها

(ترکیبیات) (ریاضی ۲، صفحه های ۱۸۵ و ۱۸۸)

۴ ✓

۳

۲

۱

۸۳- گزینه «۳»

(افشین گلستانی)

در پرتاب ۳ سکه با هم، یا یک سکه سه بار پشت سرهم داریم  $n(S) = ۸$  و

$$\text{نیز } P(A) = \frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴} \text{ و } P(B) = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}, P(C) = \frac{۶}{۸} = \frac{۳}{۴}$$

حال به بررسی مستقل بودن پیشامدها می‌پردازیم:

$$P(A \cap B) = \frac{۱}{۸} = P(A) \times P(B) \Rightarrow \text{A و B مستقل اند}$$

$$P(A \cap C) = ۰ \neq P(A) \times P(C) \Rightarrow \text{A و C مستقل نیستند}$$

$$P(B \cap C) = \frac{۳}{۸} = P(B) \times P(C) \Rightarrow \text{B و C مستقل اند}$$

(احتمال) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۰ و ۱۱) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۹)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$\text{احتمال سفید} = \text{احتمال سیاه} \Rightarrow \frac{۱}{۲} \left( \frac{۵}{۸} + \frac{۳}{۵+x} \right) = \frac{۱}{۲} \left( \frac{۳}{۸} + \frac{۲+x}{۵+x} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{۸} = \frac{۲+x}{۵+x} - \frac{۳}{۵+x} \Rightarrow \frac{۱}{۴} = \frac{x-۱}{۵+x}$$

$$\Rightarrow ۵+x = ۴x-۴ \Rightarrow ۳x=۹ \Rightarrow x=۳$$

(احتمال) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

۸۵- گزینه «۱»

(مهرداد چگینی)

با فرض آن که موش اول از بین موش‌های بیمار انتخاب شده است، داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1 = \frac{۴}{۹} \times \frac{۳}{۸} = \frac{۱۲}{۷۲} \text{ : احتمال آن که موش‌های دوم و سوم سالم باشند.} \\ P_2 = \frac{۵}{۹} \times \frac{۴}{۸} = \frac{۲۰}{۷۲} \text{ : احتمال آن که موش‌های دوم و سوم بیمار باشند.} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \text{احتمال مورد نظر } P = P_1 + P_2 = \frac{۱۲}{۷۲} + \frac{۲۰}{۷۲} = \frac{۳۲}{۷۲} = \frac{۴}{۹}$$

(احتمال) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۰ تا ۱۴) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۹)

۴

۳

۲

۱ ✓