

RIAZISARA

www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

و...

[@riazisara](https://t.me/riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

[@riazisara.ir](https://www.instagram.com/riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

هندسه ۱ دهم، ترسیم های هندسی و استدلال - ۱ سوال

۱۰۱- چند دایره می توان رسم کرد که پاره خط AB به طول ۲ واحد، وتری از آن باشد؟

(۴) بی شمار

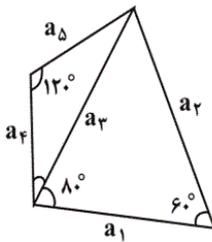
(۳) ۴

(۲) ۲

(۱) ۱

هندسه ۱ دهم، استدلال (هندسی ۱) - ۱ سوال -

۱۰۲- با توجه به شکل مقابل، کدام گزینه همواره صحیح است؟



(۱) $a_3 > a_1 > a_5$

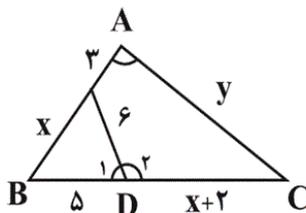
(۲) $a_2 > a_1 > a_5$

(۳) $a_2 > a_3 > a_5$

(۴) $a_1 > a_4 > a_5$

هندسه ۱ دهم، قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن - ۳ سوال

۱۰۳- در شکل زیر اگر $\widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ$ باشد، مقدار $2x - y$ کدام است؟



(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

۱۰۴- در مثلث قائم الزاویه ABC ($\widehat{A} = 90^\circ$)، $AB = 8$ ، $AC = 6$ ، ارتفاع وارد بر وتر است و عمود منصف ضلع AB، ضلع BC را در نقطه D قطع می کند. طول پاره خط DH کدام است؟

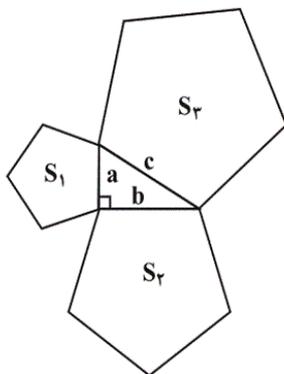
(۴) ۱/۶

(۳) ۱/۵

(۲) ۱/۴

(۱) ۱/۲

۱۰۵- در شکل زیر سه پنج ضلعی منتظم با مساحت های S_1 ، S_2 و S_3 روی اضلاع یک مثلث قائم الزاویه رسم شده است. کدام رابطه



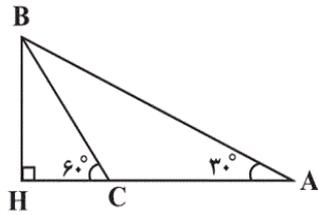
بین مساحت ها برقرار است؟

(۱) $S_3^2 = S_1^2 + S_2^2$

(۲) $S_3^2 = S_1 \times S_2$

(۳) $\sqrt{S_3} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$

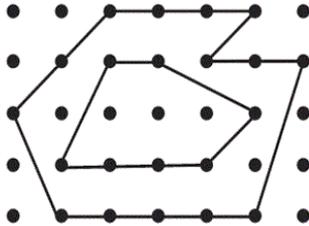
(۴) $S_3 = S_1 + S_2$



۱۰۶- در شکل زیر اگر $AB = 12$ باشد، اندازه AC کدام است؟

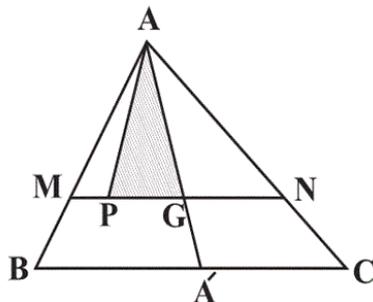
- (۱) $4\sqrt{3}$
- (۲) ۶
- (۳) $6\sqrt{2}$
- (۴) $6\sqrt{3}$

۱۰۷- در شکل زیر مساحت بین دو چند ضلعي شبکه‌ای، چه کسری از مساحت چند ضلعي بزرگتر است؟



- (۱) $\frac{5}{9}$
- (۲) $\frac{25}{36}$
- (۳) $\frac{2}{3}$
- (۴) $\frac{3}{4}$

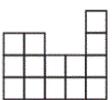
۱۰۸- در شکل زیر نقطه G محل هم‌رسي میانه‌های مثلث ABC ، $MN \parallel BC$ و $GP = 3MP$ است. مساحت مثلث هاشورخورده چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

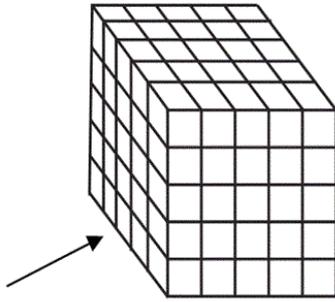


- (۱) $\frac{1}{4}$
- (۲) $\frac{2}{9}$
- (۳) $\frac{1}{6}$
- (۴) $\frac{1}{8}$

۱۰۹- کدام یک از گزاره‌های زیر لزوماً صحیح نیست؟

- (۱) اگر خطی با فصل مشترک دو صفحه متقاطع، موازی باشد، با هر کدام از آن دو صفحه نیز موازی است.
- (۲) اگر دو صفحه بر هم عمود باشند، آنگاه هر خط عمود بر یکی از این دو صفحه، با صفحه دیگر موازی است.
- (۳) اگر سه صفحه، دو به دو متقاطع باشند، نقطه‌ای وجود دارد که متعلق به هر سه صفحه است.
- (۴) اگر دو صفحه موازی یکدیگر باشند، هر خط واقع بر یک صفحه، با صفحه دیگر موازی است.

۱۱۰- حداکثر تعداد مکعب‌های کوچکی که می‌توان برداشت تا نمای بالای شکل داده شده به صورت  باشد، کدام است؟



- ۱) ۱۰۷
- ۲) ۱۱۱
- ۳) ۱۱۵
- ۴) ۱۱۹

ریاضی پایه - دوازدهم، تابع، ۲ - سوال -

۸۹- برد تابع $f(x) = \sqrt{x-1} + 1 - x$ کدام است؟

- ۱) $(-\infty, \frac{1}{4}]$
- ۲) $[0, +\infty)$
- ۳) $(-\infty, \frac{1}{4})$
- ۴) $(-\infty, 1]$

۹۰- اگر $f = \{(1, -2), (-1, 2), (3, 4), (0, 3)\}$ و $g = \{(0, -1), (1, 1), (-1, 2), (2, 0)\}$ باشد، تابع $\frac{f^{-1}(2g)}{g+1}$ کدام است؟

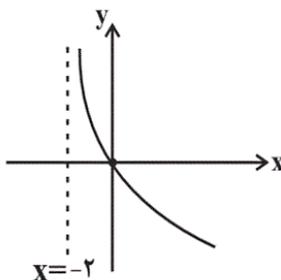
- ۱) $\{(0, 0), (-1, 1)\}$
- ۲) $\{(0, 0), (1, -1)\}$
- ۳) $\{(1, -\frac{1}{2}), (-1, 1)\}$
- ۴) $\{(1, -\frac{1}{2}), (-1, -1)\}$

ریاضی پایه - دوازدهم، حد، ۳ - سوال

۹۱- نقطه $(1, 3)$ روی نمودار تابع نمایی $f(x) = a^x + b$ و نقطه $(5, 2)$ روی نمودار تابع f^{-1} قرار دارد. $f(-1)$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$
- ۲) صفر
- ۳) ۱
- ۴) $\frac{3}{2}$

۹۲- شکل روبه‌رو نمودار تابع $y = \log(\frac{1}{ax+b})$ را نمایش می‌دهد. مقدار a کدام است؟

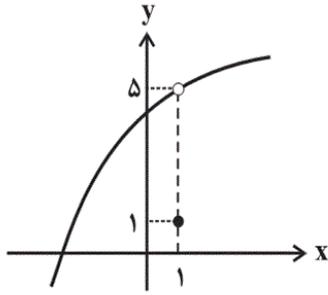


- ۱) ۱
- ۲) -۱
- ۳) $\frac{1}{2}$
- ۴) $-\frac{1}{2}$

۹۳- دو تابع $f(x) = \log_7(x+3)$ و $g(x) = \log_7(3x+1)+1$ در دو نقطه A و B متقاطع‌اند. شیب خط گذرنده از نقاط A و B کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{4}$
- ۲) $\frac{1}{2}$
- ۳) ۲
- ۴) ۴

۹۸- شکل زیر، نمودار تابع f را نشان می‌دهد. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{f(x)} - 1}{f(x) - 5}$ کدام است؟

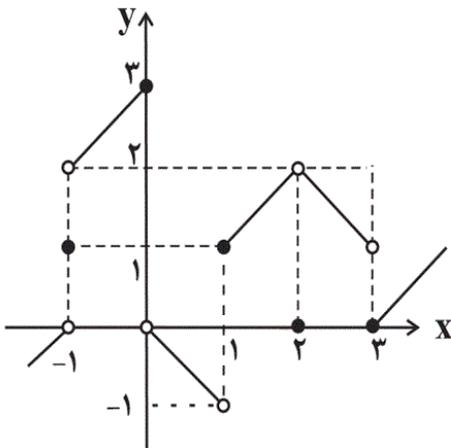


- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $-\frac{1}{2}$
- (۳) $\frac{1}{4}$
- (۴) $-\frac{1}{4}$

۹۹- مقدار k کدام باشد تا تابع $f(x) = \begin{cases} k & ; x = \pi \\ \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos x}} & ; x \neq \pi \end{cases}$ پیوستگی راست داشته باشد؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (۲) $-\sqrt{2}$
- (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (۴) $\sqrt{2}$

۱۰۰- شکل زیر مربوط به نمودار تابع f است. در این صورت تابع $y = \frac{x+1}{\sqrt{f(x)}}$ روی کدام بازه زیر پیوسته است؟



- (۱) $[-1, 0)$
- (۲) $(0, 1)$
- (۳) $[1, 3)$
- (۴) $[3, +\infty)$

ریاضی پایه - دوازدهم، **توان های گویا و عبارت های جبری** - ۲ سوال -

۸۲- اگر $A = \sqrt[3]{\frac{8}{\sqrt{16}}}$ باشد، A^{-3} کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$
- (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) ۲

۸۳- اگر $x^2 = \lambda y^2 + (x - 2y)A$ باشد، کدام عبارت یک عامل برای $A + 3xy$ است؟

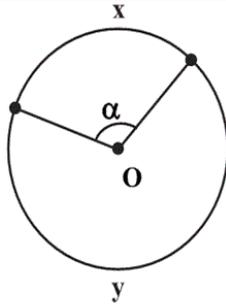
(۲) $x + y$

(۱) $x - y$

(۴) $x + 2y$

(۳) $x - 2y$

ریاضی پایه - دوازدهم ، مثلثات - ۴ سوال



۹۴- در دایره مثلثاتی زیر، نسبت $\frac{y}{x}$ برابر ۲ است. $\cos(\alpha)$ کدام است؟ (O مرکز دایره است.)

