

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

ریاضی ۲، روابط تکمیلی بین نسبت های مثلثاتی - ۱ سوال

۷۹- اگر $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) - \cos(\alpha - \pi)}$ کدام است؟

$\frac{1}{15}$ (۴)

$\frac{1}{5}$ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

ریاضی ۲، تابع نمایی و ویژگی های آن - ۴ سوال

۷۲- اگر $2^{2x-3} < 2^{x-1}$ باشد، حدود x کدام است؟

$x > -4$ (۴)

$x < 4$ (۳)

$x < 2$ (۲)

$x > -2$ (۱)

۷۳- نمودار توابع $f(x) = 2^x$ و $g(x) = |x|$ با دامنه مجموعه اعداد حقیقی، در چند نقطه با هم برخورد دارند؟

صفر (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۷۴- اگر α و β ریشه های معادله $9^{x-2} = 3^{x^2-3x}$ و $\alpha > \beta$ باشد، کدام نقطه زیر، روی منحنی $f(x) = (\alpha - \beta)^x$ قرار دارد؟

$(-2, \frac{1}{9})$ (۴)

$(-1, 3)$ (۳)

$(-2, 9)$ (۲)

$(\frac{1}{2}, 3)$ (۱)

۷۷- به ازای کدام مقادیر a ، تابع $y = (\frac{a+1}{a-2})^x$ ، یک تابع نمایی است؟

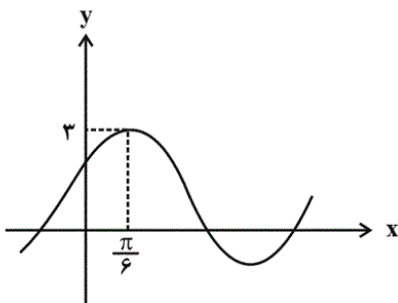
$(-1, +\infty)$ (۴)

$(-\infty, 2)$ (۳)

$(-1, 2)$ (۲)

$(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ (۱)

ریاضی ۲، مثلثات - ۱ سوال



۸۰- اگر بخشی از نمودار تابع $y = a \sin(bx) + 1$ به صورت روبه رو باشد، مقدار ab کدام است؟

۶ (۲)

۳ (۱)

-۶ (۴)

-۳ (۳)

ریاضی ۲، تابع لگاریتمی و ویژگی های آن - ۴ سوال

۷۴- نمودارهای دو تابع $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ و $g(x) = \log_3(-x)$ نسبت به هم چگونه‌اند؟

- (۱) منطبق بر هم
 (۲) در هیچ نقطه‌ای متقاطع نیستند.
 (۳) $f(x)$ همواره بالاتر از $g(x)$ است.
 (۴) $g(x)$ همواره بالاتر از $f(x)$ است.

۷۵- اگر $\log_3^{(2+\log_3^x)} = 2$ باشد، حاصل $\log_3^{(\log_3(x-1))}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
 (۲) ۱
 (۳) $\frac{3}{2}$
 (۴) ۲

۷۸- اگر $\log_3 x = y$ و $\log_3 17 = y$ ، آنگاه حاصل $\log_3 \sqrt[3]{5/1}$ بر حسب x و y همواره کدام است؟

- (۱) $\frac{x+2y-1}{3x}$
 (۲) $\frac{x+2y-1}{2x}$
 (۳) $\frac{x+y-1}{3x}$
 (۴) $\frac{x+y-1}{2x}$

۷۱- اگر $f(x) = 2 - 4 \log(2x + 2)$ باشد، $f(49)$ کدام است؟

- (۱) -۶
 (۲) -۲
 (۳) -۴
 (۴) -۱

ریاضی ۲- سوالات موازی، روابط تکمیلی بین نسبت های مثلثاتی - ۲ سوال

۹۳- حاصل عبارت $\cos \frac{\pi}{20} + \cos \frac{2\pi}{20} + \dots + \cos \frac{19\pi}{20}$ کدام است؟

- (۱) ۱
 (۲) -۱
 (۳) صفر
 (۴) ۲

۹۹- اگر $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) - \cos(\alpha - \pi)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$
 (۲) $\frac{1}{4}$
 (۳) $\frac{1}{5}$
 (۴) $\frac{1}{15}$

ریاضی ۲- سوالات موازی، تابع نمایی و ویژگی های آن - ۶ سوال

۹۵- اگر $2^{x-1} < 2^{2x-3}$ باشد، حدود x کدام است؟

- (۱) $x > -2$
 (۲) $x < 2$
 (۳) $x < 4$
 (۴) $x > -4$

۹۶- نمودار توابع $f(x) = 2^x$ و $g(x) = |x|$ با دامنه مجموعه اعداد حقیقی، در چند نقطه با هم برخورد دارند؟

