

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

ریاضیات گسسته دوازدهم، ترکیبیات (شمارش) - ۷ سوال

۱۱۴- از هریک از پایه‌های دهم، یازدهم و دوازدهم یک دبیرستان، ۲ دانش‌آموز انتخاب شده است. این افراد به چند طریق می‌توانند

در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشینند به گونه‌ای که هر دو نفر از یک پایه یکسان، روبروی هم نشسته باشند؟

- ۶ (۱) ۱۸ (۲) ۳۶ (۳) ۴۸ (۴)

۱۱۵- یک اداره دارای ۱ رئیس، ۳ معاون، ۲ حسابدار، ۴ کارشناس اداری، ۳ کارمند کارگزینی و ۲ کارشناس امور حقوقی است. به چند

طریق می‌توان جلسه‌ای ۵ نفره برگزار کرد به گونه‌ای که رئیس و حداقل یکی از کارشناسان امور حقوقی و همچنین دقیقاً یکی

از معاونان اداره در آن حضور داشته باشند؟

- ۱۸۰ (۱) ۲۱۶ (۲) ۲۴۳ (۳) ۲۷۰ (۴)

۱۱۶- با استفاده از حروف a, a, a, b, b, c ، چند کد ۵ حرفی می‌توان تولید کرد؟

- ۲۰ (۱) ۳۰ (۲) ۴۰ (۳) ۶۰ (۴)

۱۱۷- معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 9$ ، چند جواب طبیعی دارد؟

- ۲۱ (۱) ۲۸ (۲) ۴۵ (۳) ۵۵ (۴)

۱۱۸- معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$ چند جواب صحیح و مثبت دارد به شرط آنکه $x_5 = 2$ و $x_1 > 3$ باشد؟

- ۲۰ (۱) ۳۵ (۲) ۵۶ (۳) ۸۴ (۴)

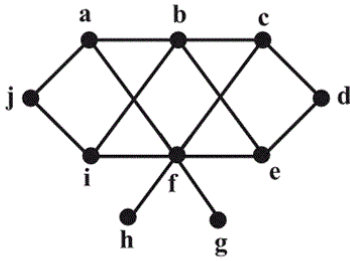
۱۱۹- تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 7$ کدام است؟

- ۱۰ (۱) ۲۴ (۲) ۳۶ (۳) ۴۶ (۴)

۱۲۰- معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 17$ ، چند دسته جواب طبیعی فرد دارد؟

- ۲۸ (۱) ۳۶ (۲) ۴۵ (۳) ۶۶ (۴)

۱۱۱- کدام مجموعه برای گراف G در شکل مقابل، احاطه گر محسوب نمی شود؟



(۱) $A = \{a, b, d, f, i\}$

(۲) $B = \{e, f, j\}$

(۳) $C = \{a, d, g, h, j\}$

(۴) $D = \{a, c, d, g, h\}$

۱۱۲- اگر عدد احاطه‌گری گرافی از مرتبه p ، برابر ۱ باشد، آنگاه این گراف حداقل چند یال دارد؟

(۴) $p-3$

(۳) $p-2$

(۲) $p-1$

(۱) p

۱۱۳- کدام یک از گراف‌های زیر، هیچ مجموعه احاطه‌گر مینیمالی ندارد که تعداد اعضای آن بیشتر از عدد احاطه‌گری گراف باشد؟

(۴) C_9

(۳) C_8

(۲) C_7

(۱) C_6

آمار و احتمال، آمار استنباطی - ۵ سوال

۱۳۶- انحراف معیار برآورد میانگین جامعه‌ای توسط یک نمونه با اندازه ۳۲۴ از آن جامعه، برابر 0.5 است. انحراف معیار جامعه چقدر است؟

(۴) ۱۲

(۳) ۹

(۲) ۸

(۱) ۶

۱۳۷- انحراف معیار برآورد میانگین براساس نمونه‌ای از یک جامعه، کمتر از 0.04 انحراف معیار آن جامعه است، حداقل اندازه نمونه

کدام است؟

(۴) ۷۸۵

(۳) ۷۸۴

(۲) ۶۲۶

(۱) ۶۲۵

۱۳۸- از میان اعداد صحیح 0 تا N ، شش عدد $20, 18, 14, 11, 5, 4$ به‌طور تصادفی انتخاب شده‌اند. برآورد نقطه‌ای از N به کمک

پارامتر میانگین کدام است؟

(۴) ۲۱

(۳) ۲۲

(۲) ۲۳

(۱) ۲۴

۱۳۹- فرض کنید جامعه‌ای از ۵ نفر که درآمد ماهیانه آن‌ها بر حسب میلیون تومان به صورت ۹ و ۷ و ۴ و ۳ و ۲ است، تشکیل شده باشد. اگر بخواهیم میانگین درآمد اعضای این جامعه را به کمک نمونه‌ای به اندازه ۳ برآورد کنیم، احتمال آنکه میانگین نمونه کمتر از میانگین جامعه باشد، کدام است؟

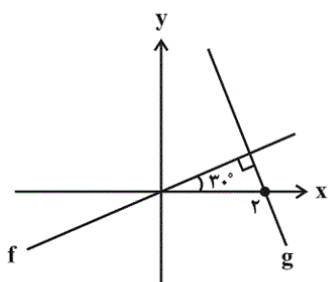
- (۱) ۰/۳ (۲) ۰/۵ (۳) ۰/۶ (۴) ۰/۸

۱۴۰- در یک نمونه با اندازه ۱۹۶، حد بالا و پایین فاصله اطمینان ۹۵ درصدی برای میانگین جامعه برابر ۴۳ و ۳۷ است. انحراف معیار برآورد میانگین این جامعه چقدر است؟

- (۱) ۰/۸۵ (۲) ۱/۷۵ (۳) ۰/۵ (۴) ۱/۵

حسابان دوازدهم، مشتق - ۱۰ سوال

۸۱- نمودار دو تابع f و g در شکل زیر آمده است. حاصل $f'(-2) + g'(2)$ کدام است؟



(۱) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(۲) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(۳) $\sqrt{3}$

(۴) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

۸۲- تابع $f(x) = x^2 [3 \cos x]$ در $x_0 = \pi \dots []$ ، نماد جزء صحیح است.

- (۱) فقط مشتق راست دارد. (۲) فقط مشتق چپ دارد.
 (۳) نه مشتق راست و نه مشتق چپ دارد. (۴) مشتق پذیر است.

۸۳- مشتق تابع $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2}$ در $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

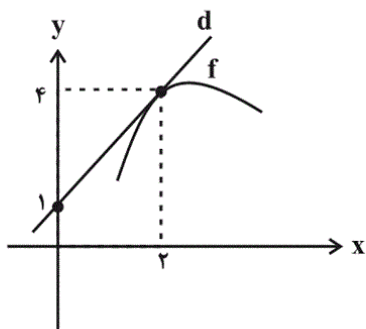
۸۴- به ازای کدام مقدار a مشتق راست تابع $f(x) = |2x+1| - a|x-2|$ در $x=2$ برابر ۳ است؟

- ۱ (۴) -۱ (۳) ۵ (۲) ۳ (۱)

۸۵- اگر $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}$ باشد، مشتق تابع $g(x) = 2xf(x) + (x^2-1)f'(x)$ در $x=4$ کدام است؟

- ۴۸ (۴) ۲۴ (۳) ۱۸ (۲) ۱۲ (۱)

۸۶- اگر نمودار تابع f به صورت زیر و $g(x) = x^2 + 1$ باشد، حاصل $(f \circ g(x))'$ در $x=1$ کدام است؟ (خط d در $x=2$ بر نمودار f مماس است.)



مماس است.)