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

(۴) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$

(۳) $\frac{-1}{2}$

۹۵- اگر دو عبارت $a \sin(\frac{17\pi}{6}) + 4\sqrt{3} \tan(\frac{8\pi}{3})$ و $\sqrt{3} \cos(\frac{-11\pi}{6}) + 7 \cot(\frac{15\pi}{4})$ برابر باشند، مقدار a کدام است؟

(۴) ۱۴

(۳) ۱۳

(۲) ۱۲

(۱) ۱۱

۹۶- تابع $f(x) = \frac{x}{[\sin x]}$ به ازای چند مقدار صحیح x در بازه $[0, 2\pi]$ تعریف شده است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۹۷- اگر $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2}$ باشد، حاصل $\tan \alpha + \tan \beta$ کدام است؟ (همه عبارات تعریف شده هستند.)

(۴) $\frac{1}{\cos \alpha}$

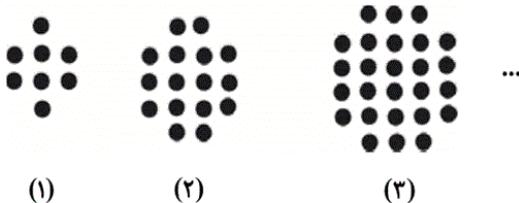
(۳) $\sin \beta$

(۲) $\cos \alpha$

(۱) $\frac{1}{\sin \beta}$

ریاضی پایه - دوازدهم ، مجموعه ، الگو و دنباله - ۱ سوال

۸۴- مطابق الگوی زیر، اگر تعداد دایره‌های شکل kام برابر با ۱۵۲ باشد، تعداد دایره‌های شکل $(k+2)$ ام کدام است؟



(۱) ۲۱۰

(۲) ۲۰۲

(۳) ۲۰۴

(۴) ۲۰۶

ریاضی پایه - دوازدهم ، معادله ها و نامعادله ها - ۲ سوال

۸۶- اگر α یک جواب معادله $x^2 + 4x - 3 = 0$ باشد، حاصل $P = (\alpha + 1)(\alpha + 4)(\alpha - 3)$ کدام است؟

- (۱) -۱۸ (۲) -۱۵ (۳) -۱۶ (۴) -۱۲

۸۱- نمودار $y = |2x + 1| - 3$ در کدام بازه پایین محور x ها قرار می‌گیرد؟

- (۱) (-۲, ۱) (۲) (۰, ۲) (۳) (-۳, ۰) (۴) (۱, ۳)

ریاضی پایه - دوازدهم ، **جبر و معادله** - ۳ سوال -

۸۷- خودرویی مسافت ۱۲۰ کیلومتری بین دو شهر را به صورت رفت و برگشت طی کرده است، به طوری که سرعت متوسط برگشت ۲۰ کیلومتر بر ساعت از سرعت متوسط رفت بیش تر و زمان برگشت ۱۸ دقیقه از زمان رفت کم تر بوده است. سرعت متوسط رفت بر حسب کیلومتر بر ساعت کدام است؟

- (۱) ۷۲ (۲) ۸۰ (۳) ۶۰ (۴) ۸۵

۸۸- فاصله نقاط برخورد نمودارهای دو تابع $y = |x - 1|$ و $y = \sqrt{x + 1}$ کدام است؟

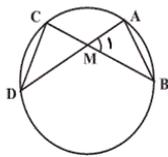
- (۱) ۲ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $\sqrt{8}$ (۴) $\sqrt{10}$

۸۵- در یک دنباله هندسی، جمله یازدهم ۶۰ واحد از جمله اول بیش تر و مجموع ۱۰ جمله اول ۲۰ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

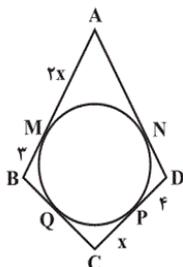
هندسه ۲ یازدهم ، **دایره** - ۵ سوال -

۱۱۱- در دایره شکل زیر، AB ضلع یک ده ضلعی منتظم و CD ضلع یک دوازده ضلعی منتظم است. زاویه M_1 چند درجه است؟



- (۱) ۳۰ (۲) ۳۳ (۳) ۳۶ (۴) ۳۹

۱۱۲- در شکل زیر اضلاع چهار ضلعی ABCD در نقاط M, N, P, Q بر دایره مماس هستند. اگر محیط چهارضلعی ABCD برابر ۳۸ باشد، طول ضلع BC کدام است؟



- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۱۱۳- اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره، واسطه هندسی بین اندازه قطرهای آنها است. فاصله بین دورترین نقاط دو دایره برابر کدام است؟

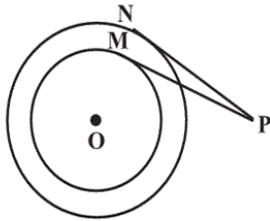
(۲) واسطه حسابی بین شعاع‌های دو دایره

(۱) واسطه حسابی بین قطرهای دو دایره

(۴) دو برابر مجموع قطرهای دو دایره

(۳) مجموع قطرهای دو دایره

۱۱۴- در شکل زیر دو دایره با شعاع‌های $R = 3$ و $R' = 4$ ، دارای مرکز مشترک O هستند. از نقطه P دو مماس PM و PN بر این دو دایره رسم شده است. اگر $PM = 3\sqrt{3}$ باشد، اندازه PN کدام است؟



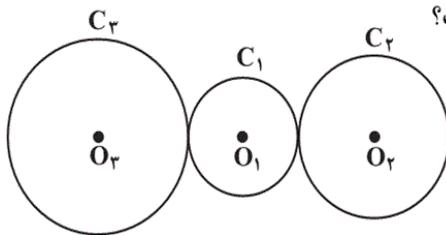
(۱) $2\sqrt{3}$

(۲) ۴

(۳) $3\sqrt{2}$

(۴) $2\sqrt{5}$

۱۱۵- مطابق شکل زیر، دایره $C_1(O_1, R)$ بر دو دایره $C_2(O_2, 2R)$ و $C_3(O_3, 3R)$ مماس خارج است. از نقطه O_1 دو مماس بر دایره‌های C_2 و C_3 رسم می‌کنیم. نسبت مربعات طول‌های این دو مماس کدام است؟



(۲) $\frac{4}{9}$

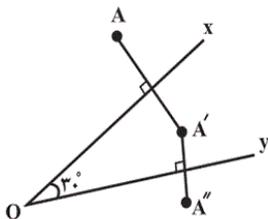
(۱) $\frac{5}{7}$

(۴) $\frac{3}{4}$

(۳) $\frac{9}{16}$

هندسه ۲ یازدهم، تبدیل های هندسی و کاربردها - ۳ سوال

۱۱۶- در شکل زیر A' بازتاب A نسبت به نیم خط Ox و A'' بازتاب A' نسبت به نیم خط Oy است. اگر $OA = 2$ باشد، مساحت مثلث OAA'' کدام است؟



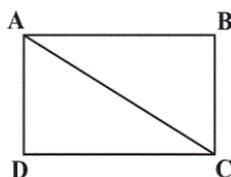
(۱) ۱

(۲) $2\sqrt{3}$

(۳) ۳

(۴) $\sqrt{3}$

۱۱۷- در شکل زیر در مستطیل $ABCD$ ، $BC = \sqrt{3}$ و $\widehat{BAC} = 30^\circ$ است. اگر این مستطیل را در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت حول نقطه A به اندازه 60° دوران دهیم، مساحت ناحیه مشترک بین مستطیل $ABCD$ و تصویر آن تحت این دوران کدام است؟



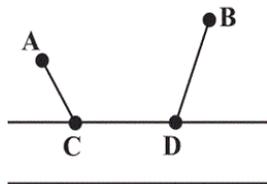
(۱) $\sqrt{3}$

(۲) ۱

(۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۴) ۲

۱۱۸- دو شهر A و B مطابق شکل زیر به فاصله ۱۰ کیلومتر از یکدیگر در یک طرف رودخانه‌ای قرار دارند. می‌خواهیم از A به B جاده‌ای بسازیم به طوری که ۳ کیلومتر آن کنار رودخانه باشد. اگر دو شهر A و B به ترتیب ۳ و ۹ کیلومتر از رودخانه فاصله داشته باشند، طول کوتاه‌ترین جاده ممکن کدام است؟



