

RIAZISARA

www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

و...

[@riazisara](https://t.me/riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:

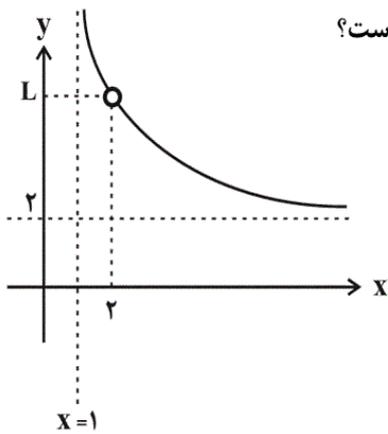


<https://t.me/riazisara>

[@riazisara.ir](https://www.instagram.com/riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>



۱۰۹- بخشی از نمودار تابع $f(x) = \frac{ax^2 - 3x + b}{x^2 + cx + d}$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار L کدام است؟

(۱) ۴

(۲) $\frac{9}{2}$

(۳) ۵

(۴) $\frac{11}{2}$

۱۰۶- نمودار تابع $f(x) = \frac{2x + [x]}{x^2}$ در اطراف مجانب قائم آن چگونه است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)



۱۰۱- اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{1-x} & ; x < 1 \\ |x-1| & ; x \geq 1 \end{cases}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} f\left(\frac{2}{x^2 - x}\right)$ کدام است؟

(۴) صفر

(۳) $\frac{\pi}{4}$

(۲) $\frac{\pi}{2}$

(۱) π

۱۰۷- به ازای چند مقدار m ، نمودار تابع $f(x) = \frac{x+3}{x^2 + mx - 3}$ فقط یک مجانب قائم دارد؟

(۴) صفر

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۱۰۴- به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، حداقل یکی از جواب‌های معادله $ax^2 + 2x^2 - x + 4 = 0$ در بازه $(0, 1)$ قرار می‌گیرد؟

(۴) $a < -5$

(۳) $a < -3$

(۲) $a < -\frac{5}{2}$

(۱) $a < -\frac{3}{4}$

۱۱۰- کدام خط مجانب مایل نمودار تابع $f(x) = x\sqrt{1 - \sin \frac{1}{x}}$ است؟

$y = x - \frac{1}{2}$ (۴)

$y = x + \frac{1}{2}$ (۳)

$y = x + 1$ (۲)

$y = x$ (۱)

۱۰۵- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-a}{x-1} - \frac{x+b}{x+1} \right) = 3$ باشد، مقدار b کدام است؟

-۵ (۴)

۵ (۳)

-۲ (۲)

۲ (۱)

۱۰۲- مقدار k کدام باشد تا تابع $f(x) = \begin{cases} k & ; x = \pi \\ \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos x}} & ; x \neq \pi \end{cases}$ پیوستگی راست داشته باشد؟

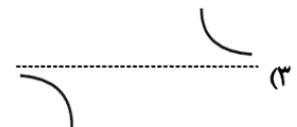
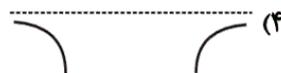
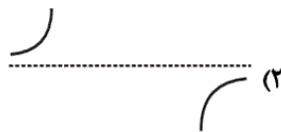
$\sqrt{2}$ (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳)

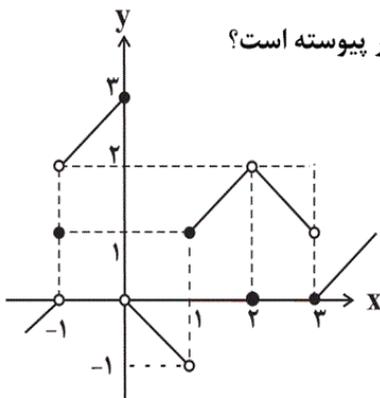
$-\sqrt{2}$ (۲)

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۱)

۱۰۸- نمودار تابع $f(x) = \frac{2x^2 - |x|}{x^2 + |x|}$ در اطراف مجانب افقی آن کدام است؟



۱۰۳- شکل زیر مربوط به نمودار تابع f است. در این صورت تابع $y = \frac{x+1}{\sqrt{f(x)}}$ کدام بازه زیر پیوسته است؟



$[-1, 0)$ (۱)

$(0, 1)$ (۲)

$[1, 3)$ (۳)

$[3, +\infty)$ (۴)

دیفرانسیل و انتگرال ، دنباله - ۹ سوال

۸۵- دنباله $a_n = \frac{2^{n+2} + 4}{2^n + 5}$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

نزولی (۲)

صعودی (۱)

(۳) ابتدا صعودی سپس نزولی (۴) ابتدا نزولی سپس صعودی

۸۶- اگر $a_n = \frac{k + \cos(n\pi)}{3}$ باشد، به ازای چند عدد صحیح k دنباله $\{(a_n)^n\}$ کران دار است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۹

۸۷- دنباله $a_n = \sqrt{\frac{n^2 - 2n}{n+3}} - n + 1$ به کدام عدد همگرا است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) -۱

۸۸- جملات دنباله $\{a_n\}$ با جمله عمومی $a_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n+3}} + 5 & ; \text{ فرد } n \\ \frac{5n-7}{n+1} & ; \text{ زوج } n \end{cases}$ ، برای هر $n \geq M$ در نامساوی $|a_n - 5| < \frac{1}{10}$ صدق می کنند.

کوچک ترین مقدار طبیعی M کدام است؟

- (۱) ۵۰ (۲) ۵۱ (۳) ۱۱۹ (۴) ۱۲۰

۸۹- دنباله $a_n = \left\{ \left[\frac{\cos n}{n + \tan^{-1} n} \right] \right\}$ چگونه است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) همگرا و کران دار (۲) واگرا و بی کران (۳) همگرا و بی کران (۴) واگرا و کران دار

۹۰- اگر $a_n = \begin{cases} \sqrt[n]{n} & ; n \leq 10^{10} \\ \frac{2n + \sin n}{2n^2 + 3} & ; n > 10^{10} \end{cases}$ و $b_n = n \cos \frac{(-1)^n}{n}$ باشد، دنباله $a_n b_n$ به کدام عدد همگراست؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) واگراست.