- ۳ (۱)

- ۶ (۲)

- $\frac{1}{3}$ (۳)

- $\frac{1}{6}$ (۴)

۸۷- اگر $f(2x) = g(x^2)$ و $g'(x) = \frac{2x}{x-1}$ باشد، مقدار $f''(4)$ کدام است؟

- $\frac{5}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۱)

۸۸- اگر $f(x) = \frac{\sqrt{1-\sin 2x}}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$ باشد، مقدار $f'\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ کدام است؟

- ۴ (۴) $\frac{4}{3}$ (۳) $-\frac{4}{3}$ (۲) -۴ (۱)

۸۹- تابع f به صورت $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \leq 0 \\ x+1 & ; x > 0 \end{cases}$ تعریف شده است. تابع g کدام باشد تا تابع $f+g$ در $x=0$ مشتق داشته باشد؟

$$g(x) = \begin{cases} x|x|-1 & ; x \leq 0 \\ -x-2 & ; x > 0 \end{cases} \quad (۲)$$

$$g(x) = \begin{cases} 1-2x & ; x \leq 0 \\ 2x^2 & ; x > 0 \end{cases} \quad (۱)$$

$$g(x) = \begin{cases} 2 & ; x \leq 0 \\ 1-x^2 & ; x > 0 \end{cases} \quad (۴)$$

$$g(x) = \begin{cases} 1+x & ; x \leq 0 \\ 2x & ; x > 0 \end{cases} \quad (۳)$$

۹۰- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = x^3 - 4x$ در بازه $[0, a]$ برابر A و آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x = \sqrt{a}$ برابر B است. حداقل

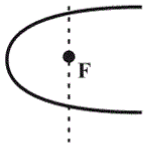
مقدار $A - B$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) $-\frac{9}{4}$

هندسه ۳- دوازدهم، آشنایی با مقاطع مخروطی - ۱۰ سوال

۱۰۱- در شکل زیر اگر یک لامپ در راستای عمودی یکسان با کانون سهمی آینه‌ای اما کمی بالاتر یا پایین‌تر قرار گیرد، شعاع‌های نور ... خارج می‌شوند.

راستای عمودی



- (۱) موازی با هم اما رو به بالا یا پایین
(۲) متقاطع با یکدیگر (همگرا)
(۳) موازی با هم و موازی با محور
(۴) دور از هم (واگرا)

۱۰۲- یک بیضی که قطر بزرگ آن موازی محور x ها است، در نقاط $(6, 0)$ و $(0, 3)$ بر محورهای مختصات مماس است. فاصله کانونی این بیضی کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) $3\sqrt{3}$ (۳) $6\sqrt{2}$ (۴) $6\sqrt{3}$

۱۰۳- اگر شعاع دهانه یک دیش مخابراتی برابر ۲۴ سانتی‌متر و فاصله کانونی آن ۹ سانتی‌متر باشد، گودی (عمق) دیش چند سانتی‌متر است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۳۲

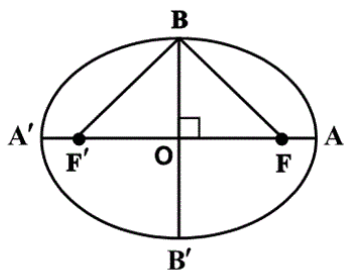
۱۰۴- دو پرتوی نور که به موازات محور x ها بر سهمی به معادله $y^2 + 2y - 6x + 4 = 0$ می‌تابند، پس از بازتاب در کدام نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

- (۱) $(1, -1)$ (۲) $(2, -1)$ (۳) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (۴) $(\frac{1}{2}, 0)$

۱۰۵- محور تقارن یک سهمی با رأس $(2, -1)$ ، موازی محور y ها است. اگر این سهمی از نقطه $(6, -3)$ بگذرد، معادله خط هادی آن کدام است؟

- (۱) $y = 1$ (۲) $y = 2$ (۳) $y = 3$ (۴) $y = 0$

۱۰۶- شکل زیر، اگر $\angle FBF' = 120^\circ$ باشد، آنگاه خروج از مرکز بیضی کدام است؟ (F و F' کانون‌های بیضی هستند)



(۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۴) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

(۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۰۷- معادله مکان هندسی وسط پاره‌خط‌هایی که دو سر آنها روی سهمی به معادله $y = 3x^2 + 2$ قرار داشته و موازی با نیمساز

ناحیه‌های اول و سوم دستگاه مختصات باشند، کدام است؟

(۴) $x = -\frac{1}{3}$

(۳) $x = -\frac{1}{6}$

(۲) $x = \frac{1}{3}$

(۱) $x = \frac{1}{6}$

۱۰۸- کدام یک از نقاط زیر می‌تواند کانون یک سهمی باشد که رأس آن نقطه $A(1, -1)$ بوده و از نقطه $B(-1, 2)$ بگذرد؟

(۴) $(\frac{1}{8}, -1)$

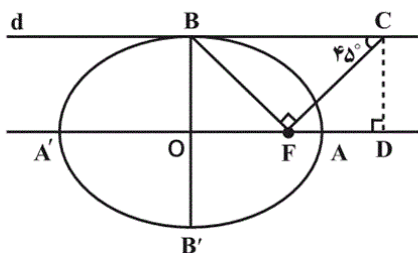
(۳) $(-\frac{1}{8}, -1)$

(۲) $(1, \frac{1}{3})$

(۱) $(1, -\frac{1}{3})$

۱۰۹- در شکل زیر خط d در نقطه B بر بیضی مماس است. اگر طول قطر کوچک و بزرگ بیضی به ترتیب ۴ و $4\sqrt{2}$ باشد،

مقدار $\frac{AD}{AF}$ کدام است؟ (F یکی از کانون‌های بیضی است.)



(۴) $\sqrt{2}$

(۳) $\sqrt{3}$

(۲) $\frac{3}{2}$

(۱) ۱

۱۱۰- پرتوی نوری از کانون سهمی به معادله $y^2 + 8y - 8x = 0$ در راستای خطی که با جهت مثبت محور x زاویه 45° می‌سازد، بر

بدنه این سهمی می‌تابد. بازتاب این پرتوی نور کدام یک از خطوط زیر می‌تواند باشد؟

(۴) $y = -4\sqrt{2}$

(۳) $y = 2\sqrt{2}$

(۲) $y = 4$

(۱) $y = -2$

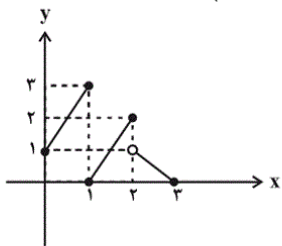
۹۱- اگر $x \in (a, b)$ باشد، بازه $(1, 3x+1, 2x-1)$ یک همسایگی عدد -2 است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) ۱

۹۲- اگر تابع f در نقطه $x=1$ حد داشته باشد و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3f(x)-7}{4-f(x)} = 2$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + f(x)}{f(x)-1}$ کدام است؟

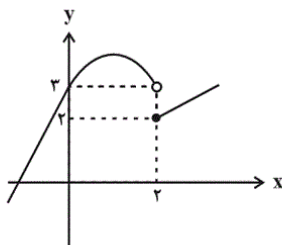
- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) $\frac{5}{2}$

۹۳- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} [f(2-x^2)]$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)



- (۱) صفر
(۲) ۳
(۳) ۱
(۴) ۲

۹۴- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است و تابع $g(x) = \frac{x^2 + mf(x)}{m[x] + f(x)}$ در $x=2$ حد دارد. مجموع مقادیر قابل قبول برای m کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)



- (۱) صفر
(۲) -۱
(۳) ۱
(۴) ۲

۹۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} + \frac{x}{2} - 1}{x^2}$ کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) $-\frac{1}{8}$
(۳) $-\frac{1}{4}$
(۴) $+\infty$

۹۶- اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{1-x} & ; x < 1 \\ |x-1| & ; x \geq 1 \end{cases}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} f\left(\frac{2}{x^2 - x}\right)$ کدام است؟

(۱) π (۲) $\frac{\pi}{2}$

(۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) صفر

۹۷- اگر $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\sqrt{a - \sin x}}{\cos x} = b$ باشد، مقدار عدد حقیقی b کدام است؟

(۱) ۲ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۹۸- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x > 1 \\ 2 & ; x = 1 \\ 3x & ; x < 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 2x & ; x > 1 \\ 3 & ; x = 1 \\ 4x^2 & ; x < 1 \end{cases}$ باشد، تابع $f-g$ در $x=1$...