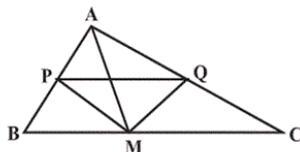
- ۱۳ (۱)
- ۱۵ (۲)
- ۱۶ (۳)
- ۱۸ (۴)

هندسه ۲ یازدهم، روابط طولی و مثلث - ۲ سوال

۱۱۹- در مثلثی یکی از زاویه‌ها 60° درجه و ضلع مقابل به این زاویه $2\sqrt{3}$ واحد است. اگر ضلع دیگر این مثلث ۱۳ واحد باشد، اندازه ضلع سوم مثلث کدام است؟

- ۱۱ یا ۲ (۱)
- ۱۰ یا ۳ (۲)
- $2\sqrt{3}$ یا $5\sqrt{3}$ (۳)
- $2\sqrt{2}$ یا $6\sqrt{2}$ (۴)

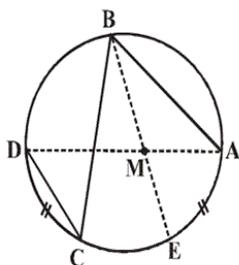
۱۲۰- مثلث ABC به طول اضلاع $AB = 4\sqrt{2}$ ، $AC = 6\sqrt{2}$ و $BC = 8$ مفروض است. اگر M وسط BC و MP و MQ و نیمسازهای زوایای AMB و AMC باشند، طول پاره خط PQ کدام است؟



- ۴ (۱)
- $4/8$ (۲)
- $5/6$ (۳)
- $6/4$ (۴)

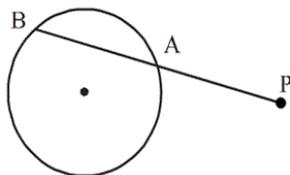
هندسه ۲ یازدهم - گواه، دایره - ۵ سوال -

۱۲۱- در شکل مقابل، $AB = 6$ ، $BC = 8$ ، $CD = 3$ و $\widehat{AE} = \widehat{CD}$ است. اندازه AM کدام است؟



- ۲ (۱)
- $2/25$ (۲)
- $2/5$ (۳)
- $2/75$ (۴)

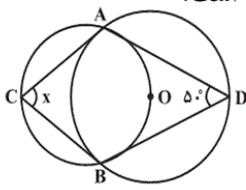
۱۲۲- نزدیک‌ترین نقطه از دایره‌ای به شعاع ۵ واحد تا نقطه مفروض P برابر ۸ واحد است. قاطع PAB نسبت به دایره طوری رسم شده است که $PA - AB = 2$ ، اندازه AB کدام است؟



- ۵ (۱)
- ۶ (۲)
- ۷ (۳)
- ۹ (۴)

۱۲۳- در دو دایره متقاطع به مراکز O و O' و شعاع‌های ۳ و ۴ واحد، فاصله نقطه تلاقی دو دایره از وسط OO' برابر $\frac{1}{4}OO'$ است. اندازه مماس مشترک این دو دایره چند واحد است؟

- ۴ (۱)
- $2\sqrt{5}$ (۲)
- $2\sqrt{6}$ (۳)
- ۵ (۴)



۱۲۴- در شکل زیر، دایره‌ای به مرکز O، دایره دیگری را در نقاط A و B قطع کرده است. زاویه x چند درجه است؟

- ۵۰ (۱)
- ۶۰ (۲)
- ۷۰ (۳)
- ۸۰ (۴)

۱۲۵- در مثلثی به طول اضلاع ۷، ۵ و ۳ واحد، دایره محاطی خارجی بر ضلع متوسط و امتداد دو ضلع دیگر مماس است. نقطه تماس، ضلع متوسط را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟

- $\frac{1}{9}$ (۱)
- $\frac{1}{6}$ (۲)
- $\frac{1}{5}$ (۳)
- $\frac{2}{9}$ (۴)

هندسه ۲ یازدهم - گواه، **تبدیل های هندسی و کاربردها** - سوال ۳ -

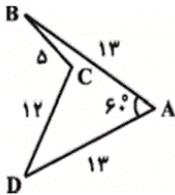
۱۲۶- مثلث ABC را با بردار $\overrightarrow{AA'}$ انتقال می‌دهیم تا بر مثلث $A'B'C'$ تصویر شود. اگر روی ضلع AB و $\frac{A'A}{A'B} = 2$ باشد، اندازه مساحت ناحیه مشترک بین این دو مثلث چه کسری از مساحت مثلث $A'B'C'$ است؟

- $\frac{1}{2}$ (۱)
- $\frac{1}{3}$ (۲)
- $\frac{1}{4}$ (۳)
- $\frac{1}{9}$ (۴)

۱۲۷- کدام گزینه در مورد بازتاب نسبت به یک خط درست نیست؟

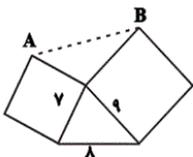
- (۱) لزوماً شیب خطها را حفظ می‌کند.
- (۲) طولها را حفظ می‌کند.
- (۳) اندازه زاویهها را حفظ می‌کند.
- (۴) بی‌شمار نقطه ثابت تبدیل دارد.

۱۲۸- می‌خواهیم بدون تغییر در تعداد اضلاع و طول اضلاع چهارضلعی ABCD و با ثابت نگه داشتن زاویه رأس A، مساحت آن را تا حد امکان افزایش دهیم. مساحت شکل جدید چند واحد مربع بیش‌تر از شکل اولیه است؟



- ۳۶ (۱)
- ۶۰ (۲)
- ۷۲ (۳)
- ۱۲۰ (۴)

هندسه ۲ یازدهم - گواه، **روابط طولی و مثلث** - سوال ۲ -



۱۲۹- مطابق شکل روی اضلاع یک مثلث، دو مربع ساخته شده است. اندازه پاره خط AB کدام است؟

- ۱۲ (۱)
- ۱۳ (۲)
- ۱۴ (۳)
- ۱۵ (۴)

۱۳۰- مثلث ABC با طول ضلع‌های ۵، ۲۹ و ۳۰ مفروض است. مساحت مجانس این مثلث تحت تجانس به مرکز محل برخورد میانه‌ها و

نسبت $k = \frac{1}{3}$ کدام است؟

- ۸ (۱)
- ۱۶ (۲)
- ۲۴ (۳)
- ۳۲ (۴)

آمار و احتمال/ریاضی ۱، **آشنایی با مبانی ریاضی** سوال ۳

۱۳۴- کدام گزارهٔ سوری زیر درست است؟ (P مجموعهٔ اعداد اول است و $k \in \mathbb{Z}$)

$\forall x \in \mathbb{Z}; x(x+1) = 2k$ (۲)

$\forall x \in \mathbb{R}; \tan x \times \cot x = 1$ (۱)

$\forall x \in \mathbb{P}; x \neq 2k$ (۴)

$\exists x \in \mathbb{R}; x^2 + 1 = 0$ (۳)

۱۳۵- اگر p و q دو گزارهٔ دلخواه و r یک گزارهٔ درست باشد، نفیض کدام یک از گزاره‌های زیر فقط دارای یک ارزش است؟

$(\sim r \vee p) \Rightarrow q$ (۴)

$(\sim r \wedge p) \Rightarrow q$ (۳)

$(r \wedge p) \Rightarrow q$ (۲)

$(r \vee p) \Rightarrow q$ (۱)

۱۳۶- اگر $A = \{a + 2b, 2, 2a - 2b\}$ ، $B = \{-2, 5, c - 1\}$ و $A \times B = B \times A$ باشد، آنگاه حاصل abc کدام می‌تواند باشد؟

۶ (۴)

۳ (۳)

-۳ (۲)

-۶ (۱)

آمار و احتمال/ریاضی ۱، احتمال - ۴ سوال

۱۳۷- اگر $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ فضای نمونهٔ یک آزمایش تصادفی و $A = \{a, b, c\}$ ، $B = \{a, c\}$ و $C = \{a, c, f\}$ سه پیشامد باشند به

طوری که $P(A) = \frac{5}{12}$ ، $P(B) = \frac{1}{4}$ و $P(C) = \frac{3}{8}$ ، آنگاه احتمال پیشامد $D = \{d, e\}$ کدام است؟

$\frac{3}{8}$ (۴)

$\frac{5}{24}$ (۳)

$\frac{1}{8}$ (۲)

$\frac{11}{24}$ (۱)

۱۳۸- اگر A و B دو پیشامد مستقل از یکدیگر و $P(A \cap B) = 0/2$ و $P(A \cap B') = 0/3$ باشد، آنگاه $P(A \cup B)$ کدام است؟

0/8 (۴)

0/7 (۳)

0/6 (۲)

0/5 (۱)

۱۳۹- در پرتاب یک تاس، احتمال وقوع هر عدد زوج دو برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. این تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر زوج بیاید، دو سکه و اگر فرد بیاید سه سکه پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال در پرتاب سکه‌ها، تعداد «رو» از تعداد «پشت» بیشتر است؟

$\frac{3}{4}$ (۴)

$\frac{5}{12}$ (۳)

$\frac{3}{8}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

۱۴۰- از بین مضارب دو رقمی عدد ۳، یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال عدد انتخاب شده بر ۷ بخش پذیر است ولی زوج نیست؟

$\frac{1}{15}$ (۴)

$\frac{1}{10}$ (۳)

$\frac{1}{6}$ (۲)

$\frac{1}{5}$ (۱)

آمار و احتمال/ریاضی ۱، آمار توصیفی - ۲ سوال

۱۴۱- مجموع ۱۳ دادهٔ آماری برابر ۱۰۴ است. اگر واریانس این داده‌ها برابر ۴۹ باشد، ضریب تغییرات آنها کدام است؟