۹۱- اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله های صعودی باشند، چند دنباله از دنباله های زیر لزوماً صعودی است؟

- (الف) $\{a_n + b_n\}$ (ب) $\{a_n - b_n\}$ (پ) $\{a_n b_n\}$ (ت) $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹۲- اگر دنباله $\left\{ \left(\frac{2n+1}{2n-5} \right)^{2n-1} \right\}$ به e^k همگرا باشد، k کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۹

۹۳- اگر S مجموعه کران‌های بالای مجموعه جواب نامعادله $4 \leq |x-2|$ باشد، بزرگ‌ترین کران پایین مجموعه S کدام است؟

([] ، نماد جزء صحیح است.)

۷ (۴)

۲ (۳)

۵ (۲)

-۳ (۱)

دیفرانسیل و انتگرال ، حد - ۶ سوال

۹۴- برای اثبات عدم وجود حد تابع $f(x) = \cos \frac{2\pi}{x}$ در نقطه $x=0$ ، اگر یکی از دنباله‌ها $a_n = \frac{1}{n}$ باشد، دنباله دیگر کدام نمی‌تواند

باشد؟

$$b_n = \frac{2}{2n+1} \quad (۲)$$

$$b_n = \frac{2}{2n-1} \quad (۱)$$

$$b_n = -\frac{1}{n} \quad (۴)$$

$$b_n = \frac{4}{4n+1} \quad (۳)$$

۹۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x-1}{1-\sin x}$ کدام است؟

$+\infty$ (۴)

$+1$ (۳)

-1 (۲)

$-\infty$ (۱)

۹۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3^x-1}{3^x+1} \right]$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

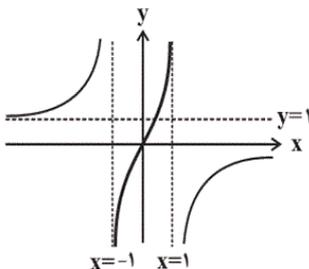
۳ (۴)

∞ (۳)

صفر (۲)

۱ (۱)

۹۸- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} [(f \circ f)(x)]$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)



-۲ (۱)

صفر (۲)

۱ (۳)

-۱ (۴)

۹۹- اگر $f(x) = \begin{cases} 2x & ; x \in \mathbb{Q} \\ x^2 + 1 & ; x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ باشد، تابع $g(x) = (x^2 - 2x)f(x)$ در چند نقطه دارای حد است؟

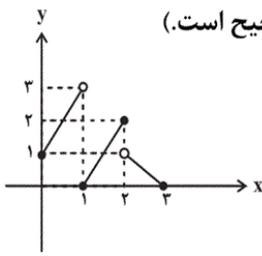
۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۰۰- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} [f(2-x^2)]$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)



۳ (۲)

۱ (۳)

۲ (۴)

۱ (۳)

دیفرانسیل و انتگرال ، پیوستگی - ۱ سوال

۹۷- اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n + 3x^2 + a}{ax^m - 1} = 1$ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟ ($m, n \in \mathbb{W}$)

۸ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

دیفرانسیل و انتگرال ، یاد آوری مفاهیم پایه - ۴ سوال

۸۱- اگر x, y و z سه عدد حقیقی باشند، در اثبات « اگر $x + z = y + z$ باشد، آن گاه $x = y$ ». کدام یک از اصل‌های زیر استفاده نشده است؟

(۲) وجود عضو همانی جمع

(۱) خاصیت شرکت پذیری

(۴) منحصر به فرد بودن عضو قرینه

(۳) وجود عضو قرینه

۸۲- اگر k عددی گنگ و مثبت باشد، کدام عدد همواره گنگ است؟

(۴) $\sqrt{k} - 3\sqrt{k}$

(۳) $\frac{k}{k^2 - 1}$

(۲) $\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k} + 1}$

(۱) $\frac{2k^2 + 3}{k^2 + 1}$

۸۳- اگر کسر $\frac{b}{11}$ دارای بسط اعشاری $0.\overline{5a}$ باشد، $a + b$ کدام است؟

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

۸ (۱)

۸۴- اگر مجموعه جواب نامعادله $\max\{(2x-5), (5-2x)\} < 1$ یک بازه متقارن به مرکز a و شعاع r باشد، $a + r$ کدام است؟

(۴) $\frac{7}{2}$

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) $\frac{1}{2}$

هندسه‌ی تحلیلی ، مقاطع مخروطی - ۵ سوال

۱۱۶- اگر نقاط $(0, 0)$ و $(4, 0)$ دو سر قطری از دایره $2x^2 + 2y^2 + ax + by + c = 0$ باشند، آنگاه کدام نقطه روی این دایره قرار دارد؟

(۴) $(\sqrt{3}, 1)$

(۳) $(1, \sqrt{3})$

(۲) $(2, \sqrt{3})$

(۱) $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$

۱۱۷- مماس مشترک خارجی دو دایره $C: x^2 + y^2 - 2x + m = 0$ و $C': x^2 + y^2 + 6x - 6y + 2 = 0$ بر خط گذرنده از مراکز این

دو دایره عمود است. m کدام است؟

- (۱) -۸۰ (۲) -۶۰ (۳) -۷۰ (۴) -۹۰

۱۱۸- نقطه M روی محیط یک بیضی به طول قطر بزرگ $۴\sqrt{۳}$ و فاصله کانونی $۴\sqrt{۲}$ قرار دارد به طوری که پاره خط FF' را با زاویه

قائمه رؤیت می‌کند. حاصل $MF.MF'$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۱۶

۱۱۹- اگر خط $x = 1$ خط هادی یک سهمی و $M(4, 0)$ نقطه‌ای از همان سهمی باشد، آنگاه کانون این سهمی روی کدام منحنی زیر قرار

دارد؟

(۱) $x^2 + y^2 - 8x - 9 = 0$ (۲) $x^2 + y^2 - 4x + 7 = 0$

(۳) $x^2 + y^2 - 4x - 9 = 0$ (۴) $x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0$

۱۲۰- فاصله رأس سهمی $۲x^2 + 2x - y - 4 = 0$ از کانون آن کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 1

هندسه‌ی تحلیلی، بردار - ۳ سوال

۱۱۱- طول بردار b برابر ۳ و طول بردار a' (تصویر قائم بردار a روی امتداد بردار b) برابر ۱ است. اگر $|a \times b| = 3\sqrt{2}$ ، آنگاه طول

بردار a کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $\sqrt{۳}$ (۳) $\sqrt{۲}$ (۴) ۲