۴) صفر

۳) ۳

۲) ۲

۱) ۱

۹۷- اگر α و β ریشه‌های معادله $3^{x^2-2} = 3^{x^2-3x}$ و $\alpha > \beta$ باشد، کدام نقطه زیر، روی منحنی $f(x) = (\alpha - \beta)^x$ قرار دارد؟

۴) $(-2, \frac{1}{9})$

۳) $(-1, 3)$

۲) $(-2, 9)$

۱) $(\frac{1}{2}, 3)$

۹۸- به ازای کدام مقادیر a ، تابع $y = (\frac{a+1}{a-2})^x$ ، یک تابع نمایی است؟

۴) $(-1, +\infty)$

۳) $(-\infty, 2)$

۲) $(-1, 2)$

۱) $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

۹۱- جواب معادله $8^{2x-1} = (\frac{1}{2})^{-x-7}$ کدام است؟

۴) ۴

۳) ۳

۲) ۲

۱) ۱

۹۲- نمودار تابع $y = 2^x$ محور y ها را در نقطه ... قطع می‌کند و برد تابع بازه ... است.

۲) $(0, +\infty)$ ، $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

۱) $(0, +\infty)$ ، $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

۴) $(-\infty, +\infty)$ ، $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

۳) $(-\infty, +\infty)$ ، $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ریاضی ۲- سوالات موازی ، مثلثات - ۲ سوال

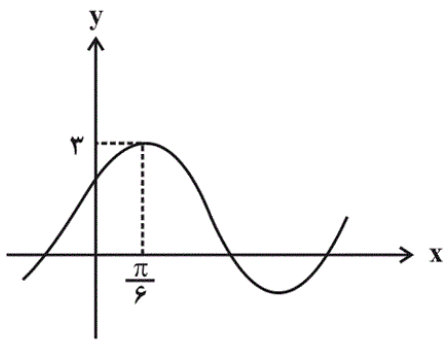
۹۴- نمودار تابع $y = \cos(x - \frac{\pi}{4}) + 1$ در بازه $[0, k]$ ، دو بار خط $y = 2$ را قطع می‌کند. حداقل مقدار طبیعی k کدام است؟

۴) ۹

۳) ۸

۲) ۷

۱) ۶



۱۰۰- اگر بخشی از نمودار تابع $y = a \sin(bx) + 1$ به صورت روبه‌رو باشد، مقدار ab کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۶
(۳) -۳
(۴) -۶

ریاضی ۲ - گواه ، روابط تکمیلی بین نسبت های مثلثاتی - ۱ سوال

۸۱- اگر $\cos \theta = -\frac{3}{5}$ و انتهای کمان θ در ناحیه سوم مثلثاتی باشد، حاصل $\frac{\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$ کدام است؟

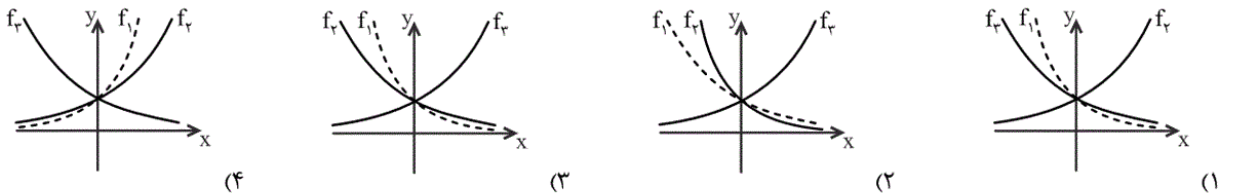
- (۱) $-\frac{12}{7}$
(۲) $-\frac{3}{7}$
(۳) $\frac{12}{7}$
(۴) $\frac{3}{7}$

ریاضی ۲ - گواه ، تابع نمایی و ویژگی های آن - ۴ سوال

۸۳- اگر $f(x) = a^x$ یک تابع نمایی باشد و $f(x+3) = 9f(x)$ ، در این صورت $f(2)$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt[3]{3}$
(۲) ۳
(۳) $3\sqrt[3]{3}$
(۴) $27\sqrt[3]{3}$

۸۴- اگر $f_1(x) = a^x$ ، $f_2(x) = b^x$ ، $f_3(x) = c^x$ و $0 < a < b < c < 1$ باشد، آن گاه کدام گزینه صحیح است؟



۸۵- نامساوی $9\sqrt{3} > 27$ ، و نامساوی $\frac{1}{16^3} > \sqrt[3]{25}$ (۰/۲۵) ، است.