0/875 (۴)

0/75 (۳)

0/625 (۲)

0/5 (۱)

۱۴۲- اگر داده‌های ۱۳، ۸، ۲۵، ۲۳، ۹، ۱۵، ۱۲، ۸، ۱، ۶ را با نمودار جعبه‌ای نمایش دهیم، واریانس داده‌های داخل جعبه کدام است؟

۳/۶ (۴)

۴/۲ (۳)

۴/۴ (۲)

۴/۸ (۱)

آمار و احتمال/ریاضی ۱، آمار استنباطی - ۱ سوال

۱۳۳- اگر انحراف معیار برآورد میانگین جامعه‌ای توسط یک نمونه ۱۶ تایی از این جامعه برابر $\frac{3}{6}$ باشد، انحراف معیار برآورد میانگین این جامعه توسط یک نمونه ۱۴۴ تایی از آن کدام است؟

۰/۴ (۴)

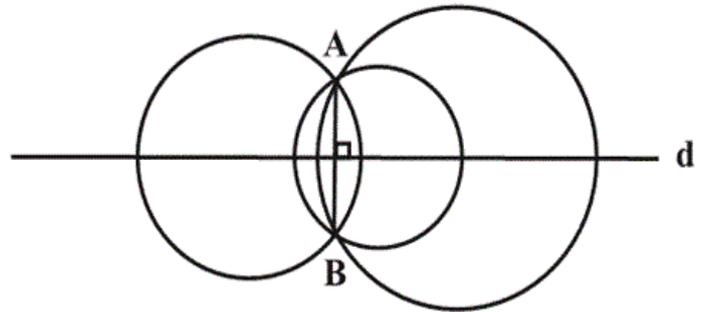
۰/۶ (۳)

۰/۹ (۲)

۱/۲ (۱)

(علی فتح آبادی)

اگر AB وترى از يك دایره باشد، آنگاه مرکز دایره از نقاط A و B به يك فاصله است، بنابراین روی عمودمنصف پاره خط AB قرار دارد. چون هر نقطه واقع بر عمودمنصف پاره خط AB می تواند مرکز چنین دایره ای باشد، پس بی شمار دایره وجود دارد که پاره خط AB ، وترى از آن باشد.



(هندسه ۱ - ترسیم های هندسی و استدلال؛ صفحه های ۱۳ و ۱۴)

۴

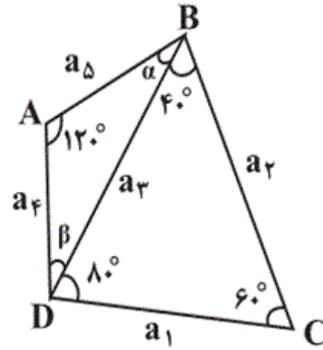
۳

۲

۱

می‌دانیم اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر،

بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر، بنابراین داریم:



$$\Delta BCD: \widehat{BDC} > \widehat{C} > \widehat{DBC} \Rightarrow a_2 > a_3 > a_1$$

$$\Delta ABD: \begin{cases} \widehat{A} > \widehat{ABD} \Rightarrow a_3 > a_4 \\ \widehat{A} > \widehat{ADB} \Rightarrow a_3 > a_5 \end{cases}$$

از ترکیب روابط فوق داریم:

$$a_2 > a_3 > a_4, a_2 > a_3 > a_5$$

دقت کنید که با توجه به مفروضات سؤال، نمی‌توان در مورد a_4 ، a_1 و

a_5 مقایسه‌ای انجام داد.

(هندسه ۱ - ترسیم‌های هندسی و استرلال: صفحه‌های ۲۱ و ۲۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\Rightarrow \frac{x+3}{5} = \frac{y}{6} = \frac{x+7}{x}$$

$$\frac{x+3}{5} = \frac{x+7}{x} \Rightarrow x^2 + 3x = 5x + 35 \Rightarrow x^2 - 2x - 35 = 0$$

$$\Rightarrow (x-7)(x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ x=-5 \end{cases} \text{ غ ق } x=7$$

$$\frac{y}{6} = \frac{x+3}{5} \xrightarrow{x=7} \frac{y}{6} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow y = 12$$

$$2x - y = 14 - 12 = 2$$

(هندسه ۱ - قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۸ تا ۴۱)

۴

۳

۲

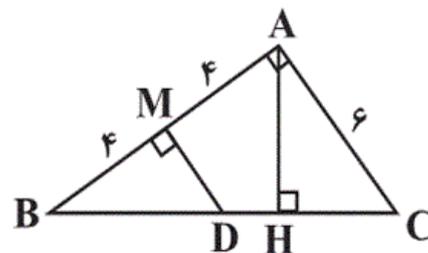
۱ ✓

(ممد طاهر شعاعی)

۱۰۴ - تاریخ: ۱۳۹۳

$$\Delta ABC : BC^2 = AB^2 + AC^2 = 64 + 36 = 100 \Rightarrow BC = 10$$

طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:



$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 8^2 = BH \times 10 \Rightarrow BH = 6.4$$

$$MD \parallel AC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{BD}{BC} = \frac{BM}{BA} \Rightarrow \frac{BD}{10} = \frac{4}{8}$$

$$\Rightarrow BD = 5$$

$$DH = BH - BD = 6.4 - 5 = 1.4$$

(هندسه ۱ - قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۴۱ و ۴۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

می‌دانیم هر دو Π ضلعی منتظم، همواره با هم متشابه‌اند و در صورتی که نسبت تشابه

دو چندضلعی برابر k باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر k^2 است. داریم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{S_1}{S_3} &= \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} \\ \frac{S_2}{S_3} &= \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{b^2}{c^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{S_1 + S_2}{S_3} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 = S_3$$

(هندسه ۱ - قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۴۷ و ۴۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\Delta ABH : \hat{A} = 30^\circ \Rightarrow BH = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 12 = 6$$

$$\Delta BCH : \hat{C} = 60^\circ \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{3}}{2} BC$$

$$\Rightarrow 6 = \frac{\sqrt{3}}{2} BC \Rightarrow BC = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

$$\Delta ABC : \text{زاویه خارجی است: } \hat{BCH} \Rightarrow \hat{BCH} = \hat{A} + \hat{ABC}$$

$$\Rightarrow 60^\circ = 30^\circ + \hat{ABC} \Rightarrow \hat{ABC} = 30^\circ$$

بنابراین مثلث ABC متساوی الساقین است و در نتیجه داریم:

$$AC = BC = 4\sqrt{3}$$

(هندسه ۱ - چندضلعی‌ها: صفحه ۶۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر مساحت چند ضلعی بزرگتر را با S و مساحت چند ضلعی کوچکتر را با S' نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{14}{2} + 12 - 1 = 18$$

$$S' = \frac{b'}{2} + i' - 1 = \frac{7}{2} + 3 - 1 = 5/5$$

$$S - S' = 18 - 5/5 = 12/5 \Rightarrow \frac{S - S'}{S} = \frac{12/5}{18} = \frac{25}{36}$$

(هنرسه ۱ - چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۱)

۴

۳

۲ ✓

۱

با توجه به اینکه نقطه G محل هم‌رسی میانه‌های مثلث ABC است، پس AA' میانه وارد بر ضلع BC است و داریم:

$$\frac{S_{ABA'}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

میانه‌ها در یک مثلث، یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند، یعنی

$$AG = \frac{2}{3} AA' \text{ است و در نتیجه داریم:}$$

$$\triangle ABA' : MG \parallel BA' \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \triangle AMG \sim \triangle ABA'$$

$$\Rightarrow \frac{S_{AMG}}{S_{ABA'}} = \left(\frac{AG}{AA'}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \quad (2)$$

دو مثلث AMG و APG در ارتفاع رسم شده از رأس A مشترک‌اند،

پس داریم:

$$\frac{S_{APG}}{S_{AMG}} = \frac{GP}{MG} = \frac{3}{4} \quad (3)$$

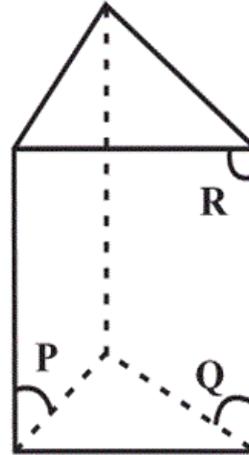
۴

۳ ✓

۲

۱

سه صفحهٔ دوبه‌دو متقاطع ممکن است هیچ نقطهٔ مشترکی نداشته باشند (مانند صفحه‌های P, Q و R در شکل زیر)، بنابراین گزینهٔ «۳» لزوماً صحیح نیست.