- (۱) پیوسته است. (۲) فقط پیوستگی راست دارد.
(۳) فقط پیوستگی چپ دارد. (۴) حد دارد ولی پیوسته نیست.

۹۹- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a-x} & ; x \leq 2 \\ \frac{3a}{7x-5} & ; x > 2 \end{cases}$ روی \mathbb{R} پیوسته باشد، مجموعه مقادیر قابل قبول برای a کدام است؟

(۱) $\{-1, 3\}$ (۲) $\{-1\}$ (۳) $\{3\}$ (۴) \emptyset

۱۰۰- تابع $f(x) = [x^2 + 2x]$ ، در کدام نقطه فقط پیوستگی چپ دارد؟ ($[]$ ، نماد جزء صحیح است.)

(۱) $x = -1$ (۲) $x = 0$ (۳) $x = 1$ (۴) $x = -2$

ریاضی گسسته دوازدهم - گواه، ترکیبیات (شمارش) - ۷ سوال -

۱۲۴- از ۱۰ پرسش موجود، به چند طریق می توان ۸ پرسش را جهت پاسخ گویی انتخاب کرد، به شرط آن که حداقل ۴ پرسش از ۵

پرسش اول انتخاب شود؟

(۱) ۲۵ (۲) ۳۰ (۳) ۳۲ (۴) ۳۵

۱۲۵- ۷ صندلی در یک ردیف قرار دارند. ۴ نفر به چند طریق می‌توانند روی صندلی‌ها بنشینند طوری که روی صندلی اول حتماً یک

نفر بنشیند و صندلی آخر خالی بماند؟

$P(6,3)$ (۴)

$P(7,4)$ (۳)

۲۴۰ (۲)

۶۰ (۱)

۱۲۶- تعداد راه‌های مختلف مرتب کردن حرف‌های واژه «مسلمانان» کدام است؟

۶! (۴)

۷! (۳)

۸! (۲)

۹! (۱)

۱۲۷- چند دسته ۳ تایی گل از ۵ نوع گل مختلف می‌توان ساخت؟ (تکرار مجاز است.)

۴۲ (۴)

۳۵ (۳)

۳۲ (۲)

۲۴ (۱)

۱۲۸- معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ ، چند جواب صحیح با شرط $x_i \geq i+1$ ($i=1,2,3$) دارد؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

۱۲۹- تعداد جواب‌های صحیح و غیرمنفی نامساوی $x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$ کدام است؟

۳۵ (۴)

۳۳ (۳)

۳۲ (۲)

۳۰ (۱)

۱۳۰- به چند طریق می‌توان ۶ کتاب یکسان و ۵ دفتر یکسان را بین ۴ نفر تقسیم کرد، به طوری که به هر کدام، حداقل یک کتاب

برسد و به حداقل ۱ نفر از آنها دفتر نرسد؟

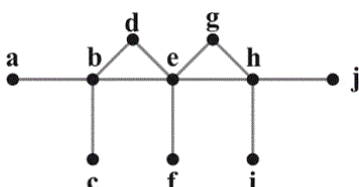
۴۸۰ (۴)

۵۲۰ (۳)

۵۶۰ (۲)

۶۰۰ (۱)

ریاضی گسسته دوازدهم - گواه، **گراف و مدل سازی** - ۳ سوال



۱۲۱- عدد احاطه‌گری گراف شکل مقابل کدام است؟

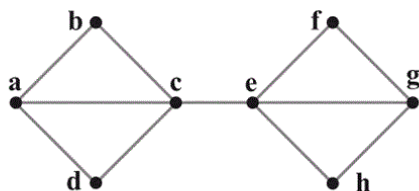
۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

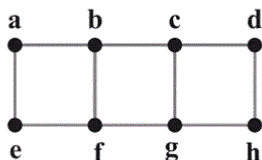
۶ (۴)

۱۲۲- گراف شکل مقابل، چند γ - مجموعه دارد؟



- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۴ (۳)
- ۶ (۴)

۱۲۳- برای گراف شکل زیر، کدام یک از مجموعه‌های زیر، احاطه گر مینیمال نیست؟



- {a, d, e, h} (۱)
- {a, b, g, h} (۲)
- {a, b, c, d} (۳)
- {a, c, f, h} (۴)

هندسه ۲ یازدهم، روابط طولی و مثلث - سوال ۵ -

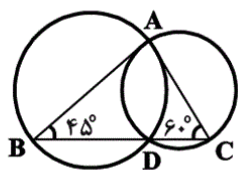
۱۳۱- در مثلث ABC ، $AB=7$ ، $AC=9$ و $BC=10$ است. طول میانه AM کدام است؟

- $\sqrt{15}$ (۱)
- $\sqrt{30}$ (۲)
- $2\sqrt{10}$ (۳)
- $4\sqrt{10}$ (۴)

۱۳۲- در مثلث ABC ، AD نیمساز داخلی زاویه A است. اگر $AC=2AD$ ، $BD=3$ و $CD=8$ باشد، طول نیمساز AD کدام است؟

- $2\sqrt{2}$ (۱)
- $2\sqrt{3}$ (۲)
- $4\sqrt{2}$ (۳)
- $4\sqrt{3}$ (۴)

۱۳۳- در شکل زیر دو دایره در نقاط A و D متقاطع‌اند. اگر BC از نقطه D بگذرد، مساحت دایره بزرگ‌تر چند برابر مساحت دایره کوچک‌تر است؟

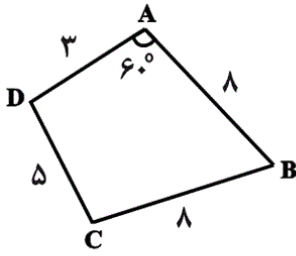


- $1/5$ (۱)
- $\sqrt{2}$ (۲)
- $\sqrt{3}$ (۳)
- ۲ (۴)

۱۳۴- در مثلث ABC ، $AB=6$ ، $AC=10$ و $\hat{A}=120^\circ$ است. شعاع دایره محاطی داخلی این مثلث کدام است؟

- $\sqrt{2}$ (۱)
- $\sqrt{3}$ (۲)
- ۲ (۳)
- ۳ (۴)

۱۳۵- در شکل زیر، مساحت چهارضلعی ABCD کدام است؟



(۱) $12\sqrt{3}$

(۲) $16\sqrt{3}$

(۳) $18\sqrt{3}$

(۴) $20\sqrt{3}$

(عادل حسینی)

ابتدا از هر پایه، یک دانش‌آموز انتخاب می‌کنیم تا در سه جایگاه یک طرف طول میز بنشینند. حال ۳ دانش‌آموز باقی مانده هر کدام به طور منحصر به فرد دقیقاً مقابل دانش‌آموز هم پایه‌ای خود می‌نشینند. تعداد راه‌های نشستن این دانش‌آموزان برابر است با:

$$\underbrace{\binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1}}_{\text{انتخاب یک دانش‌آموز از هر پایه}} \times \underset{\substack{\text{جایگشت‌های ۳} \\ \text{دانش‌آموز} \\ \text{انتخاب شده}}}{3!} = 2^3 \times 6 = 48$$

(ریاضی ۱ - شماره ۱ بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۴۰)

۴

۳

۲

۱

با توجه به اینکه حداقل یک کارشناس امور حقوقی در جلسه حضور دارد، افراد به یکی از دو حالت زیر انتخاب می‌شوند:

حالت اول: رئیس، یک معاون و فقط یکی از کارشناسان امور حقوقی انتخاب شوند و دو نفر دیگر را از میان ۹ نفر باقی مانده انتخاب کنیم. در این حالت تعداد انتخاب‌ها برابر است با:

$$\binom{1}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{9}{2} = 1 \times 3 \times 2 \times 36 = 216$$

حالت دوم: رئیس، یک معاون و هر دو کارشناس امور حقوقی انتخاب شوند و یک نفر دیگر را از میان ۹ نفر باقی مانده انتخاب کنیم. در این حالت تعداد انتخاب‌ها برابر است با:

$$\binom{1}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{2} \times \binom{9}{1} = 1 \times 3 \times 1 \times 9 = 27$$

بنابراین تعداد کل روش‌های انتخاب این افراد برابر است با:

$$216 + 27 = 243$$

(ریاضی ۱ - شماره‌ش برون شمردن: مشابه تمرین ۲ صفحه ۱۳۹)

۴

۳

۲

۱

روش اول: کدهای ۵ حرفی تولید شده توسط حروف a, a, a, b, b, c را به ۳ دسته می‌توان تقسیم کرد. که عبارت‌اند از:

الف) کدهایی که با حذف یک حرف a ساخته می‌شوند:

$$a, a, b, b, c \rightarrow \text{تعداد جایگشت‌ها} = \frac{5!}{2!2!} = 30$$

ب) کدهایی که با حذف یک حرف b ساخته می‌شوند:

$$a, a, a, b, c \rightarrow \text{تعداد جایگشت‌ها} = \frac{5!}{3!} = 20$$

۴

۳

۲

۱

(مرتضی فویم علوی)

تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ از رابطه

به دست می‌آید، بنابراین تعداد جواب‌های طبیعی معادله

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9$$
 برابر است با:

$$\binom{9-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۴

۳

۲ ✓

۱

(امیر حسین ابومحبوب)

$$x_1 > 3 \Rightarrow x_1 = y_1 + 3; y_1 \geq 1$$

$$2 \leq i \leq 4: x_i \geq 1 \Rightarrow x_i = y_i; y_i \geq 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$$

$$\Rightarrow (y_1 + 3) + y_2 + y_3 + y_4 + 2 = 12$$

$$\Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 7$$

تعداد جواب‌های معادله صورت سؤال با شرایط داده شده برابر تعداد

جواب‌های طبیعی معادله اخیر است، پس داریم:

$$\text{تعداد جواب‌ها} = \binom{7-1}{4-1} = \binom{6}{3} = 20$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: مشابه کار در کلاس صفحه ۶۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\text{تعداد جوابها} = \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$$

$$x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 3 \Rightarrow$$

$$\text{تعداد جوابها} = \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$$

بنابراین تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله مفروض برابر است با:

$$36 + 10 = 46$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(هومن نورائی)

۱۲۰ -

اگر $x_i = 2k_i + 1$ ($1 \leq i \leq 3$) انتخاب شود، آنگاه داریم:

$$(2k_1 + 1) + (2k_2 + 1) + (2k_3 + 1) = 17$$

$$\Rightarrow 2(k_1 + k_2 + k_3) = 14 \Rightarrow k_1 + k_2 + k_3 = 7$$

تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله حاصل برابر است با:

$$\binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(نیلوفر مهروی)

۱۱۱ -

مجموعه $D = \{a, c, d, g, h\}$ یک مجموعه احاطه گر گراف G نیست،

زیرا رأس i توسط هیچ یک از رأس‌های این مجموعه احاطه نمی‌شود.

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل سازی: صفحه‌های ۴۴ و ۴۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر عدد احاطه‌گری گرافی برابر ۱ باشد، آنگاه رأسی در این گراف وجود دارد که با تمامی $p-1$ رأس دیگر گراف مجاور است، بنابراین چنین گرافی حداقل $p-1$ یال دارد.

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۴۴ و ۴۵)

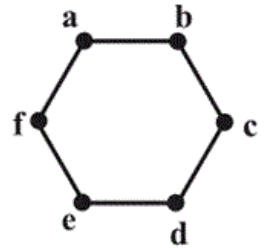
 ۴

 ۳

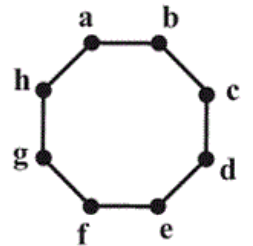
 ۲ ✓

 ۱

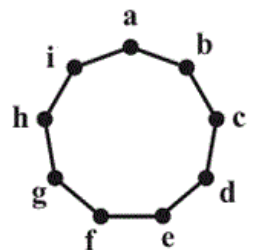
گزینه «۱»: عدد احاطه‌گری گراف C_6 ، برابر ۲ است ولی مطابق شکل مجموعه $A = \{a, c, e\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال برای این گراف است.



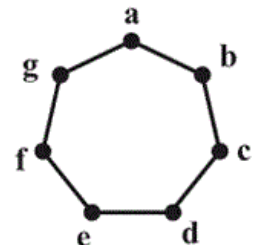
گزینه «۳»: عدد احاطه‌گری گراف C_8 ، برابر ۳ است ولی مطابق شکل مجموعه $B = \{a, c, e, g\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال برای این گراف است.



گزینه «۴»: عدد احاطه‌گری گراف C_9 ، برابر ۳ است ولی مطابق شکل مجموعه $C = \{a, d, f, h\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال برای این گراف است.



گزینه «۲»: عدد احاطه‌گری گراف C_7 ، برابر ۳ است و هر مجموعه احاطه‌گر مینیمال این گراف دقیقاً دارای ۳ عضو است.



(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

انحراف معیار برآورد میانگین جامعه $(\sigma_{\bar{x}})$ ، برابر است با انحراف معیار

جامعه تقسیم بر جذر اندازه نمونه، بنابراین داریم:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.5 = \frac{\sigma}{\sqrt{324}} \Rightarrow \sigma = 0.5 \times 18 = 9$$

در نتیجه انحراف معیار جامعه برابر ۹ است.

(آمار و احتمال - آمار استنباطی؛ صفحه ۱۲۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(نیلوفر مهروی)

انحراف معیار برآورد میانگین جامعه برابر است با انحراف معیار جامعه

تقسیم بر جذر اندازه نمونه. بنابراین داریم:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \frac{4}{100} \sigma \Rightarrow \sqrt{n} > 25 \Rightarrow n > 625 \Rightarrow n \geq 626$$

(آمار و احتمال - آمار استنباطی؛ صفحه ۱۲۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

میانگین اعداد صحیح از صفر تا N برابر است با:

$$\mu = \frac{0+1+2+\dots+N}{N+1} = \frac{\frac{N(N+1)}{2}}{N+1} = \frac{N}{2}$$

از طرفی میانگین اعداد انتخاب شده برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{4+5+11+14+18+20}{6} = \frac{72}{6} = 12$$

بنابراین برآورد نقطه‌ای N به کمک پارامتر میانگین به صورت زیر است:

$$\frac{N}{2} = 12 \Rightarrow N = 24$$

(آمار و احتمال - آمار استنباطی؛ مشابه تمرین ۲ صفحه ۱۲۵)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\bar{X} = \frac{۲+۳+۴+۷+۹}{۵} = ۵$$

میانگین جامعه:

| نمونه سه تایی | برآورد نقطه‌ای میانگین |
|---------------|------------------------|
| ۲, ۳, ۴ | ۳ |
| ۲, ۳, ۷ | ۴ |
| ۲, ۳, ۹ | ۴/۶۷ |
| ۲, ۴, ۷ | ۴/۳۳ |
| ۲, ۴, ۹ | ۵ |
| ۲, ۷, ۹ | ۶ |
| ۳, ۴, ۷ | ۴/۶۷ |
| ۳, ۴, ۹ | ۵/۳۳ |
| ۳, ۷, ۹ | ۶/۳۳ |
| ۴, ۷, ۹ | ۶/۶۷ |

بنابراین برآورد نقطه‌ای میانگین ۵ نمونه سه تایی از میانگین واقعی کمتر است.