- (۱) درست - نادرست
(۲) نادرست - نادرست
(۳) نادرست - درست
(۴) درست - درست

۸۶- برای معادله $9^x + 3^{x+1} - 18 = 0$ کدام گزینه درست است؟

- (۱) دو ریشه دارد.
(۲) فقط یک ریشه منفی دارد.
(۳) فقط یک ریشه مثبت دارد.
(۴) ریشه ندارد.

ریاضی ۲ - گواه ، مثلثات - ۱ سوال

۸۲- اگر $f(x) = 2 \cos x + 3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ، آنگاه مینیمم تابع $y = f(x)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{7}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

ریاضی ۲- گواه ، تابع لگاریتمی و ویژگی های آن - سوال ۴ -

۸۷- اگر $4^a = 2\sqrt{2}$ ، لگاریتم $(4a+1)$ در پایه ۴ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{3}{2}$

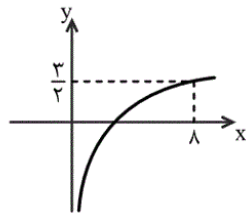
۸۸- اگر $f(x) = \log_4(x^2+4)$ ، آن گاه حاصل $f(2\sqrt{3})$ برابر است با:

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) $\frac{1}{2}$

۸۹- مقدار عدد \log_3^y بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟

- (۱) ۱ و ۲ (۲) ۲ و ۳ (۳) ۳ و ۴ (۴) ۴ و ۵

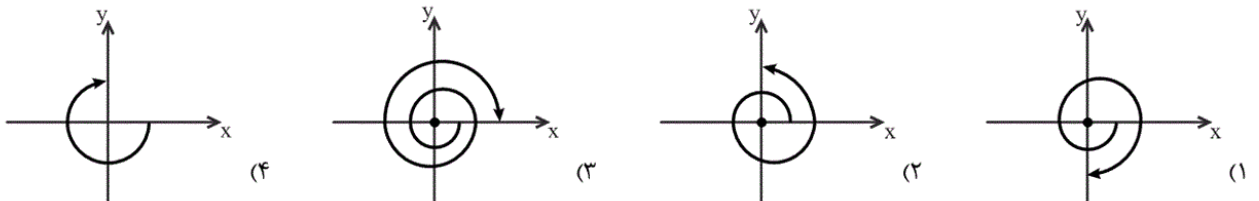
۹۰- اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a^x$ به شکل زیر باشد، ضابطه وارون آن کدام است؟



- (۱) $y = 3^x$
 (۲) $y = 3^{3x}$
 (۳) $y = 4^x$
 (۴) $y = 8^x$

ریاضی ۲- گواه -سوال موازی ، روابط تکمیلی بین نسبت های مثلثاتی - سوال ۲ -

۱۰۱- کدام شکل، نمایش زاویه $45^\circ -$ است؟



۱۰۳- اگر $\cos \theta = -\frac{3}{5}$ و انتهای کمان θ در ناحیه سوم مثلثاتی باشد، حاصل $\frac{\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$ کدام است؟

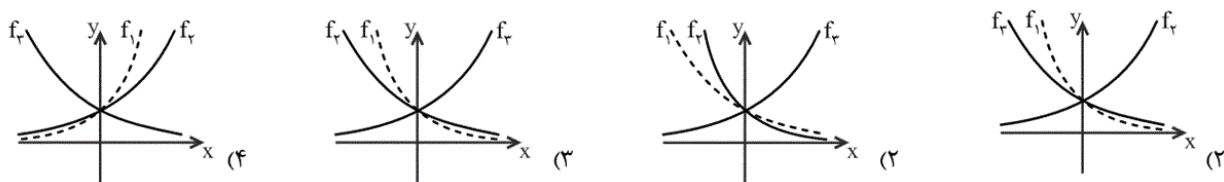
- (۱) $-\frac{12}{7}$ (۲) $-\frac{3}{7}$ (۳) $\frac{12}{7}$ (۴) $\frac{3}{7}$

ریاضی ۲- گواه -سوال ۶- موازی، تابع نمایی و ویژگی های آن - سوال ۶ -

۱۰۵- اگر $f(x) = a^x$ یک تابع نمایی باشد و $f(x+3) = 9f(x)$ ، در این صورت $f(2)$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt[3]{3}$ (۲) ۳ (۳) $3\sqrt[3]{3}$ (۴) $27\sqrt[3]{3}$

۱۰۶- اگر $f_1(x) = a^x$ ، $f_2(x) = b^x$ ، $f_3(x) = c^x$ و $0 < a < b < 1 < c$ باشد، آن گاه کدام گزینه صحیح است؟



۱۰۷- نامساوی $27 > 9\sqrt[3]{3}$ ، و نامساوی $\frac{1}{16^3} > \sqrt[3]{25} (0/25)$ ، است.