(هندسه ۱ - تقسیم فضایی؛ صفحه‌های ۷۹ تا ۸۶)

 ۴

 ۳

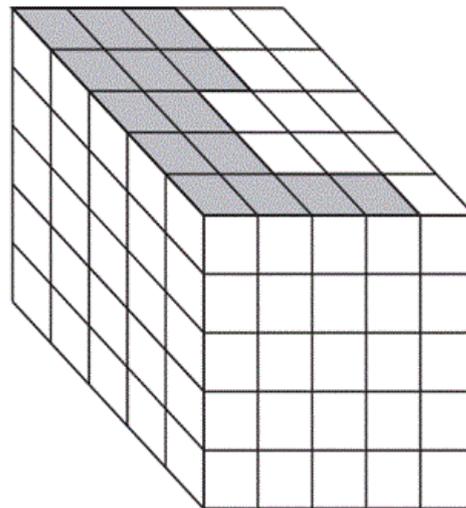
 ۲

 ۱

(مهمد بهیرایی)

اگر بخواهیم بیشترین تعداد مکعب‌های کوچک را برداریم تا نمای بالای مورد نظر حاصل شود باید تمام مکعب‌های کوچک را به‌جز مکعب‌های کوچکی که در ردیف آخر در زیر مکعب‌های هاشورخورده قرار دارند، برداریم که تعداد آنها برابر است با:

$$125 - 14 = 111$$



(هندسه ۱ - تقسیم فضایی؛ مشابه تمرین ۵ صفحه ۹۱)

 ۴

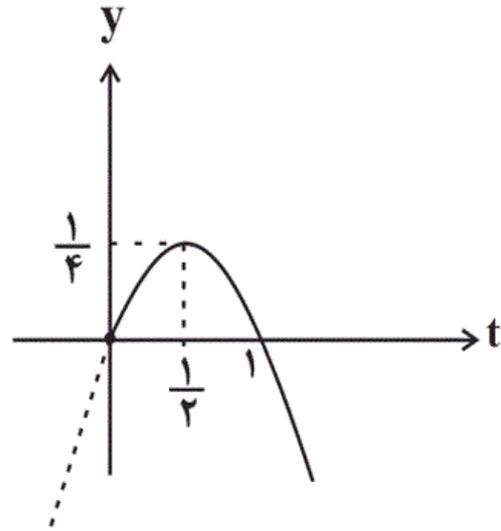
 ۳

 ۲

 ۱

برد سهمی فوق با دامنه $[0, +\infty)$ ، برابر برد تابع f است. این سهمی در

شکل زیر رسم شده است:



برد سهمی فوق و در نتیجه برد f برابر $[-\infty, \frac{1}{4}]$ است.

(مسئله ۱- تابع: صفحه‌های ۴۴ و ۴۵)

۴

۳

۲

۱ ✓

برای پیدا کردن $2g$ باید مؤلفه‌های دوم را در ۲ ضرب کنیم:

$$2g = \{(0, -2), (1, 2), (-1, 4), (2, 0)\}$$

$$g+1 = \{(0, 0), (1, 2), (-1, 3), (2, 1)\}$$

$$f^{-1} = \{(-2, 1), (2, -1), (4, 3), (3, 0)\}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(2g) = \{(0, 1), (1, -1), (-1, 3)\}$$

$$\Rightarrow \frac{f^{-1}(2g)}{g+1} = \left\{ \underbrace{(0, 1)}_{\text{تعریف نشده}}, (1, \frac{-1}{2}), (-1, 1) \right\} = \left\{ (1, \frac{-1}{2}), (-1, 1) \right\}$$

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۵۵ تا ۷۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\Rightarrow a^2 + b - a - b = 5 - 3$$

$$\Rightarrow a^2 - a - 2 = (a-2)(a+1) = 0 \begin{cases} \text{غ ق ق } a = -1 \\ a = 2 \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2^x + 1 \Rightarrow f(-1) = 2^{-1} + 1 = \frac{3}{2}$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۷۲ تا ۷۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$y = \log\left(\frac{1}{ax+b}\right) = \log(ax+b)^{-1} = -\log(ax+b)$$

تابع از مبدأ مختصات می‌گذرد.

$$y(0) = 0 \Rightarrow -\log(b) = 0 \Rightarrow b = 1$$

به‌علاوه دامنه تابع $x > -2$ است یعنی به ازای $x = -2$ عبارت داخل لگاریتم

باید برابر صفر باشد.

$$y = -\log(ax+1) \xrightarrow{x=-2} -2a+1=0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۸۰ تا ۸۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

دو ضابطه را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$f(x) = g(x)$$

به جای ۱، \log_7^4 و به جای $\log_7(x+3)$ ، $\log_7^4(x+3)^2$ را قرار

می‌دهیم. داریم:

$$\log_7(x+3)^2 = \log_7(3x+1) + \log_7^4$$

$$\Rightarrow (x+3)^2 = 12x+4 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \begin{cases} x=1 \\ x=5 \end{cases}$$

با جای گذاری x های بدست آمده در یکی از ضابطه‌ها، مختصات A و B

به صورت $A(1,2)$ و $B(5,3)$ به دست می‌آید.

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

با توجه به نمودار واضح است که $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$ است، بنابراین حد صورت

سؤال مبهم $\frac{0}{0}$ است. حال با ضرب صورت و مخرج عبارت داده شده در

مزدوج عبارت صورت داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{f(x) - 1}}{f(x) - 5} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2 - \sqrt{f(x) - 1}}{f(x) - 5} \times \frac{2 + \sqrt{f(x) - 1}}{2 + \sqrt{f(x) - 1}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5 - f(x)}{(f(x) - 5)(2 + \sqrt{f(x) - 1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{2 + \sqrt{f(x) - 1}} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

(مسایان ۱- مثلثات: صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴ و ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۴ ✓

۳

۲

۱

لازم است مقدار تابع در $x = \pi$ با حد راست آن در این نقطه برابر باشد. به

بیان دیگر:

$$f(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x)$$

واضح است که $f(\pi) = k$ می‌باشد. حال داریم:

$$= \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos x}} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{2 \cos^2 \frac{x}{2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \times \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{2} |\cos \frac{x}{2}|} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{-\sqrt{2} \cos \frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi^+} (-\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}) = -\sqrt{2} \Rightarrow k = -\sqrt{2}$$

(مسائل ۱- هر و پیوستگی: صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

۴

۳

۲ ✓

۱

گزینه «۲»: نمودار تابع f در فاصله $(0, 1)$ زیر محور x ها و مقادیر آن

منفی است. پس در این فاصله $\sqrt{f(x)}$ تعریف نشده است.

گزینه «۳»: تابع f در $x = 2$ ناپیوسته است، پس $\frac{x+1}{\sqrt{f(x)}}$ هم ناپیوسته

می شود.

گزینه «۴»: مقدار تابع f در $x = 3$ برابر صفر است. پس $y = \frac{x+1}{\sqrt{f(x)}}$

در $x = 3$ تعریف شده نیست و تابع ناپیوسته است.

(حسابان ۱- هر دو پیوستگی: صفحه های ۱۴۹ و ۱۵۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(عادل حسینی)

$$A = \left(\frac{2^3}{\sqrt[3]{2^4}}\right)^{10} = \left(2^{3-\frac{4}{3}}\right)^{10} = 2^3 \times \frac{1}{10} = 2^6$$

$$\Rightarrow A^{-3} = 2^6 \times (-3) = 2^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(ریاضی ۱- توان های گویا و عبارت های جبری: صفحه های ۵۹ تا ۶۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$x^3 - 8y^3 = (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) \Rightarrow A = x^2 + 2xy + 4y^2$$

$$\Rightarrow A + 3xy = x^2 + 5xy + 4y^2 = (x + y)(x + 4y)$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری: صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)

۴

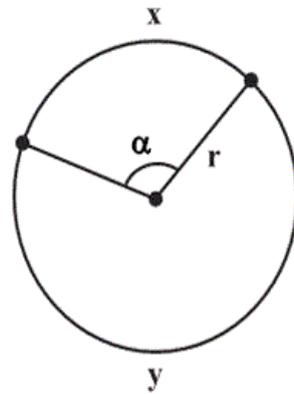
۳

۲ ✓

۱

(معمری ملازمسانی)

-۹۴



با توجه به دایره فوق داریم:

$$x = r\alpha; y = r(2\pi - \alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{r(2\pi - \alpha)}{r\alpha} = \frac{2\pi - \alpha}{\alpha} = 2$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

(مسابان ۱ - مثلثات: صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$a \sin\left(2\pi + \frac{5\pi}{6}\right) + 4\sqrt{3} \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \sqrt{3} \cos\left(-2\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 4 \cot\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow a \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + 4\sqrt{3} \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 4 \cot\left(\frac{-\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow a\left(\frac{1}{2}\right) + 4\sqrt{3}(-\sqrt{3}) = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4(-1)$$

$$\xrightarrow{\times 2} a - 24 = 3 - 4 \Rightarrow a = 13$$

(مسایان ۱- مثلثات: صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۴

۳

۲

۱

چون

$0 < \sin x < 1$ است و مخرج برابر ۱- خواهد بود. بنابراین دامنه تابع در

فاصله مورد نظر برابر است با:

$$(\pi, 2\pi) \cup \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

در این فاصله اعداد صحیح $x = 4$ ، $x = 5$ و $x = 6$ قرار دارند.