۱۱۲- سه بردار غیر صفر a, b و c مفروضند به طوری که $a + b + c = 0$ و $|a \times b| = 2$. طول بردار $a \times b + c \times b + c \times a$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۱۳- اگر بردارهای $a = (1, 2, -1)$ ، $b = (-2, 0, m)$ و $c = (0, 7, -4)$ در یک صفحه باشند، مقدار m کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) $\frac{1}{7}$ (۳) $-\frac{2}{7}$ (۴) $-\frac{3}{7}$

هندسه‌ی تحلیلی، خط و صفحه - ۲ سوال

۱۱۴- از نقطه $(3, 2, 1)$ خط D را به موازات خط با معادلات $(x + 2z = 0$ و $y = 0)$ رسم می‌کنیم. فاصله مبدأ مختصات از D کدام است؟

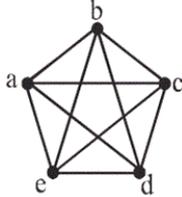
- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) ۴ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) ۳

۱۱۵- صفحه شامل خط $D: \frac{x}{2} = y = \frac{z-1}{4}$ و موازی با خط $D': \begin{cases} z-2x=2 \\ y=4 \end{cases}$ محور xها را با کدام طول قطع می کند؟

- (۱) ۱ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) -۱ (۴) $\frac{1}{2}$

ریاضیات گسسته ، نظریه ی گراف - ۴ سوال

۱۲۱- چه تعداد از دورهای به طول ۴ در گراف روبه‌رو شامل یال ec می‌باشند؟



- (۱) ۹ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۴

۱۲۲- چند گراف منتظم وجود دارد که ۷ یال داشته باشد؟

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

۱۲۳- اعداد a, a, b, b, b, b درجه رأس‌های گراف ساده G با اندازه ۸ است. درجه چند رأس G زوج است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۲۴- درختی ۲۰ رأس از درجه ۱ و ۸ رأس از درجه ۲ دارد. اگر $\Delta = 3$ باشد، این درخت چند رأس از درجه ۳ دارد؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۲۲

ریاضیات گسسته ، نظریه ی اعداد - ۶ سوال -

۱۲۵- عددی در مبنای a به صورت ۱۲ و مجذور این عدد در همان مبنای a به صورت ۲۲۱ نوشته می‌شود. a^2 در مبنای ۲ به کدام صورت نوشته می‌شود؟

- (۱) $(1010)_2$ (۲) $(1001)_2$ (۳) $(1101)_2$ (۴) $(1000)_2$

۱۲۶- اگر a، b و c اعداد صحیح و ناصفر باشند و $a^2 | bc$ و $ab | c^2$ ، کدام گزینه همواره درست است؟

- (۱) $a^5 | b^7$ (۲) $a^5 | c^7$ (۳) $a^2 | b$ (۴) $a^3 | c^2$

۱۲۷- اگر $d = (a^2 + a, 2a + 5)$ و d عددی اول باشد، در این صورت بیشترین مقدار برای $d^2 + d + 1$ کدام است؟

- (۱) ۵۷ (۲) ۱۳ (۳) ۱۵ (۴) ۳۱

۱۲۸- a و b دو عدد اول متمایز و بزرگ‌تر از ۷ هستند. بزرگ‌ترین عددی که همواره $(a^2-1)(b^2-1)$ را می‌شمارد، کدام است؟

$2^6 \times 3^6$ (۴)

$2^4 \times 3^6$ (۳)

$2^8 \times 3^2$ (۲)

$2^6 \times 3^2$ (۱)

۱۲۹- a و b اعداد طبیعی و P عددی اول است. اگر $(a,b) = P$ باشد، آنگاه مجموعه مقادیری که ب.م.م دو عدد a^3 و b می‌تواند

بپذیرد، کدام است؟

$\{1, P, P^2, P^3\}$ (۴)

$\{P, P^2, P^3\}$ (۳)

$\{1, P\}$ (۲)

$\{P, P^2\}$ (۱)

۱۳۰- اعداد طبیعی a و b طوری مفروضند که کوچک‌ترین عضو مثبت مجموعه $\{ax+by \mid x,y \in \mathbb{Z}\}$ برابر ۵ است.

اگر $ab - [a,b] = 120$ باشد، حاصل $a+b$ کدام می‌تواند باشد؟

۱۵ (۴)

۲۵ (۳)

۴۰ (۲)

۵۰ (۱)

(جهانپوش نیکنام)

$y = 2$ خط مجانب افقی نمودار تابع است:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^2 - 3x + b}{x^2 + cx + d} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^2}{x^2} = a = 2$$

$x = 1$ خط مجانب قائم نمودار تابع است و مقدار تابع نیز در $x = 2$

تعریف نشده است، بنابراین این مقادیر ریشه‌های عبارت مخرج هستند:

$$\Rightarrow x^2 + cx + d = (x-1)(x-2)$$

هم‌چنین تابع در $x = 2$ دارای حد است، پس $x = 2$ ریشه‌ی صورت نیز

می‌باشد:

$$\Rightarrow 2(2)^2 - 3(2) + b = 2 + b = 0 \Rightarrow b = -2$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 2}{(x-1)(x-2)} = \frac{(2x+1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2x+1}{x-1} ; \quad x \neq 2$$

$$\Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{x-1} = \frac{5}{1} = 5$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

(کاظم اجلالی)

توجه کنید که در همسایگی راست $x = 0$ تابع $y = [x]$ با تابع $y = 0$ و در همسایگی چپ آن با تابع $y = -1$ برابر است، حال حد چپ و حد راست تابع f در $x = 0$ را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+0}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x-1}{x^2} = -\infty$$

۴

۳ ✓

۲

۱

(عادل مسینی)

در همسایگی راست $x = 2$ ، مقدار تابع $y = x^2 - x$ بیشتر از ۲ و در نتیجه مقدار $y = \frac{2}{x^2 - x}$ کم‌تر از ۱ است. بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f\left(\frac{2}{x^2 - x}\right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

برای به دست آوردن حاصل حد فوق، باید از ضابطه بالایی تابع f استفاده کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin \pi x}{1-x}$$

با تغییر متغیر $t = 1 - x$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin \pi(1-t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin \pi t}{t}$$

$$= \pi \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin \pi t}{\pi t} = \pi$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

Δ ی عبارت مخرج برابر $m^2 + 12$ و همواره مثبت است، پس عبارت مخرج همواره دو ریشه دارد. حال برای آن که نمودار تابع f فقط یک مجانب قائم داشته باشد، باید یکی از ریشه‌های عبارت مخرج برابر ریشه عبارت صورت یعنی $x = -3$ باشد. داریم:

$$x = -3 : (-3)^2 + m(-3) - 3 = 6 - 3m = 0 \Rightarrow m = 2$$

فقط به ازای یک مقدار، شرط مورد نظر برقرار است.