اگر پیشامد مورد نظر را با A نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$P(A) = \frac{۵}{۱۰} = ۰/۵$$

(آمار و احتمال - آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر نمونه‌ای تصادفی به اندازه n در اختیار داشته باشیم، با اطمینان بیش از ۹۵ درصد می‌توانیم بگوییم:

$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\mu \text{ میانگین و } \sigma \text{ انحراف معیار جامعه است})$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = 37 \\ \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = 43 \end{array} \right\} \xrightarrow{-} \frac{4\sigma}{\sqrt{n}} = 6$$

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{6}{4} = 1.5$$

(آمار و احتمال - آمار استنباطی: صفحه‌های ۱۲۱ و ۱۲۲)

۴

۳

۲

۱

(عرفان صادقی)

$f'(a)$ شیب خط مماس بر نمودار f در $x = a$ می‌باشد.

$$f'(-2): x = -2 \text{ در } f \text{ بر خط مماس } = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

از آن جایی که g بر f عمود است، شیب خط g قرینه و معکوس شیب خط f است.

$$g'(2): x = 2 \text{ در } g \text{ بر خط مماس } = \frac{-1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow f'(-2) + g'(2) = \frac{\sqrt{3}}{3} + -\sqrt{3} = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$$

(مسابقه ۲ - صفحه‌های ۷۲ تا ۷۶)

۴

۳

۲

۱

تابع در $x_0 = \pi$ پیوسته است. زیرا داریم:

$$f(\pi) = \pi^2 [-3] = -3\pi^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = -3\pi^2$$

علاوه بر این در همسایگی $x_0 = \pi$ ، ضابطه تابع به صورت $f(x) = -3x^2$ خواهد بود که واضح است این تابع مشتق‌پذیر است.

(مسئله ۲- صفحه‌های ۸۴ تا ۸۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ابتدا ضابطه را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \sin x$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

(مسئله ۲- صفحه ۹۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

برای $x \geq 2$ ، ضابطه تابع را می‌توان به صورت $g(x) = (2-a)x + 2a + 1$ نوشت. حال داریم:

$$g'(x) = 2 - a \Rightarrow g'(2) = 2 - a$$

$$\Rightarrow f'_+(2) = g'(2) = 2 - a = 3 \Rightarrow a = -1$$

(مسئله ۲- صفحه‌های ۸۴ تا ۸۷ و ۹۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$= 2x^2 + \frac{2x}{x+1} + x^2 - 1 - \frac{x-1}{x+1} = 3x^2 - 1 + \frac{2x-x+1}{x+1} = 3x^2$$

$$\Rightarrow g'(x) = 6x \Rightarrow g'(4) = 24$$

راه حل دوم:

$$g(x) = ((x^2 - 1)f(x))'$$

$$(x^2 - 1)f(x) = (x^2 - 1)\left(\frac{x^2 + x + 1}{x + 1}\right)$$

$$= (x-1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$$

$$\Rightarrow g(x) = (x^3 - 1)' = 3x^2 \Rightarrow g'(x) = 6x \Rightarrow g'(4) = 24$$

(مسایان ۲- صفحه‌های ۹۳ و ۹۴)

۴

۳

۲

۱

(میلاد سبازی سیرجانی)

۸۶- فصل ۳

$$g(x) = x^2 + 1 \Rightarrow g(1) = 2$$

$$g'(x) = 2x \Rightarrow g'(1) = 2$$

نقاط $(0, 1)$ و $(2, 4)$ روی خط d قرار دارند.

$$f'(x): x = 2 \text{ در } f \text{ نمودار بر مماس خط مماس } = m_d = \frac{4-1}{2-0} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow (f \circ g)'(1) = g'(1)f'(g(1)) = g'(1) \times f'(2) = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

(مسایان ۲- صفحه ۹۶)

۴

۳

۲

۱

(کاظم اجلالی)

$$f(2x) = g(x^2) \Rightarrow 2f'(2x) = 2xg'(x^2) \Rightarrow f'(2x) = xg'(x^2)$$

$$\Rightarrow 2f''(2x) = g'(x^2) + 2x^2g''(x^2)$$

بنابراین به ازای $x = 2$ داریم:

$$2f''(4) = g'(4) + 8g''(4)$$

از طرف دیگر داریم:

$$\begin{cases} g'(x) = \frac{3x}{x-1} \Rightarrow g'(4) = \frac{12}{3} = 4 \\ g''(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow g''(4) = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2f''(4) = 4 + 8\left(-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow f''(4) = \frac{2}{3}$$

(مسئله ۲- صفحه‌های ۹۶ و ۹۸)

(علی شهرابی)

با دو اتحاد $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ و $1 - \sin 2x = (\sin x - \cos x)^2$ ضابطه f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 - \sin 2x}}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{\sqrt{(\sin x - \cos x)^2}}{\sqrt{\cos^2 x}} = \frac{|\sin x - \cos x|}{|\cos x|}$$

در همسایگی $x = \frac{5\pi}{3}$ ، با تعیین علامت عبارتهای داخل قدر مطلقضابطه f به صورت زیر در می‌آید:

(عادل حسینی)

به ازای هر f ضابطه داده شده برای g تابع $f + g$ در $x = 0$ پیوسته است. حال برای تابع f داریم:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & ; x < 0 \\ 1 & ; x > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1$$

بنابراین برای اینکه تابع $f + g$ در $x = 0$ مشتق‌پذیر باشد، شیب نیم‌ماس چپ g در $x = 0$ ، باید از شیب نیم‌ماس راست آن ۱ واحد بیشتر باشد.

ضابطه تابع گزینه «۲» ویژگی مورد نظر را دارد:

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 - 1 & ; x \leq 0 \\ -x - 2 & ; x > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \begin{cases} -2x & ; x < 0 \\ -1 & ; x > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = -1$$

$$\Rightarrow (f + g)'_-(0) = (f + g)'_+(0) = 0$$

(مسئله ۲ - صفحه‌های ۸۷ و ۹۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

(کامران ابراهیمی)

آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازه $[0, a]$ برابر است با:

$$A = \frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = \frac{a^3 - 4a - 0}{a} = a^2 - 4$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در $x = \sqrt{a}$ نیز برابر $f'(\sqrt{a})$ است:

$$f'(x) = 3x^2 - 4 \Rightarrow f'(\sqrt{a}) = 3a - 4 = B$$

$$\Rightarrow A - B = a^2 - 3a$$

حداقل مقدار $a^2 - 3a$ برابر $-\frac{9}{4}$ است که به ازای $a = \frac{3}{2}$ به دست می‌آید.