(مسایان ۱- مثلثات: صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۹)

۴

۳

۲

۱

$$\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - \beta$$

$$\Rightarrow \tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$= \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

(مسائل ۱- مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۴ ✓

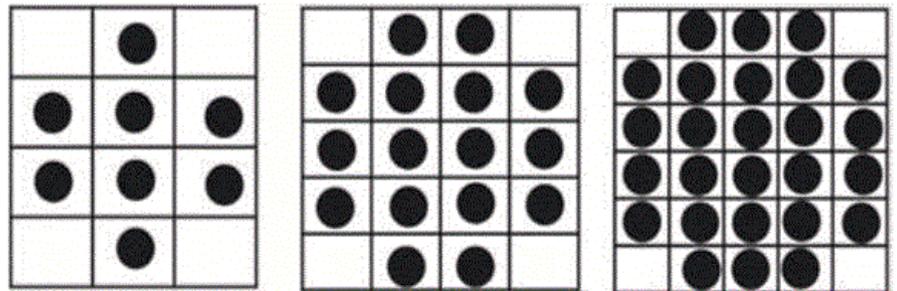
۳

۲

۱

(علی شهرابی)

شکل‌ها را می‌توانیم به صورت زیر در نظر بگیریم:



پس جمله n ام این الگو دارای $(n+2)(n+3) - 4$ دایره است.

$$a_n = (n+2)(n+3) - 4 \Rightarrow a_n = n^2 + 5n + 2$$

$$a_k = 152 \Rightarrow k^2 + 5k + 2 = 152 \Rightarrow k^2 + 5k - 150 = 0$$

۴ ✓

۳

۲

۱

α جواب معادله است، یعنی در معادله صدق می‌کند.

$$\Rightarrow \alpha^2 + 4\alpha - 3 = 0 \Rightarrow \alpha(\alpha + 4) = 3 \Rightarrow \alpha + 4 = \frac{3}{\alpha}$$

حال با جای‌گذاری در عبارت P داریم:

$$P = \frac{3}{\alpha}(\alpha + 1)(\alpha - 3) = \frac{3}{\alpha}(\alpha^2 - 2\alpha - 3)$$

از طرفی $\alpha^2 - 3$ نیز برابر -4α است. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$P = \frac{3}{\alpha}(-4\alpha - 2\alpha) = \left(\frac{3}{\alpha}\right)(-6\alpha) = -18$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها: صفحه‌های ۷۰ تا ۷۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

(مهم‌مصطفی ابراهیمی)

-۸۱

باید مقادیر تابع منفی باشد:

$$\Rightarrow |2x+1| - 3 < 0 \Rightarrow |2x+1| < 3 \Rightarrow -3 < 2x+1 < 3$$

$$\Rightarrow -4 < 2x < 2 \Rightarrow -2 < x < 1$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها: صفحه‌های ۹۱ تا ۹۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\frac{120}{v} - \frac{120}{v+20} = \frac{18}{60} = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow 120 \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+20} \right) = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow 40 \left(\frac{v+20-v}{v^2+20v} \right) = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow v^2 + 20v - 4000 = (v+100)(v-40) = 0$$

$$\xrightarrow{v>0} v = 40 \text{ km/h}$$

(مسئله ۱- پیر و معادله: صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

معادله $|x-1| = \sqrt{x+1}$ را حل می‌کنیم. با به توان ۲ رساندن طرفین معادله

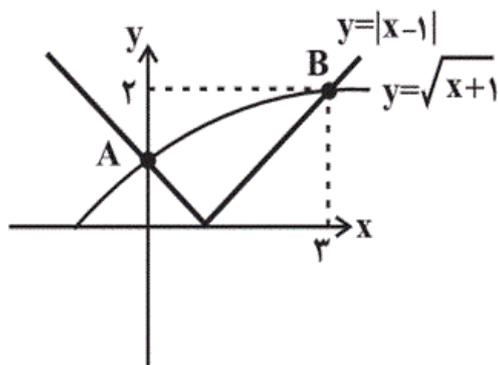
داریم:

$$x^2 - 2x + 1 = x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x = x(x-3) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$$

نقاط برخورد این دو نمودار $(0,1)$ و $(3,2)$ هستند. فاصله این نقاط برابر است با:

$$\sqrt{(3-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

نمودارهای این دو تابع در شکل زیر رسم شده است:



(مسئله ۱- جبر و معادله: صفحه ۱۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$a_{11} - a_1 = 60$$

$$S_{10} = \frac{a_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{\overbrace{a_1}^{a_{11}} q^{10} - a_1}{q - 1} = \frac{a_{11} - a_1}{q - 1}$$

$$\Rightarrow 20 = \frac{60}{q - 1} \Rightarrow q = 4$$

(مسئله ۱- جبر و معادله: صفحه‌های ۱ تا ۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(فشار فرامرزی)

-۱۱۱

هر n ضلعی منتظم محاط در دایره، آن را به n کمان مساوی تقسیم می‌کند، بنابراین داریم:

$$\widehat{AB} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ, \widehat{CD} = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$$

$$\widehat{M_1} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} = \frac{36^\circ + 30^\circ}{2} = 33^\circ$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۵، ۱۶ و ۲۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

در هر چهارضلعی محیطی، مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل دیگر است.
بنابراین در چهارضلعی $ABCD$ ، $AB + CD = AD + BC$ است و در نتیجه داریم:

$$\text{محیط } ABCD = 2(AB + CD) = 2(3x + 7) = 38$$

$$\Rightarrow 3x + 7 = 19 \Rightarrow x = 4$$

می‌دانیم طول مماس‌های رسم شده از یک نقطه خارج دایره بر آن دایره برابر یکدیگرند، پس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} BQ = BM = 3 \\ CQ = CP = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow BC = BQ + CQ = 7$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۰ و ۲۷)

۴

۳

۲✓

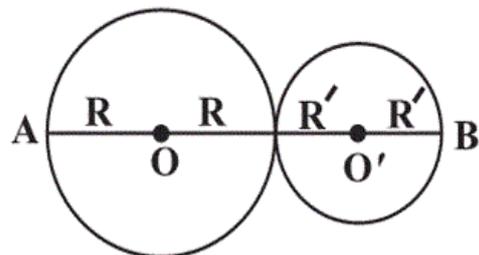
۱

اگر شعاع‌های دو دایره به ترتیب برابر R و R' و طول خط‌المركزین دو دایره برابر d باشد، آنگاه داریم:

$$\text{طول مماس مشترک خارجی: } TT' = \sqrt{2R \times 2R'}$$

$$\Rightarrow \sqrt{d^2 - (R - R')^2} = \sqrt{4RR'} \Rightarrow d^2 - (R - R')^2 = 4RR'$$

$$\Rightarrow d^2 = (R - R')^2 + 4RR' = (R + R')^2 \Rightarrow d = R + R'$$



بنابراین دو دایره مماس خارج هستند و فاصله دورترین نقاط دو دایره مطابق شکل برابر مجموع قطرهای آنها است، یعنی داریم:

$$AB = 2R + 2R'$$

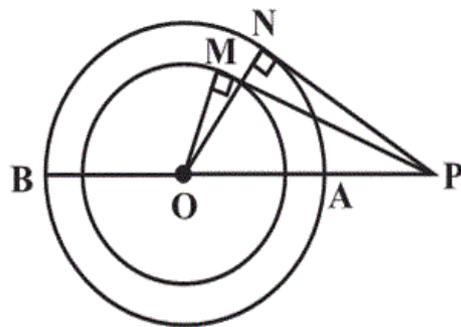
(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۴

۳✓

۲

۱



$$\begin{aligned} \Delta OPM : OP^2 &= OM^2 + PM^2 = 9 + 27 = 36 \Rightarrow OP = 6 \\ \Rightarrow \begin{cases} PA = OP - OA = 6 - 4 = 2 \\ PB = OP + OB = 6 + 4 = 10 \end{cases} \end{aligned}$$

طبق روابط طولی برای دایره بزرگ تر داریم:

$$PN^2 = PA \times PB = 2 \times 10 = 20 \Rightarrow PN = 2\sqrt{5}$$

روش دوم:

$$\Delta OMP : OP^2 = OM^2 + PM^2 = 9 + 27 = 36$$

$$\Delta ONP : PN^2 = OP^2 - ON^2 = 36 - 16 = 20 \Rightarrow PN = 2\sqrt{5}$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۰)

۴ ✓

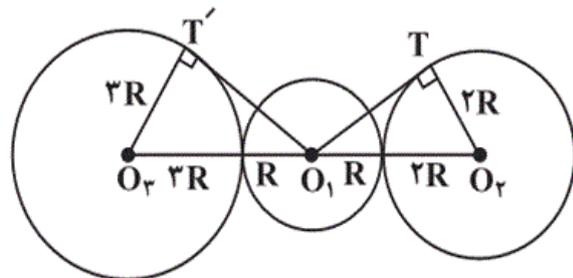
۳

۲

۱

(امیرحسین ابومصوب)

۱۱۵ - ۱۳۹۳



$$\begin{aligned} \Delta O_1 T O_r : O_1 T^2 &= O_1 O_r^2 - O_r T^2 \\ &= 9R^2 - 4R^2 = 5R^2 \end{aligned}$$

$$\Delta O_1 T' O_r : O_1 T'^2 = O_1 O_r^2 - O_r T'^2 = 16R^2 - 9R^2 = 7R^2$$

$$\frac{O_1 T^2}{O_1 T'^2} = \frac{5R^2}{7R^2} = \frac{5}{7}$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

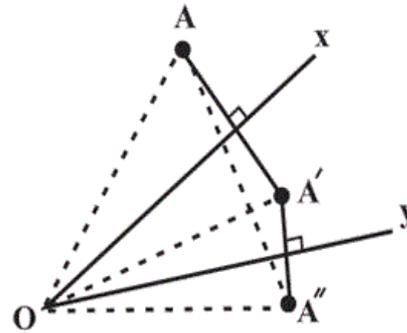
۴

۳

۲

۱

بازتاب تبدیلی طولی است، بنابراین $OA = OA' = OA''$ است. از طرفی ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطعی که با یکدیگر زاویه θ می‌سازند، یک دوران با زاویه 2θ حول نقطه تقاطع دو محور بازتاب است، پس $\widehat{AOA''} = 60^\circ$ و در نتیجه مثلث OAA'' ، متساوی‌الاضلاع است. بنابراین داریم:



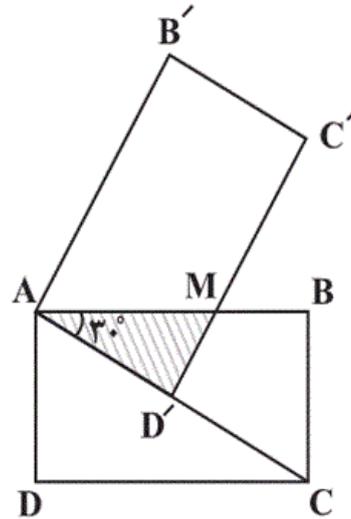
۴ ✓

۳

۲

۱

از دوران مستطیل $ABCD$ حول نقطه A و به اندازه 60° در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت، مطابق شکل مستطیل $AB'C'D'$ حاصل می‌شود که نقطه D' بر روی قطر AC واقع است.