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سراسری ریاضی - ۸۸)

۱۰۴ -

با توجه به قضیه بولزانو، اگر $f(0)f(1) < 0$ باشد، تابع با ضابطه

$$f(x) = ax^3 + 2x^2 - x + 4$$

در فاصله $(0, 1)$ حداقل یک ریشه دارد:

$$f(0) = 4, f(1) = a + 5$$

$$f(0)f(1) < 0 \Rightarrow 4(a + 5) < 0 \Rightarrow a < -5$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر $y = mx + h$ مجانب مایل این تابع باشد، داریم:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x\sqrt{1 - \sin \frac{1}{x}}}{x} = 1$$

$$h = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x\sqrt{1 - \sin \frac{1}{x}} - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(\sqrt{1 - \sin \frac{1}{x}} - 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(\sqrt{1 - \sin \frac{1}{x}} - 1)(\sqrt{1 - \sin \frac{1}{x}} + 1)}{(\sqrt{1 - \sin \frac{1}{x}} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x \sin \frac{1}{x}}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{مجانب مایل: } y = x - \frac{1}{2}$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۱۵ تا ۱۲۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-a}{x-1} - \frac{x+b}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + (1-a)x - a - x^2 + (1-b)x + b}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2-a-b)x + (b-a)}{(x-1)(x+1)} = 3$$

چون مخرج به ازای $x=1$ صفر می‌شود، صورت نیز باید به ازای $x=1$

$$2-a-b+b-a=0 \Rightarrow a=1 \quad \text{صفر شود:}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-b)x + (b-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-b)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{1-b}{2} = 3$$

$$\Rightarrow b = -5$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۷)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

(سعید علم‌پور)

لازم است مقدار تابع در $x = \pi$ با حد راست آن در این نقطه برابر باشد. به

بیان دیگر:

$$f(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x)$$

واضح است که $f(\pi) = k$ می‌باشد. حال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos x}} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\frac{\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{\sqrt{2} \cos^2 \frac{x}{2}}{\sqrt{2}}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\frac{\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \times \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{\sqrt{2} |\cos \frac{x}{2}|}{\sqrt{2}}}} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\frac{\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{2}}}{-\sqrt{\frac{\sqrt{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{2}}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} (-\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}) = -\sqrt{2} \Rightarrow k = -\sqrt{2}$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۱۷ تا ۹۱)

 ۴

 ۳

 ۲ ✓

 ۱

$$f(x) = \frac{2|x|^2 - |x|}{|x|^2 + |x|} = \frac{2|x| - 1}{|x| + 1}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1} ; & x < 0 \\ \frac{2x-1}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1} ; & x \geq 0 \end{cases}$$

در $+\infty$ عبارت $\frac{-3}{x+1}$ و در $-\infty$ نیز عبارت $\frac{3}{x-1}$ منفی هستند. این

یعنی در $\pm\infty$ ، نمودار تابع با مقادیر کم تر از ۲ به خط مجانب افقی خود

یعنی $y = 2$ نزدیک می‌شود. در نتیجه نمودار گزینه «۴» پاسخ صحیح

است.



(دیفرانسیل - ۵ و پیوستگی؛ صفحه ۱۱۴)

۴

۳

۲

۱

گزینه «۲»: نمودار تابع f در فاصله $(0, 1)$ زیر محور x ها و مقادیر آن منفی است. پس در این فاصله $\sqrt{f(x)}$ تعریف نشده است.

گزینه «۳»: تابع f در $x = 2$ ناپیوسته است، پس $\frac{x+1}{\sqrt{f(x)}}$ هم ناپیوسته

می شود.

گزینه «۴»: مقدار تابع f در $x = 3$ برابر صفر است. پس $y = \frac{x+1}{\sqrt{f(x)}}$

در $x = 3$ تعریف شده نیست و تابع ناپیوسته است.

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه ۹۲)

۴

۳

۲

۱

(کیا مقدس نیاک)

$$a_n = \frac{2^2 \times 2^n + 4}{2^n + 5} = \frac{4 \times 2^n + 4}{2^n + 5} = \frac{4(2^n + 1)}{2^n + 5} = \frac{4(2^n + 5 - 4)}{2^n + 5}$$

$$= \frac{4(2^n + 5) - 16}{2^n + 5} = 4 - \frac{16}{2^n + 5} \Rightarrow a_n = 4 - \frac{16}{2^n + 5}$$

$$a_{n+1} \geq a_n \Leftrightarrow 4 - \frac{16}{2^{n+1} + 5} \geq 4 - \frac{16}{2^n + 5}$$

۴

۳

۲

۱

(ناظم ابلالی)

اگر n زوج باشد، $a_n = \frac{k+1}{3}$ می شود و می خواهیم دنباله $\left\{\left(\frac{k+1}{3}\right)^n\right\}$ کران دار باشد. پس باید $-1 \leq \frac{k+1}{3} \leq 1$ و در نتیجه $-4 \leq k \leq 2$.

اگر n فرد باشد، $a_n = \frac{k-1}{3}$ می شود و می خواهیم دنباله $\left\{\left(\frac{k-1}{3}\right)^n\right\}$ کران دار باشد. پس باید $-1 \leq \frac{k-1}{3} \leq 1$ و در نتیجه $-2 \leq k \leq 4$.

پس به ازای $-2 \leq k \leq 2$ دنباله $\{(a_n)^n\}$ کران دار خواهد بود. یعنی k می تواند ۵ مقدار صحیح ± 2 ، ± 1 و ۰ را داشته باشد.