(مسئله ۲ - صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۰۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

با قرار گرفتن لامپ در راستای عمودی یکسان با کانون سهمی اما کمی بالاتر یا پایین‌تر، شعاع‌های نور کماکان موازی با هم (نه موازی با محور) اما رو به بالا یا پایین خارج می‌شوند که اصطلاحاً نور بالا یا نور پایین ایجاد می‌کنند.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه ۵۶)

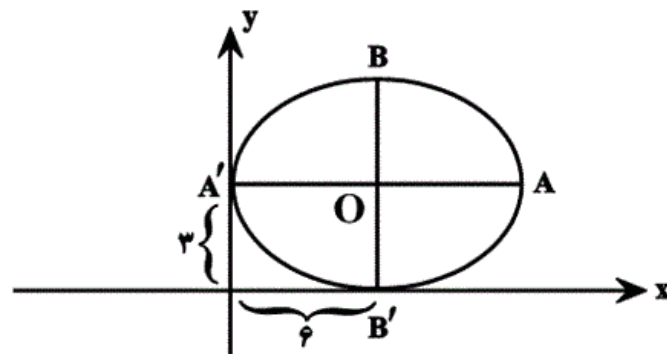
۴

۳

۲

۱ ✓

مطابق شکل در این بیضی $a = OA' = 6$ و $b = OB' = 3$ است، بنابراین داریم:



$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 36 = 9 + c^2 \Rightarrow c^2 = 27$$

$$\Rightarrow c = 3\sqrt{3} \Rightarrow \text{فاصله کانونی} = 2c = 6\sqrt{3}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

اگر d قطر دهانه، h گودی (عمق) و a فاصله کانونی یک دیش مخابراتی

$$a = \frac{d^2}{16h}$$

باشد، آنگاه داریم:

قطر دهانه دیش، دو برابر شعاع آن است، یعنی $d = 48$ و در نتیجه داریم:

$$a = \frac{d^2}{16h} \Rightarrow h = \frac{d^2}{16a} = \frac{48 \times 48}{16 \times 9} = 16$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: مشابه تمرین ۱۳ صفحه ۵۹)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$\text{کانون سهمی: } F(a+h, k) = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}, -1\right) = (2, -1)$$

چون محور تقارن سهمی موازی محور x ها است، پس پرتوهای نوری که

موازی با محور x ها به سهمی می‌تابند، پس از بازتاب از کانون سهمی یعنی

نقطه $F(2, -1)$ عبور می‌کنند.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۰ تا ۵۶)

۴

۳

۲ ✓

۱

با توجه به محور تقارن و مختصات رأس و نقطه واقع بر سهمی، دهانه این سهمی رو به پایین است و داریم:

$$\text{معادله سهمی: } (x-2)^2 = -4a(y+1) \xrightarrow{(6,-3)} (6-2)^2 = -4a(-3+1)$$

$$\Rightarrow 16 = 8a \Rightarrow a = 2$$

$$\text{معادله خط هادی: } y = a + k \Rightarrow y = 2 - 1 = 1$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۰ تا ۵۶)

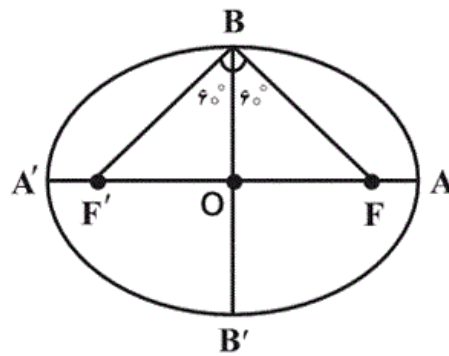
۴

۳

۲

۱ ✓

با توجه به اینکه BB' محور تقارن بیضی است، پس $\widehat{OBF} = \widehat{OBF'} = 60^\circ$ است و در نتیجه در مثل قائم‌الزاویه OBF داریم:



$$BF^2 = OB^2 + OF^2 = b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow BF = a$$

$$\sin(\widehat{OBF}) = \frac{OF}{BF} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{c}{a} \Rightarrow \text{خروج از مرکز بیضی: } e = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

اگر A و B دو سر پاره‌خط حاصل از تلاقی خط و سهمی باشند، x_A و x_B ریشه‌های

معادله درجه دوم فوق هستند. اگر M وسط پاره‌خط AB باشد، آنگاه داریم:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-\frac{b}{a}}{2} \Rightarrow x = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

بنابراین مکان هندسی وسط پاره‌خط‌های مفروض، خط به معادله $x = \frac{1}{4}$ است.

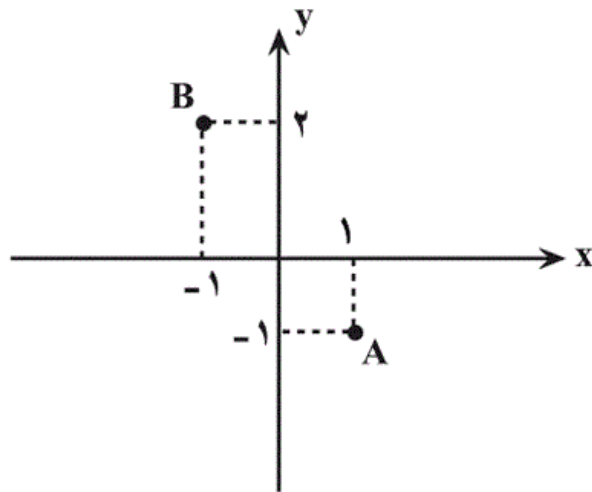
(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: مشابه تمرین ۱۵ صفحه ۵۹)

۴

۳

۲

۱ ✓



با توجه به مختصات نقاط A و B، سهمی یکی از دو حالت زیر را داراست:

الف) دهانه سهمی رو به بالا است. در این صورت داریم:

$$\text{معادله سهمی } \xrightarrow{(-1, 2)} (x-1)^2 = 4a(y+1)$$

$$(-1-1)^2 = 4a(2+1) \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$\text{کانون سهمی } : F(h, a+k) = (1, \frac{1}{3}-1) = (1, -\frac{2}{3})$$

ب) دهانه سهمی رو به چپ است، در این صورت داریم:

$$\text{معادله سهمی } \xrightarrow{(-1, 2)} (y+1)^2 = -4a(x-1)$$

$$(2+1)^2 = -4a(-1-1) \Rightarrow a = \frac{9}{8}$$

$$\text{کانون سهمی } : F(-a+h, k) = (-\frac{9}{8}+1, -1) = (-\frac{1}{8}, -1)$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۰ تا ۵۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$\triangle CDF: FD^2 = CF^2 - CD^2 = a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow FD = c$$

$$AF = OA - OF = a - c$$

$$FD = AF + AD \Rightarrow c = (a - c) + AD \Rightarrow AD = 2c - a$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{طول قطر بزرگ: } 2a = 4\sqrt{2} \Rightarrow a = 2\sqrt{2} \\ \text{طول قطر کوچک: } 2b = 4 \Rightarrow b = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow c^2 = 8 - 4 = 4 \Rightarrow c = 2$$

$$\frac{AD}{AF} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 2} = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}{2(\sqrt{2} - 1)} = \sqrt{2}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: مشابه تمرین ۶ صفحه ۵۸)

۴ ✓

۳

۲

۱

پرتوی نوری که از کانون سهمی بر بدنه آن بتابد، موازی با محور سهمی بازتاب می‌یابد. ابتدا معادله سهمی را به صورت متعارف می‌نویسیم:

$$y^2 + 8y - 8x = 0 \Rightarrow y^2 + 8y + 16 = 8x + 16 \Rightarrow (y+4)^2 = 8(x+2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{رأس سهمی: } A(-2, -4) \\ 4a = 8 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

دهانه سهمی رو به راست است، بنابراین داریم:

$$\text{کانون سهمی: } F(a+h, k) = (2-2, -4) = (0, -4)$$

شیب خطی که با جهت مثبت محور x ها، زاویه 45° می‌سازد، برابر ۱ است، بنابراین داریم:

$$\text{معادله پرتو تابش: } y+4 = 1(x-0) \Rightarrow x = y+4 \quad (1)$$

$$y^2 + 8y - 8x = 0 \xrightarrow{(1)} y^2 + 8y - 8(y+4) = 0$$

$$\Rightarrow y^2 = 32 \Rightarrow y = \pm 4\sqrt{2}$$

محور تقارن سهمی موازی محور x ها است، پس پرتوی بازتاب یکی از دو خط $y = 4\sqrt{2}$ یا $y = -4\sqrt{2}$ خواهد بود.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۰ تا ۵۶)

۴ ✓

۳

۲

۱

(عادل حسینی)