دوران تبدیلی طولیاست، پس $AD' = AD = \sqrt{3}$ است. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه، طول ضلع روبه‌رو به زاویه 30° ، نصف طول وتر است، پس با فرض $AM = 2x$ ، $MD' = x$ است و داریم:

$$\Delta AMD' : AM^2 = AD'^2 + MD'^2 \Rightarrow 4x^2 = 3 + x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 \xrightarrow{x > 0} x = 1$$

$$S_{AMD'} = \frac{1}{2} MD' \times AD' = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(هندسه ۲- تبدیلی‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

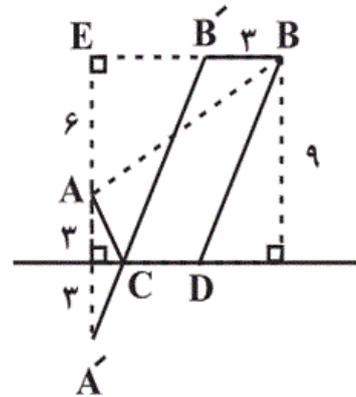
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ابتدا نقطه A را نسبت به رودخانه بازتاب می‌دهیم تا نقطه A' به دست آید، سپس نقطه B را به اندازه ۳ کیلومتر (برابر طول CD) موازی با CD به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نقطه B' حاصل شود.



چهار ضلعی $B'BDC$ متوازی‌الاضلاع است، پس $B'C = BD$ است. طبق مسئله هرون برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر بین A و B' داریم:

$$\triangle AEB: BE^2 = AB^2 - AE^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow BE = 8$$

$$B'E = BE - BB' = 8 - 3 = 5$$

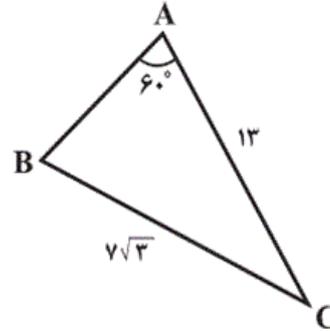
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

مطابق شکل فرض کنید $\hat{A} = 60^\circ$ ، $BC = a = 7\sqrt{3}$ و $AC = b = 13$ باشد. در این صورت طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABC داریم:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos A$$

$$\Rightarrow 147 = 169 + c^2 - 2 \times 13 \times c \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c^2 - 13c + 22 = 0 \Rightarrow (c-2)(c-11) = 0 \Rightarrow \begin{cases} c=2 \\ c=11 \end{cases}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث: صفحه‌های ۶۶ تا ۶۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

طبق قضیه میانه‌ها در مثلث ABC داریم:

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2} \Rightarrow 32 + 72 = 2AM^2 + 32$$

$$\Rightarrow AM^2 = 36 \Rightarrow AM = 6$$

طبق قضیه نیمسازهای زوایای داخلی در مثلث AMB داریم:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AM}{MB} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{AP}{AB} = \frac{3}{5}$$

از طرفی طبق تمرین ۱ صفحه ۷۲ کتاب درسی پاره خط PQ موازی ضلع

BC است، پس طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC می‌توان نوشت:

$$PQ \parallel BC \Rightarrow \frac{PQ}{BC} = \frac{AP}{AB} \Rightarrow \frac{PQ}{8} = \frac{3}{5} \Rightarrow PQ = 4/8$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۲)

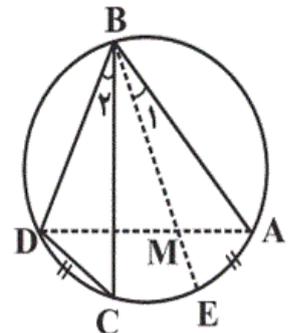
۴

۳

۲ ✓

۱

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۳)



$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AE} = \widehat{CD} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \\ \hat{BAD} = \hat{BCD} = \frac{\widehat{BD}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle BCD$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{CD} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AM}{3} = \frac{6}{8} \Rightarrow AM = 2/25$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۴

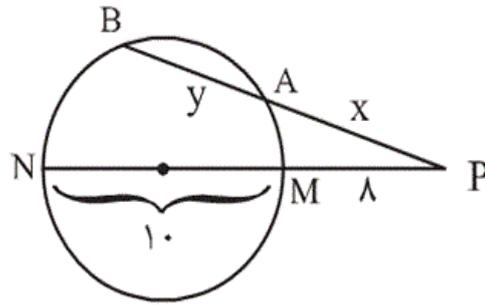
۳

۲ ✓

۱

با توجه به فرض داریم:

$$x - y = 2 \Rightarrow x = y + 2$$



طبق روابط طولی در دایره داریم:

$$PA \cdot PB = PM \cdot PN \Rightarrow x(x + y) = 8 \times 18$$

$$\Rightarrow (y + 2)(y + 2 + y) = 8 \times 18$$

$$\Rightarrow (y + 2)(y + 1) = 4 \times 18 = 9 \times 8 \Rightarrow y = 7$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

۴

۳ ✓

۲

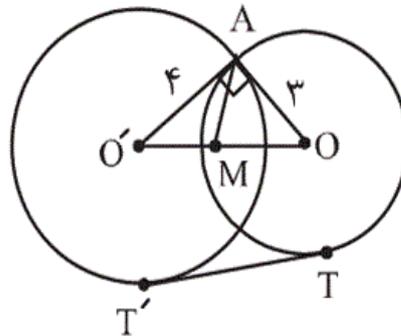
۱

می‌دانیم اگر در مثلثی، میانه وارد

بر ضلعی نصف طول آن ضلع

باشد، رأسی که این میانه از آن

خارج شده، قائمه است.



مطابق شکل، مثلث AOO' با توجه به توضیح بالا، در رأس A

قائم‌الزاویه است، پس:

$$OO' = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

طول مماس مشترک TT' برابر است با:

$$\sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} = \sqrt{5^2 - (3 - 4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

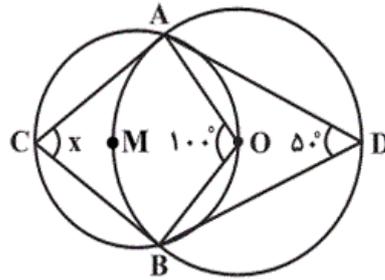
۴

۳ ✓

۲

۱

از O به A و B وصل می‌کنیم. داریم:



$$\hat{D} = \frac{\widehat{AMB}}{2} \Rightarrow \widehat{AMB} = 100^\circ$$

$$\widehat{AOB} = \widehat{AMB} \Rightarrow \hat{A}OB = 100^\circ$$

چهارضلعی AOBC محاطی است، پس در آن زاویه‌های روبه‌رو

مکمل یکدیگرند، بنابراین:

$$x + 100^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 80^\circ$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۱۴ و ۲۷)

۴

۳

۲

۱

(سراسری ریاضی - ۸۳)

اگر $CF = x$ آنگاه $BF = 5 - x$ و چون $BF = BE$ ، پس $BE = 5 - x$.

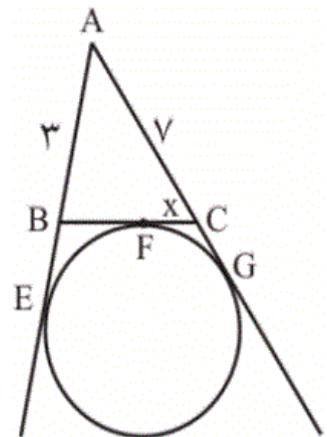
از طرفی طول دو مماس رسم شده از نقطه A بر دایره با هم برابر است، پس داریم:

$$AE = AG \Rightarrow 3 + (5 - x) = 7 + x$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$BF = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\frac{CF}{BF} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{2}} = \frac{1}{9}$$



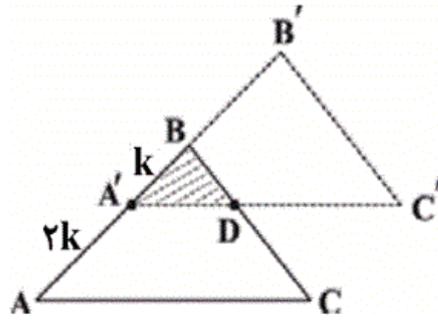
(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۲۰، ۲۵ و ۲۶)

۴

۳

۲

۱



انتقال یک تبدیل طولپاست و مساحت اشکال را حفظ می‌کند، پس مساحت دو مثلث ABC و $A'B'C'$ برابر است. مطابق شکل، ناحیه مشترک بین دو مثلث ABC و $A'B'C'$ ، مثلث $A'BD$ است. پس در حقیقت کافی است نسبت مساحت مثلث $A'BD$ به مساحت مثلث ABC را به دست آوریم.

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

بازتاب نسبت به یک خط، تبدیلی طولپاست و اندازه زاویه‌ها را حفظ می‌کند. همچنین تمام نقاط روی محور بازتاب، نقاط ثابت تبدیل هستند. پس بازتاب نسبت به یک خط، بی‌شمار نقطه ثابت دارد. ولی بازتاب نسبت به یک خط، در حالت کلی شیب خطها را ثابت نگه نمی‌دارد.