(دیفرانسیل - دنباله‌ها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

(حبیب شفیعی)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{n^3 - 2n}{n+3}} - n + 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 - 3n + 7 + \frac{-21}{n+3}} - n + 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 - 3n + 7} - n + 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left| n - \frac{3}{2} \right| - n + 1 \right) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(دیفرانسیل - دنباله‌ها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

(علیرضا زواره)

$$n \text{ فرد باشد: } \left| \frac{1}{\sqrt{n+3}} + 5 - 5 \right| < 0.1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+3}} < \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n+3} > 10 \Rightarrow \sqrt{n} > 7$$

$$\Rightarrow n > 49 \xrightarrow{n \text{ فرد}} n = 51, 53, 55, \dots$$

$$n \text{ زوج باشد: } \left| \frac{5n-7}{n+1} - 5 \right| < 0.1 \Rightarrow \left| \frac{5n-7-5n-5}{n+1} \right| < 0.1$$

$$\Rightarrow \frac{12}{n+1} < \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow n+1 > 120 \Rightarrow n > 119 \xrightarrow{n \text{ زوج}} n = 120, 122, 124, \dots$$

بنابراین شماره جمله‌هایی که در نامساوی مفروض صدق می‌کنند به صورت

زیر است: $51, 53, 55, \dots, 117, 119, 120, 121, 122, 123, \dots$

در نتیجه از جمله ۱۱۹ام به بعد همگی در نامساوی گفته شده صدق می‌کنند.

(دیفرانسیل - دنباله‌ها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$\cos n$ و $\tan^{-1} n$ ، هر دو مقادیری محدود دارند:

$$-1 < \cos n < 1, \frac{\pi}{4} \leq \tan^{-1} n < \frac{\pi}{2}$$

در نتیجه دنباله $\frac{\cos n}{n + \tan^{-1} n}$ را می‌توان به صورت $\frac{a}{n + b}$ مدل‌سازی کرد

($b > 0$). می‌دانیم این دنباله همواره کران‌دار است؛ بنابراین

$$\left[\frac{\cos n}{n + \tan^{-1} n} \right] \text{ نیز کران‌دار است. از طرفی برای همگرایی دنباله داریم:}$$

$$-1 < \cos n < 1$$

$$\Rightarrow -1 < \frac{-1}{n + \tan^{-1} n} < \frac{\cos n}{n + \tan^{-1} n} < \frac{1}{n + \tan^{-1} n} < 1$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\cos n}{n + \tan^{-1} n} \right] = -1 \text{ یا } 0$$

این نشان می‌دهد که دنباله مورد نظر واگراست.

(دیفرانسیل - دنباله‌ها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(شیب شفیع)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n + \sin n}{2n^2 + 3} \times \left(n \cos \frac{(-1)^n}{n} \right) \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{2n^2} \left(n \cos \frac{(-1)^n}{n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cos \frac{(-1)^n}{n} = 2 \cos 0 = 2$$

(دیفرانسیل - دنباله‌ها: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\text{الف) } \begin{cases} \{a_n\} \Rightarrow a_{n+1} \geq a_n \\ \{b_n\} \Rightarrow b_{n+1} \geq b_n \end{cases} \xrightarrow{+} a_{n+1} + b_{n+1} \geq a_n + b_n$$

\Rightarrow $\{a_n + b_n\}$ صعودی است.

دنباله‌های دیگر لزوماً صعودی نیستند؛ زیرا با فرض $a_n = n^2$ و

$$b_n = -\frac{16}{n} \text{ داریم؛}$$

ب) $a_n - b_n = n^2 + \frac{16}{n}$ غیریکنواست.

پ) $a_n b_n = n^2 \times \frac{-16}{n} = -16n$ نزولی است.

ت) $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2}{-\frac{16}{n}} = -\frac{1}{16}n^3$ نزولی است.

(دیفرانسیل - دنباله‌ها: صفحه‌های ۲۳ تا ۲۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

راه حل اول: با توجه به اینکه $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{a}{n})^{bn} = e^{ab}$ داریم:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2n+1}{2n-5}\right)^{2n-1} &= \left(\frac{(2n-5)+6}{2n-5}\right)^{\frac{3}{2}(2n-5)+\frac{13}{2}} \\ &= \left(1 + \frac{6}{2n-5}\right)^{\frac{3}{2}(2n-5)} \times \left(1 + \frac{6}{2n-5}\right)^{\frac{13}{2}} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n-5}\right)^{2n-1} &= e^{6 \times \frac{3}{2} \times 1 \frac{13}{2}} = e^9 \Rightarrow k=9 \end{aligned}$$

راه حل دوم:

اگر حاصل حد $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))^{g(x)}$ حالت مبهم 1^∞ شود، می‌توان برای

محاسبه حد، از هم‌ارزی $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{g(x)(f(x)-1)}$ استفاده نمود.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n-5}\right)^{2n-1} &= 1^\infty \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(2n-1)\left(\frac{2n+1}{2n-5}-1\right)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{6(2n-1)}{2n-5}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{12n}{2n}} = e^6 \Rightarrow k=6 \end{aligned}$$

(دیفرانسیل - دنباله‌ها: صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

(فریدون ساعتی)

$$[|x-2|] \leq 4 \Rightarrow |x-2| < 5 \Rightarrow -5 < x-2 < 5$$

$$\Rightarrow -3 < x < 7 \Rightarrow \begin{cases} \text{مجموعه کران‌های بالا} = [7, +\infty) \\ \text{مجموعه کران‌های پایین} = (-\infty, -3] \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = [7, +\infty) \Rightarrow \inf(S) = 7$$

(دیفرانسیل - دنباله‌ها: صفحه‌های ۴۱ تا ۴۵)

۴

۳

۲

۱

(کاظم سالار)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{2\pi}{\frac{1}{n}} = \cos 2n\pi = 1$$

$$\text{گزینه (۱): } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{2}{2n-1}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{2\pi}{\frac{2}{2n-1}} = \cos(2n-1)\pi = -1$$

$$\text{گزینه (۲): } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{2}{2n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{2\pi}{\frac{2}{2n+1}}$$

$$= \cos(2n+1)\pi = -1$$

۴

۳

۲

۱

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x-1}{1-\sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x-1}{\left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2} = +\infty$$

توجه کنید که اگر $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ، صورت و مخرج کسر بالا مثبت هستند به

طوری که حد صورت مخالف صفر و حد مخرج برابر صفر است.