عدد ۲- باید عضو بازه $(1, 3x+1)$ باشد. بنابراین باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} 2x-1 < -2 \Rightarrow x < -\frac{1}{2} & (1) \\ 3x+1 > -2 \Rightarrow x > -1 & (2) \end{cases}$$

 1 2 3 4

(عادل حسینی)

با فرض اینکه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = L$ باشد، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3f(x) - 7}{4 - f(x)} = \frac{3 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - 7}{4 - \lim_{x \rightarrow 1} f(x)} = \frac{3L - 7}{4 - L} = 2 \Rightarrow L = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + f(x)}{f(x) - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 3}{2} = \frac{5}{2}$$

(مسئله ۱- صفحه ۱۱۹)

 1 2 3 4

(عادل حسینی)

در همسایگی $x = 0$ ، مقدار تابع $y = 2 - x^2$ کم‌تر از ۲ است و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(2 - x^2)] = \lim_{x \rightarrow 2^-} [f(x)]$$

حال از روی نمودار واضح است که مقدار تابع f در همسایگی چپ $x = 2$ ، کم‌تر از ۲ است و در نتیجه $[f(x)] = 1$ است.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} [f(2 - x^2)] = 1$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۲۵)

 1 2 3 4

با توجه به نمودار تابع f واضح است که:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$$

حال تابع g در $x = 2$ هنگامی حد دارد که حدهای چپ و راست آن در این نقطه برابر باشند:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + mf(x)}{m[x] + f(x)} = \frac{4 + 3m}{m + 3} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + mf(x)}{m[x] + f(x)} = \frac{4 + 2m}{2m + 2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{چپ و راست}]{\text{برابری حدود}} \frac{3m + 4}{m + 3} = \frac{m + 2}{m + 1}$$

$$\Rightarrow 3m^2 + 7m + 4 = m^2 + 5m + 6$$

$$\Rightarrow 2m^2 + 2m - 2 = 0 \Rightarrow m^2 + m - 1 = 0$$

معادله فوق ۲ جواب دارد که مجموع آنها برابر ۱- است.

(مسئله ۱- صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۳۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x - \left(\frac{x^2}{4} - x + 1 \right)}{x^2 \left(\sqrt{1 - x - \frac{x}{2}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{4}}{2x^2} = -\frac{1}{8}$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

در همسایگی راست $x=2$ ، مقدار تابع $y = x^2 - x$ بیشتر از ۲ و در

نتیجه مقدار $y = \frac{2}{x^2 - x}$ کم‌تر از ۱ است. بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f\left(\frac{2}{x^2 - x}\right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

برای به‌دست آوردن حاصل حد فوق، باید از ضابطه بالایی تابع f استفاده کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin \pi x}{1 - x}$$

با تغییر متغیر $t = 1 - x$ داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin \pi(1-t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin \pi t}{t} \\ &= \pi \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin \pi t}{\pi t} = \pi \end{aligned}$$

(مسابان ۱- صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۲۵ و ۱۴۱ تا ۱۴۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

مخرج کسر داده شده در همسایگی $x = \frac{\pi}{2}$ برابر صفر است. بنابراین برای اینکه حاصل حد برابر با مقدار متناهی b شود، صورت کسر نیز باید مقدار صفر را به خود بگیرد.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{a - \sin x} &= 0 \xrightarrow{x = \frac{\pi}{2}} \sqrt{a - 1} = 0 \Rightarrow a = 1 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\sqrt{1 - \sin x}}{\cos x} &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \left(\frac{\sqrt{1 - \sin x}}{\cos x} \times \frac{\sqrt{1 + \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x}} \right) \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\cos x \sqrt{1 + \sin x}} &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{|\cos x|}{\sqrt{2} \cos x} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\cos x}{\sqrt{2} \cos x} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

دقت کنید که در همسایگی چپ $x = \frac{\pi}{2}$ (یعنی اینکته انتهای کمان زاویه در ربع اول باشد)، $\cos x$ مثبت است.

(مسابان ۱- صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۴

۳

۲

۱

$$h(x) = (f - g)(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & ; x > 1 \\ -1 & ; x = 1 \\ 3x - 4x^2 & ; x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h(1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 2x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x - 4x^2) = -1 \end{cases}$$

پس تابع $f - g$ در $x = 1$ پیوسته است.

(مسئله ۱- صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

۴

۳

۲

۱

(فرمود فارسی بانی)

۹۹ - آزمون

در ابتدا تابع باید در $x = 2$ پیوسته باشد:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{a-x} = \frac{1}{a-2} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3a}{7x-5} = \frac{3a}{9} = \frac{a}{3} \end{cases}$$

همچنین $f(2) = \frac{1}{a-2}$ است. بنابراین برای اینکه تابع پیوسته باشد، کافی

است حدهای چپ و راست برابر باشند.

$$\Rightarrow \frac{1}{a-2} = \frac{a}{3} \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow a = -1 \text{ یا } a = 3$$

اما به ازای $a = -1$ ، خط $x = -1$ مجانب قائم نمودار تابع در ضابطه

بالایی آن است، بنابراین تابع f نمی‌تواند روی \mathbb{R} پیوسته باشد. اما به ازای

$a = 3$ پیوستگی روی \mathbb{R} برقرار است.

(مسئله ۱- صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

۴

۳

۲

۱

(سعید علم‌پور)

$$f(x) = [(x+1)^2 - 1] = [(x+1)^2] - 1$$

تابع $h(x) = [g(x)]$ در نقاطی که $g(x) \in \mathbb{Z}$ باشد (غیر از نقطهٔ مینیمم نسبی آن)، ناپیوسته است. اگر g نزولی باشد، تابع h در این نقاط فقط پیوستگی چپ دارد. (به عنوان مثال می‌توانید تابع $y = -x$ را در نظر بگیرید.)

حال در این سؤال، برای این که $f(x) = [(x+1)^2] - 1$ ، فقط پیوستگی چپ داشته باشد، نقطهٔ مورد نظر باید در قسمت نزولی سهمی $y = (x+1)^2$ قرار داشته باشد. سهمی $y = (x+1)^2$ در بازهٔ $[-\infty, -1]$ اکیداً نزولی است، اما از آنجا که $x = -1$ طول رأس سهمی است و تابع f در آن پیوسته است، پاسخ صحیح $x = -2$ است.

دقت کنید که به ازای مقادیر همهٔ گزینه‌ها، $(x+1)^2$ مقداری صحیح دارد.

(مسئله ۱- صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سراسری ریاضی - ۸۹)

می‌توان ۴ پرسش از ۵ پرسش اول و ۴ پرسش از ۵ پرسش آخر و یا هر ۵ پرسش اول و ۳ پرسش از ۵ پرسش آخر را انتخاب نمود. داریم:

$$\binom{5}{4} \binom{5}{4} + \binom{5}{5} \binom{5}{3} = 25 + 10 = 35$$

(ریاضی ۱- شمارش برون شمردن؛ صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ابتدا یکی از ۴ نفر را برای صندلی اول انتخاب می‌کنیم و سپس ۳ نفر باقی‌مانده از میان ۵ صندلی وسط، جای خود را انتخاب می‌کنند. داریم:

$$\binom{4}{1} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} = 240$$

\downarrow انتخاب نفر اول \downarrow انتخاب صندلی دوم \downarrow انتخاب صندلی سوم \downarrow انتخاب صندلی نفر چهارم

(ریاضی ۱- شماره‌ش برون شمردن؛ صفحه‌های ۱۲۶ تا ۱۴۰)

۴

۳

۲✓

۱

در کلمهٔ مسلمانان، حرف «الف» ۲ بار و حرف «ن» ۲ بار و حرف «م» نیز ۲ بار تکرار شده و تعداد کل حروف ۸ تا می‌باشد. بنابراین:

$$\text{تعداد جایگشت‌ها} = \frac{8!}{2! \times 2! \times 2!} = \frac{8 \times 7!}{8} = 7!$$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات؛ صفحه‌های ۵۸ و ۵۹)