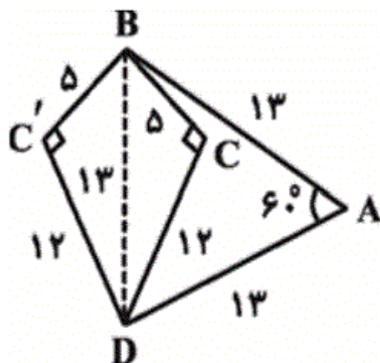
(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



رأس C را نسبت به BD بازتاب می‌دهیم تا نقطه C' حاصل شود.

دقت کنید که مثلث ABD متساوی‌الاضلاع و مثلث BC'D

قائم‌الزاویه است، زیرا:

$$\begin{cases} AB = AD, \hat{A} = 6^\circ \Rightarrow AB = AD = BD = 13 \\ |BC'^2 + C'D^2 = 5^2 + 12^2 = 169 = BD^2 \Rightarrow \hat{C}' = 90^\circ \end{cases}$$

مساحت چهارضلعی ABC'D از مساحت چهارضلعی ABCD به

اندازه مساحت چهارضلعی BCDC' بیشتر است و مساحت این

چهارضلعی دو برابر مساحت مثلث BCD است، پس:

$$S_{BCDC'} = 2S_{BCD} = 2 \times \frac{1}{2} \times BC \times CD = 5 \times 12 = 60$$

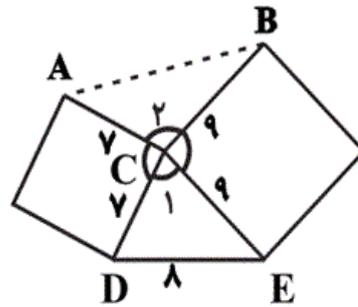
(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۵۳ و ۵۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



با توجه به قضیه کسینوس‌ها در مثلث CDE داریم:

$$DE^2 = CD^2 + CE^2 - 2CD \times CE \times \cos \hat{C}_1$$

$$\Rightarrow 64 = 49 + 81 - 2 \times 7 \times 9 \times \cos \hat{C}_1$$

$$\Rightarrow \cos \hat{C}_1 = \frac{11}{21}$$

$$\hat{C}_1 + 90^\circ + \hat{C}_2 + 90^\circ = 360^\circ \Rightarrow \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \cos \hat{C}_2 = -\cos \hat{C}_1 = -\frac{11}{21}$$

حال با توجه به قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABC، اندازه AB را

می‌یابیم:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \times \cos \hat{C}_2$$

$$\Rightarrow AB^2 = 49 + 81 - 2 \times 7 \times 9 \times \left(-\frac{11}{21}\right)$$

$$= 130 + 66 = 196 \Rightarrow AB = 14$$

(هنرسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۶۶ تا ۶۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

دو مثلث متجانس همواره متشابه‌اند و نسبت تشابه همان نسبت
تجانس است. اگر مساحت متجانس مثلث ABC در این تجانس، S'
باشد، داریم:

$$\frac{S'}{S} = k^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow S' = \frac{1}{9} \quad (*)$$

حال برای محاسبه مساحت مثلث ABC از قضیه هرون کمک می‌گیریم:

$$P = \frac{5 + 29 + 30}{2} = 32$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$= \sqrt{32(32-5)(32-29)(32-30)} = 72$$

$$\xrightarrow{(*)} S' = \frac{1}{9} S = \frac{72}{9} = 8$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربرد آنها: صفحه ۴۶)

(روابط طولی در مثلث: صفحه‌های ۷۳ و ۷۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

گزینه «۱»: رابطه داده شده برای هر عدد حقیقی X برقرار نیست. به عنوان

مثال اگر $x = \frac{\pi}{2}$ باشد، $\tan \frac{\pi}{2}$ تعریف نشده و در نتیجه رابطه بی معنی

است.

گزینه «۲»: حاصل ضرب هر دو عدد صحیح متوالی زوج است، زیرا از هر دو

عدد صحیح متوالی قطعاً یکی زوج است.

گزینه «۳»: رابطه $x^2 + 1 = 0$ به ازای هیچ عدد حقیقی x برقرار نیست،

زیرا x^2 همواره نامنفی و در نتیجه $x^2 + 1$ عددی مثبت است.

گزینه «۴»: عدد ۲، عددی زوج و اول است، پس گزاره سوری نادرست

است.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

در صورتی که ارزش گزاره r درست باشد، گزاره $r \sim$ و در نتیجه گزاره

$r \wedge p \sim$ نادرست هستند و در این صورت گزاره شرطی

$(r \wedge p) \Rightarrow q$ به انتقای مقدم درست است. در نتیجه نقیض این گزاره

همواره نادرست است.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۶ تا ۱۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\begin{cases} a + 3b = 5 \\ 2a - 3b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow abc = 4$$

حالت دوم:

$$\begin{cases} a + 3b = -2 \\ 2a - 3b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow abc = -3$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: مشابه تمرین ۵ صفحه ۳۸)

۴

۳

۲

۱

(ندرا صالح پور)

۱۳۷ - آمار و احتمال

$$P(f) = P(\{a, c, f\}) - P(\{a, c\}) = P(C) - P(B) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$P(S) = 1 \Rightarrow \underbrace{P(a) + P(b) + P(c) + P(d) + P(e)}_{P(A) = \frac{5}{12}} + \underbrace{P(f)}_{\frac{1}{8}} = 1$$

$$\Rightarrow P(d) + P(e) = 1 - \frac{5}{12} - \frac{1}{8} = \frac{11}{24} \Rightarrow P(D) = \frac{11}{24}$$

(آمار و احتمال - احتمال: مشابه تمرین ۳ صفحه ۵)

۴

۳

۲

۱

دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگرند، پس پیشامدهای A و B' نیز مستقل از هم بوده و در نتیجه داریم:

$$P(A \cap B) = 0/2 \Rightarrow P(A)P(B) = 0/2 \quad (1)$$

$$P(A \cap B') = 0/3 \Rightarrow P(A)P(B') = 0/3 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow P(A) \underbrace{(P(B) + P(B'))}_1 = 0/2 + 0/3 \Rightarrow P(A) = 0/5$$

$$P(A)P(B) = 0/2 \Rightarrow 0/5 \times P(B) = 0/2 \Rightarrow P(B) = 0/4$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0/5 + 0/4 - 0/2 = 0/7$$

(آمار و احتمال - احتمال: مشابه تمرین ۱۲ صفحه ۷۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

بنابراین احتمال آمدن اعداد زوج و فرد در پرتاب این تاس به ترتیب $\frac{2}{3}$ و

$\frac{1}{3}$ است.

اگر تاس زوج بیاید، سکه را دو بار پرتاب می‌کنیم. در این صورت فضای نمونه

دارای ۴ حالت بوده و پیشامد آنکه تعداد رو بیشتر باشد، به صورت $\{(r,r)\}$ و

احتمال آن برابر $\frac{1}{4}$ است. اگر تاس فرد بیاید، سکه را سه بار پرتاب می‌کنیم.

در این صورت فضای نمونه دارای ۸ حالت بوده و پیشامد آنکه تعداد رو بیشتر

باشد، به صورت $\{(r,r,p), (r,p,r), (p,r,r), (r,r,r)\}$ و احتمال آن

برابر $\frac{4}{8}$ است. اگر پیشامد مورد نظر را A بنامیم، آنگاه داریم:

$$P(A) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱ و ۵۱ تا ۶۰)

۴

۳

۲

۱

فرض کنید A پیشامد بخش‌پذیری عدد انتخابی بر ۳ و ۷ و B پیشامد

بخش‌پذیری عدد انتخابی بر ۳ و ۲ باشد. در این صورت $A \cap B$ پیشامد

بخش‌پذیری عدد انتخابی بر ۲ و ۳ و ۷ است. همچنین پیشامد آنکه عدد

انتخاب شده از میان مضارب ۳، بر ۷ بخش‌پذیر بوده ولی زوج نباشد، معادل

$A - B$ است. داریم:

$$n(S) = \left[\frac{99}{3} \right] - \left[\frac{9}{3} \right] = 33 - 3 = 30$$

$$n(A) = \left[\frac{99}{21} \right] - \left[\frac{9}{21} \right] = 4 - 0 = 4$$

$$n(A \cap B) = \left[\frac{99}{42} \right] - \left[\frac{9}{42} \right] = 2 - 0 = 2$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{4}{30} - \frac{2}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

با توجه به داده‌های سؤال داریم:

$$\bar{x} = \frac{104}{13} = 8$$

$$\sigma^2 = 49 \Rightarrow \sigma = 7$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{7}{8} = 0.875$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۹۶ و ۹۷)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

ابتدا داده‌ها را مرتب کرده و میانه، چارک اول و چارک سوم داده‌ها را به دست می‌آوریم.

$$1, 1, 6, 8, 8, 9, 12, 13, 15, 23, 25$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 \end{array}$$

بنابراین داده‌های ۸, ۸, ۹, ۱۲, ۱۳ داخل جعبه قرار دارند و در نتیجه داریم:

$$\bar{x} = \frac{8+8+9+12+13}{5} = 10$$

$$\sigma^2 = \frac{(8-10)^2 + (8-10)^2 + (9-10)^2 + (12-10)^2 + (13-10)^2}{5}$$

$$= \frac{4+4+1+4+9}{5} = 4.4$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۹۸ و ۹۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

انحراف معیار برآورد میانگین جامعه برابر انحراف معیار جامعه تقسیم بر جذر اندازه نمونه است. بنابراین اگر $n_1 = 16$ و $n_2 = 144$ باشد، آنگاه

داریم:

$$\frac{\sigma_{x_1}^-}{\sigma_{x_2}^-} = \frac{\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}} = \sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \Rightarrow \frac{3/6}{\sigma_{x_2}^-} = \sqrt{\frac{144}{16}} = \sqrt{9} = 3$$

۴

۳

۲

۱ ✓