(دیفرانسیل - ص ۵ و پیوستگی؛ صفحه‌های ۶۰ تا ۶۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

تابعی را به صورت $f(x) = \left[\frac{3x-1}{3x+1} \right]$ در نظر می‌گیریم و هدف به دست

آوردن حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ است. ضابطه تابع f را می‌توان به صورت زیر

ساده کرد:

$$f(x) = \left[\frac{3x+1-2}{3x+1} \right] = \left[1 - \frac{2}{3x+1} \right] = 1 + \left[-\frac{2}{3x+1} \right]$$

در بازه $\left[\frac{1}{3}, +\infty \right)$ ، مقدار عبارت $\frac{-2}{3x+1}$ در بازه $(-1, 0)$ قرار می‌گیرد

و در نتیجه $\left[-\frac{2}{3x+1} \right] = -1$ است. این یعنی در بازه $\left[\frac{1}{3}, +\infty \right)$ ، تابع

f با تابع ثابت $y = 0$ برابر است. در نتیجه حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ نیز برابر

صفر خواهد بود.

(دیفرانسیل - ص ۵ و پیوستگی؛ صفحه‌های ۶۵ تا ۶۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

با توجه به نمودار مشخص است که $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{حال داریم:}$$

خط $y = 0$ مجانب افقی نمودار تابع در $+\infty$ است و مقادیر تابع f در $+\infty$ در بازه $(-1, 0)$ قرار دارند. پس در $+\infty$ ، $[f(x)]$ با -1 برابر است و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [(f \circ f)(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 = -1$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۶۰ تا ۶۸)

۴

۳

۲

۱

تابع g در نقاطی حد دارد که در آن نقاط، عبارت $x^3 - 2x$ صفر شود یا دو ضابطه تابع f برابر باشند.

$$1) x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm\sqrt{2}$$

$$2) 2x = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

بنابراین تابع g در ۴ نقطه حد دارد.

توجه: در نقاطی که عبارت $x^3 - 2x$ صفر می‌شود، حد تابع g به صورت (کران دار $\times 0$) می‌شود. بنابراین در این نقاط g حد دارد.

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: مکمل تمرین ۱۷ صفحه ۱۷)

۴

۳

۲

۱

(عادل حسینی)

در همسایگی $x = 0$ ، مقدار تابع $y = 2 - x^2$ کم‌تر از ۲ است و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(2 - x^2)] = \lim_{x \rightarrow 2^-} [f(x)]$$

حال از روی نمودار واضح است که مقدار تابع f در همسایگی چپ $x = 2$ ، کم‌تر از ۲ است و در نتیجه $[f(x)] = 1$ است.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} [f(2 - x^2)] = 1$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

(عادل حسینی)

از آنجا که حاصل حد در بی‌نهایت موجود است، درجه چند جمله‌ای‌های صورت و مخرج باید برابر باشند. بنابراین در حالت‌های زیر مسئله را بررسی می‌کنیم:

i) $n < 2, m = 2$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n + 3x^2 + a}{ax^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{ax^2} = \frac{3}{a} = 1 \Rightarrow a = 3$$

ii) $n = m = 2$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n + 3x^2 + a}{ax^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{ax^2} = \frac{4}{a} = 1 \Rightarrow a = 4$$

iii) $n = m > 2$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n + 3x^2 + a}{ax^n - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{ax^n} = \frac{1}{a} = 1 \Rightarrow a = 1$$

در نتیجه مجموع مقادیر ممکن برای a برابر است با ۸.

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۶۵ تا ۶۸)

۴ ✓

۳

۲

۱

(فریدون ساعتی)

می‌دانیم هر عدد حقیقی مانند z دارای عضو قرینه $-z$ است، به طوری که $z + (-z) = 0$. بنابراین:

$$\begin{aligned} x \frac{\text{صفر عضو همانی}}{\text{جمع است.}} + 0 &= x + z + (-z) \frac{\text{خاصیت شرکت پذیری}}{(x+z) + (-z)} \\ &= (y+z) + (-z) = y + (z + (-z)) = y + 0 = y \end{aligned}$$

(دیفرانسیل - یادآوری مفاهیم پایه: صفحه‌های ۱ تا ۵)

۴ ✓

۳

۲

۱

(کاظم اجلالی)

عبارت $\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

اگر k گنگ باشد، \sqrt{k} نیز گنگ است، پس $\sqrt{k+1}$ و در نتیجه $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ نیز

گنگ هستند. بنابراین $1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ نیز گنگ است.

مثال نقض برای سایر گزینه‌ها:

در گزینه (۱) قرار دهید $k = \sqrt{2}$.

در گزینه (۳) قرار دهید $k = \sqrt{2} + 1$.

در گزینه (۴) قرار دهید $k = (\sqrt{3} + 1)^6$.

(دیفرانسیل - یادآوری مفاهیم پایه: صفحه‌های ۱ تا ۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

(سیدمحمودرضا اسلامی)

$$\frac{a+50}{99} = \frac{b}{11} \Rightarrow a+50 = 9b$$

با توجه به این که $a+50$ باید مضرب ۹ باشد و $0 \leq a \leq 9$ ، بنابراین $a = 4$ است.

$$a = 4 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow a + b = 10$$

(دیفرانسیل - یادآوری مفاهیم پایه: صفحه‌های ۷ و ۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

با توجه به تعریف قدر مطلق، یعنی: $|x| = \max\{x, -x\}$ داریم:

$$|2x - 5| < 1 \rightarrow \left| x - \frac{5}{2} \right| < \frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{5}{2}, r = \frac{1}{2} \rightarrow a + r = 3$$

(دیفرانسیل - یادآوری مفاهیم پایه: صفحه‌های ۱۲ تا ۱۵)

۴

۳✓

۲

۱

$$\Rightarrow \left(x + \frac{a}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{4}\right)^2 = \frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{16} - \frac{c}{2}$$

$$\Rightarrow W = \left(\frac{-a}{4}, \frac{-b}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{-a}{4} = 2 \\ \frac{-b}{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = 0 \end{cases}$$

از طرفی چون دایره از نقطه $(0, 0)$ می‌گذرد نتیجه می‌شود که $c = 0$ و در

نتیجه معادله آن به صورت مقابل در خواهد آمد: $x^2 + y^2 - 4x = 0$

در بین گزینه‌ها تنها نقطه $(1, \sqrt{3})$ روی این دایره قرار دارد.