۴

۳✓

۲

۱

$$\text{تعداد جواب‌ها} = \binom{n+k-1}{n} = \binom{3+5-1}{3} = \binom{7}{3} = 35$$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات؛ صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۴

۳✓

۲

۱

با توجه به شرط $(i = 1, 2, 3)$ $x_i \geq i+1$ ، سه متغیر y_1 ، y_2 و y_3 را می‌توان در معادله جایگزین کرد:

$$x_1 = y_1 + 2, x_2 = y_2 + 3, x_3 = y_3 + 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 2$$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله برابر است با:

$$\binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

با افزودن یک متغیر جدید، نامساوی را به یک معادله تبدیل می‌کنیم:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, x_i \geq 0 \quad (1 \leq i \leq 4)$$

$$\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی} = \binom{4+4-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

تعداد حالات تقسیم ۶ کتاب یکسان بین ۴ نفر به طوری که به هر کدام حداقل یک کتاب برسد، برابر تعداد جواب‌های طبیعی معادله

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \text{، یعنی برابر } 10 = \binom{5}{3} = \binom{6-1}{4-1} \text{ است.}$$

همچنین می‌خواهیم به حداقل ۱ نفر دفتر نرسد، پس تعداد جواب‌های طبیعی $(y_i \geq 1)$ معادله $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 5$ را از تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی همین معادله کم می‌کنیم، یعنی:

$$\binom{5+4-1}{4-1} - \binom{5-1}{4-1} = \binom{8}{3} - \binom{4}{3} = 56 - 4 = 52$$

$$\Rightarrow \text{کل حالات} = 10 \times 52 = 520$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۴

۳✓

۲

۱

مجموعه $\{b, e, h\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای این گراف است، بنابراین عدد احاطه‌گری گراف، برابر ۳ می‌باشد. دقت کنید که در این گراف، رئوس a, c, f, i و j ، همگی از درجه یک هستند و برای احاطه کردن این رئوس، حداقل به سه رأس b, e و h نیاز داریم.

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی: مشابه کار در کلاس صفحه ۴۷)

۴

۳

۲

۱✓

عدد احاطه‌گری این گراف، برابر ۲ است و هر مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمم (۲-مجموعه) آن، لزوماً باید یکی از دو رأس a و c و یکی از دو رأس e و g را شامل شود. بنابراین تعداد ۲-مجموعه‌ها برابر $2 \times 2 = 4$ است.

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۴

۳

۲

۱

مجموعه $\{a, b, g, h\}$ ، یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال برای این گراف نیست، زیرا با حذف یکی از دو رأس g یا b ، هر کدام از دو مجموعه‌ی $\{a, b, h\}$ و $\{a, g, h\}$ ، قادر به احاطه‌ی تمامی رأس‌های گراف هستند.

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

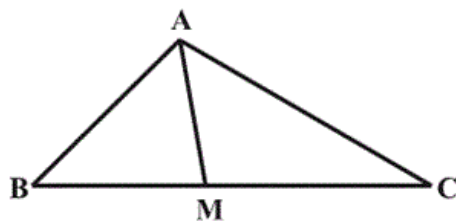
۴

۳

۲

۱

طبق قضیه میانه‌ها در مثلث ABC داریم:



$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$$\Rightarrow 7^2 + 9^2 = 2AM^2 + \frac{10^2}{2}$$

$$\Rightarrow 130 = 2AM^2 + 50 \Rightarrow AM^2 = 40 \Rightarrow AM = 2\sqrt{10}$$

(هندسه ۲ - روابط طولی در مثلث: صفحه ۶۹)

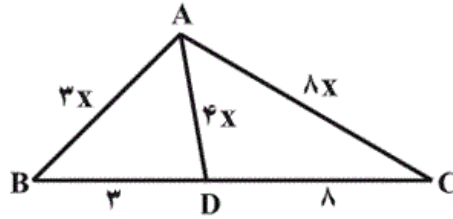
۴

۳

۲

۱

با توجه به قضیه نیمسازهای زاویه‌های داخلی داریم:



$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{3}{8} \Rightarrow \begin{cases} AB = 3x \\ AC = 8x \Rightarrow AD = 4x \end{cases}$$

طبق رابطه طول نیمساز زاویه داخلی داریم:

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC \Rightarrow (4x)^2 = 3x \times 8x - 3 \times 8$$

$$\Rightarrow 16x^2 = 24 \Rightarrow x^2 = 3 \xrightarrow{x > 0} x = \sqrt{3} \Rightarrow AD = 4\sqrt{3}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث: صفحه‌های ۷۰ تا ۷۲)

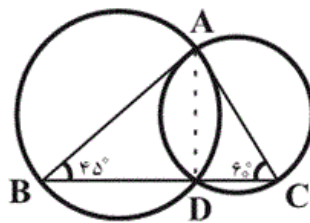
 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

وتر مشترک AD را رسم می‌کنیم. اگر R و R' شعاع‌های دایره‌های کوچک و بزرگ باشند، با توجه به قضیه سینوس‌ها در دو مثلث ABD و ACD داریم:



$$\Delta ABD: \frac{AD}{\sin 45^\circ} = 2R \Rightarrow R = \frac{AD}{2 \sin 45^\circ} = \frac{AD}{\sqrt{2}}$$

$$\Delta ACD: \frac{AD}{\sin 60^\circ} = 2R' \Rightarrow R' = \frac{AD}{2 \sin 60^\circ} = \frac{AD}{\sqrt{3}}$$

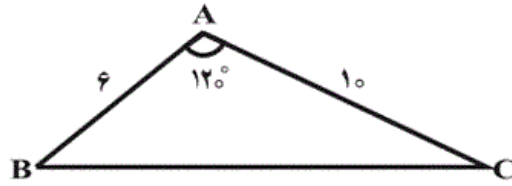
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱ ✓

طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABC داریم:



$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \hat{A} \\ &= 36 + 100 - 2 \times 6 \times 10 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 196 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow BC = 14$$

طبق رابطه سینوسی مساحت مثلث داریم:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times 6 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$$

همچنین محیط مثلث ABC، برابر $2P = 6 + 10 + 14 = 30$ است، پس داریم:

$$\text{شعاع دایره محاطی داخلی: } r = \frac{S}{P} = \frac{15\sqrt{3}}{30} = \sqrt{3}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث: صفحه‌های ۶۶ تا ۶۹، ۷۴ و ۷۵)

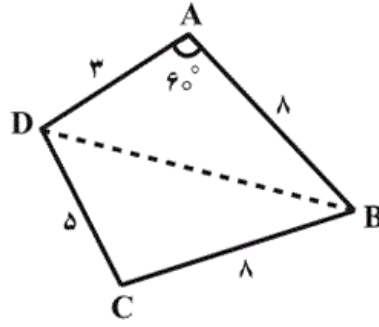
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABD داریم:



$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD \times \cos \hat{A}$$

$$= 64 + 9 - 2 \times 8 \times 3 \times \frac{1}{2} = 49 \Rightarrow BD = 7$$

چهار ضلعی ABCD از دو مثلث ABD و BCD تشکیل شده است، پس

مساحت آن برابر مجموع مساحت‌های این دو مثلث است. داریم:

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \times AD \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times 8 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$P_{BCD} = \frac{BC + CD + BD}{2} = \frac{8 + 5 + 7}{2} = 10$$

$$S_{BCD} = \sqrt{10(10-8)(10-5)(10-7)} = \sqrt{10 \times 2 \times 5 \times 3} = 10\sqrt{3}$$

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = 6\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث: صفحه‌های ۷۳ تا ۷۶)

۴

۳

۲ ✓

۱