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

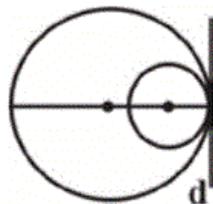
۴

۳✓

۲

۱

(مسئله ریاضی)



فقط در یک حالت، مماس مشترک خارجی دو دایره بر خط‌المركزین آن‌ها عمود است و آن هنگامی است که دو دایره مماس درون باشند یعنی $OO' = |R - R'|$.

$$x^2 + y^2 - 2x + m = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1 - m$$

$$\Rightarrow O_1 = (1, 0), R_1 = \sqrt{1 - m}$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 6y + 2 = 0 \Rightarrow (x+3)^2 + (y-3)^2 = 16$$

$$\Rightarrow O_2 = (-3, 3), R_2 = 4$$

$$O_1 O_2 = |R - R'| \Rightarrow \sqrt{16 + 9} = |\sqrt{1 - m} - 4|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1 - m} = 9 \Rightarrow m = -80 \\ \sqrt{1 - m} = -1 \text{ غق ق} \end{cases}$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

۴

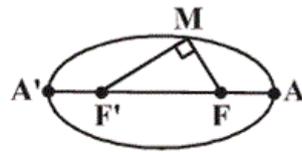
۳

۲

۱✓

(مهردار ملوندری)

مطابق شکل داریم:



$$AA' = 2a = 4\sqrt{3}, FF' = 2c = 4\sqrt{2}$$

در این بیضی داریم:

$$\begin{cases} MF + MF' = 2a = 4\sqrt{3} \xrightarrow{\text{توان}} MF^2 + MF'^2 + 2MF \cdot MF' = 48 \\ \hat{M} = 90^\circ \Rightarrow MF^2 + MF'^2 = FF'^2 = (2c)^2 = 32 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2MF \cdot MF' = 16 \Rightarrow MF \cdot MF' = 8$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۵ تا ۶۴)

۴

۳

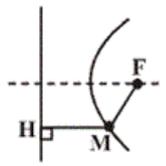
۲ ✓

۱

(نصیر ممینی نژاد)

با توجه به شکل و طبق تعریف سهمی، نقطه M از کانون و خط هادی سهمی به یک فاصله است:

$$MF = MH, \quad F \begin{cases} x \\ y \end{cases} \Rightarrow \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = |4-x|$$



$$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۶۴ تا ۷۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

(مهردار ملوندری)

$$2x^2 + 2x - y - 4 = 0 \Rightarrow 2\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) - y - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = y + \frac{9}{2} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(y + \frac{9}{2}\right) \Rightarrow 4a = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{فاصله رأس سهمی از کانون} = |a| = \frac{1}{8}$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۶۴ تا ۷۰)

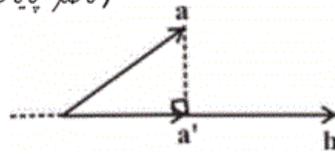
۴

۳

۲ ✓

۱

(ناصر پایاخر)



$$|a \times b|^2 + (a \cdot b)^2 = |a|^2 |b|^2 \quad (*)$$

از طرفی با توجه به شکل داریم:

$$|a'| = \frac{|a \cdot b|}{|b|} \Rightarrow |a \cdot b| = |a'| |b| = 1 \times 3 = 3$$

$$\xrightarrow{(*)} (3\sqrt{2})^2 + 3^2 = |a|^2 \times 3^2 \Rightarrow |a|^2 = 3 \Rightarrow |a| = \sqrt{3}$$

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۱۴ و ۱۵ و تمرین ۵ صفحه ۳۲)

۴

۳

۲✓

۱

(مهمرضا دلاورنژاد)

$$|a \times b + c \times b + c \times a| = |a \times b + c \times (b + a)|$$

$$= |a \times b + c \times (-c)| = |a \times b + 0| = |a \times b| = 2$$

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۲۶ و ۲۷)

۴

۳

۲✓

۱

(مقتار منصوری)

چون سه بردار هم صفحه‌اند، پس حجم متوازی‌السطوح متناظر با این سه بردار برابر صفر است، پس داریم:

$$V = |a \cdot (b \times c)| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & m \\ 0 & 7 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow |1(0 - 7m) - 2(8 - 0) + (-1)(-14 - 0)| = 0$$

$$\Rightarrow |-7m - 2| = 0 \Rightarrow -7m - 2 = 0 \Rightarrow m = -\frac{2}{7}$$

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۳۱ تا ۳۳)

۴

۳✓

۲

۱

(رضا بفسنده)

می‌دانیم که فاصله نقطه P از خطی موازی بردار u از رابطه زیر به دست

$$h = \frac{|\overrightarrow{PP_0} \times u|}{|u|}$$

می‌آید:

که در آن P_0 نقطه دلخواهی روی خط است. خط D به موازات خط مذکور

$$(x + 2z = 0, y = 0) \Rightarrow \left(\frac{x}{2} = \frac{z}{-1}, y = 0\right)$$

رسم می‌شود:

پس D با بردار $u = (2, 0, -1)$ موازی است. از طرفی با توجه به مفروضات مسأله $P = (0, 0, 0)$ و $P_0 = (3, 2, 1)$ که نتیجه می‌شود $\overrightarrow{PP_0} = (3, 2, 1)$ خواهیم داشت:

$$h = \frac{|(3, 2, 1) \times (2, 0, -1)|}{|(2, 0, -1)|} = \frac{|(-2, 5, -4)|}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 3$$

(هندسه تحلیلی - فط و صفحه: صفحه‌های ۳۷ تا ۳۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

(نصیر ممینی نژاد)

بردار نرمال این صفحه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$n = u_D \times u_{D'} = (2, 1, 4) \times (1, 0, 2) = (2, 0, -1)$$

نقطه $A = (0, 0, 1)$ روی خط D قرار دارد، پس معادله صفحه مورد نظر

$$2(x - 0) + 0(y - 0) - (z - 1) = 0 \Rightarrow 2x - z + 1 = 0$$

به صورت زیر است:

$$\text{محور } x \text{ ها: } \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x - 0 + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

پس صفحه مورد نظر، محور x ها را در نقطه‌ای به طول $-\frac{1}{2}$ قطع می‌کند.

(هندسه تحلیلی - فط و صفحه: صفحه‌های ۴۲ تا ۴۹)

۴

۳

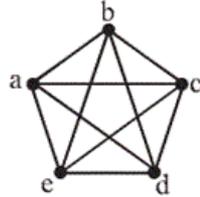
۲ ✓

۱

در این گراف، با یال ec و ۲ رأس دیگر مانند x, y می‌توان تنها ۲ دور متمایز نوشت. (دوره‌های $ecxye$ و $ecyx$)

هم‌چنین تعداد انتخاب‌های ۲ رأس x, y از ۳ رأس باقیمانده a, b و d ,

برابر است با $\binom{3}{2}$. در نتیجه تعداد دوره‌های به طول ۴ شامل یال ec برابر



است با: $6 = 2 \times \binom{3}{2}$

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(کاظم باقرزاده)

$$q = \frac{rp}{2} = 7, 0 \leq r < p \Rightarrow rp = 14 = 1 \times 14 = 2 \times 7$$

پس گراف‌ها می‌توانند ۱- منتظم مرتبه ۱۴ و ۲- منتظم مرتبه ۷ باشند که

یک نوع گراف ۱- منتظم مرتبه ۱۴ و دو نوع گراف ۲- منتظم مرتبه ۷

(چرا؟) وجود دارد.

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه ۱۲)

 ۴

 ۳

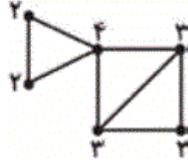
 ۲

 ۱

$$4 + a + a + b + b + b = 2 \times 8 \Rightarrow 4 + 2a + 3b = 16$$

$$\Rightarrow 2a + 3b = 12 \Rightarrow 2a = 3(4 - b) \Rightarrow a \text{ مضرب } 3 \text{ است.}$$

چون $p = 6$ پس $a \leq 5$ و در نتیجه $a = 3$ یا $a = 0$.



اگر $a = 0$ آنگاه $b = 4$ و این غیرممکن است. (چرا؟)

پس $a = 3$ و $b = 2$ قابل قبول است و دنباله درجه رأس‌ها به

صورت $2, 2, 2, 2, 3, 3, 4$ است که ۴ رأس زوج دارد.

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

فرض می‌کنیم k رأس از درجه $\Delta = 3$ وجود داشته باشد، پس:

$$\begin{cases} p = 20 + 8 + k = 28 + k \\ q = \frac{1}{2} \sum \deg v_i = \frac{1}{2} (20 \times 1 + 8 \times 2 + k \times 3) = 18 + \frac{3k}{2} \end{cases}$$

$$\text{درخت: } p = q + 1 \Rightarrow 28 + k = \left(18 + \frac{3k}{2}\right) + 1 \Rightarrow 9 = \frac{k}{2} \Rightarrow k = 18$$

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۱۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$((12)_a)^2 = (221)_a$$

$$(2+a)^2 = 1+2a+2a^2 \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (a-3)(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -1 \text{ غ ق} \end{cases}$$

$a^2 = 9$ در مبنای ۲ به صورت $(1001)_2$ نوشته می‌شود.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$a^r | bc \Rightarrow a \times a^r | a \times bc \Rightarrow a^r | abc \quad (1)$$

$$ab | c^r \Rightarrow ab \times c | c^r \times c \Rightarrow abc | c^r \quad (2)$$

$$(1), (2) \xrightarrow{\text{نمدی}} a^r | c^r \Rightarrow a | c$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۵}} a^5 | c^5 \xrightarrow{c^5 | c^r} a^5 | c^r$$

به عنوان مثال نقض برای سایر گزینه‌ها، فرض کنید $a = 8$ ، $b = 4$ و

$c = 16$ باشد.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$(2a + 5, a^r + a) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid 2a + 5 \xrightarrow{\times a} d \mid 2a^r + 5a \\ d \mid a^r + a \xrightarrow{\times r} d \mid 2a^r + 2a \end{cases}$$

$$\Rightarrow d \mid (2a^r + 5a) - (2a^r + 2a) \Rightarrow d \mid 3a$$

$$\left. \begin{array}{l} d \mid 2a + 5 \xrightarrow{\times r} d \mid 6a + 15 \\ d \mid 3a \xrightarrow{\times r} d \mid 6a \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 15$$

$$\xrightarrow{d \text{ اول است}} d = 3 \text{ یا } d = 5$$

$$\max(d^r + d + 1) = 5^r + 5 + 1 = 31$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

$$\left. \begin{array}{l} \text{اول } a, a > 7 \Rightarrow a \text{ فرد است} \Rightarrow 8 \mid a^2 - 1 \\ \text{اول } a, a > 7 \Rightarrow 3 \mid a^2 - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2^3 \times 3 \mid a^2 - 1$$

$$. 2^3 \times 3 \mid b^2 - 1$$

به روش مشابه داریم:

$$(2^3 \times 3)(2^3 \times 3) \mid (a^2 - 1)(b^2 - 1)$$

پس:

$$. 2^6 \times 3^2 \mid (a^2 - 1)(b^2 - 1)$$

یعنی

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۲۸ تا ۴۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$(a, b) = P \Rightarrow (a^r, b^r) = P^r \quad (۱)$$

$$(a^r, b) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid a^r \\ d \mid b \Rightarrow d \mid b^r \end{cases} \Rightarrow d \mid (a^r, b^r)$$

$$\xrightarrow{(۱)} d \mid P^r \xrightarrow{P \text{ عدد اول است}} d \in \{1, P, P^2, P^3\}$$

اما $d = 1$ قابل قبول نیست، زیرا در آن صورت داریم:

$$(a^r, b) = 1 \Rightarrow (a, b) = 1 \neq P$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۳۸ تا ۴۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

با توجه به صورت سؤال و قضیه بزو داریم: $d = (a, b) = 5$.

$$a = 5a', b = 5b', (a', b') = 1$$

پس:

$$ab - [a, b] = 120 \Rightarrow (5a')(5b') - 5a'b' = 120$$

$$\Rightarrow a'b'(25 - 5) = 120 \Rightarrow a'b' = 6$$

$$\xrightarrow{(a', b')=1} \begin{cases} \{a', b'\} = \{1, 6\} \\ \{a', b'\} = \{2, 3\} \end{cases}$$

$$a + b = 5a' + 5b' = 5(a' + b') = \begin{cases} 5(1+6) = 35 \\ 5(2+3) = 25 \end{cases}$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۷)

۴

۳ ✓

۲

۱