- (۱) درست - نادرست (۲) نادرست - نادرست (۳) نادرست - درست (۴) درست - درست

۱۰۸- برای معادله $9^x + 3^{x+1} - 18 = 0$ کدام گزینه درست است؟

- (۱) دو ریشه دارد. (۲) فقط یک ریشه منفی دارد. (۳) فقط یک ریشه مثبت دارد. (۴) ریشه ندارد.

۱۰۹- نمودارهای دو تابع $f(x) = 3^{ax+b}$ و $g(x) = (\frac{1}{9})^x$ در نقطه‌ای به طول ۱- متقاطع هستند. اگر $f(2) = \frac{1}{3}$ باشد، مقدار $f^{-1}(27)$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) ۳

۱۱۰- اگر $2^A = (\frac{4\sqrt{32}}{2\sqrt{8}})^2$ ، آن گاه A کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) $8\sqrt{2}$ (۴) $12\sqrt{2}$

ریاضی ۲- گواه -سوال ۲- موازی، مثلثات - سوال ۲ -

۱۰۲- در کدام فاصله زیر، تابع $y = \sin x$ ، کاهشی و نامثبت است؟

- (۱) $[0, \pi]$ (۲) $[\frac{3\pi}{4}, 2\pi]$ (۳) $[\pi, \frac{3\pi}{4}]$ (۴) $[\pi, 2\pi]$

۱۰۴- اگر $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos x + 3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ، آنگاه مینیمم تابع $y = f(x)$ کدام است؟

$$-\frac{3}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$-\frac{7}{2} \quad (۱)$$

-۷۹

می دانیم:

(سیدضیا هاشمی زاده)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha, \cos(\alpha - \pi) = -\cos \alpha$$

$$\sin(3\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$$

پس حاصل کسر داده شده برابر است با:

$$\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} \underset{\text{تقسیم صورت و مخرج بر } \cos \alpha}{=} \frac{1 - \tan \alpha}{\tan \alpha + 1} = \frac{1 - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} + 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

(ریاضی ۲، مثلثات، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

-۷۲

(روح الله مصطفی زاده)

$$2^{2x-3} < 2^{x-1} \Rightarrow 2x-3 < x-1$$

$$\Rightarrow x < 3-1 \Rightarrow x < 2$$

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۴)

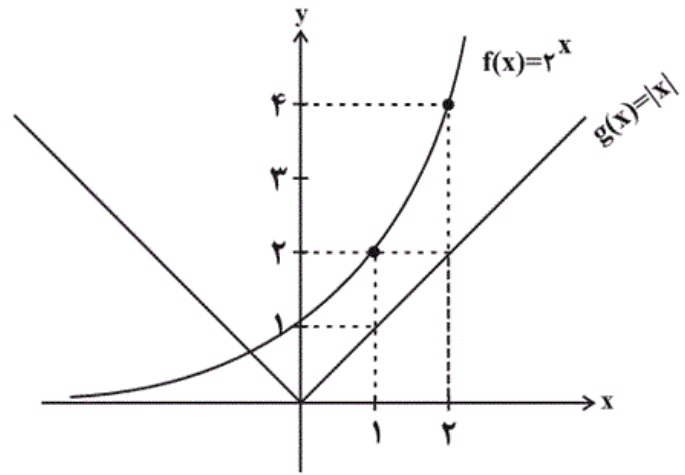
۴

۳

۲ ✓

۱

(وعید، رافتی)



با توجه به رسم دو نمودار در یک دستگاه مختصات می‌بینیم که تنها در یک نقطه برخورد دارند.

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(رضا ذاکر)

$$(3^2)^{x-2} = 3^{x^2-3x} \Rightarrow 3^{2x-4} = 3^{x^2-3x}$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x = 2x - 4 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = (4-1)^x = 3^x$$

$$\Rightarrow f(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

بنابراین نقطه $(-2, \frac{1}{9})$ روی منحنی f قرار دارد.

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(فردود فارسی بانی)

برای آنکه این تابع، یک تابع نمایی باشد باید عبارت داخل پرانتز بزرگ‌تر از صفر و مخالف ۱ باشد:

$$\frac{a+1}{a-2} > 0 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} a & -1 & 2 \\ \hline \frac{a+1}{a-2} & + & - \\ & \circ & \circ \end{array}$$

$$\Rightarrow a < -1 \cup a > 2$$

$$\frac{a+1}{a-2} \neq 1 \Rightarrow a+1 \neq a-2 \Rightarrow 1 \neq -2 \quad \text{همواره برقرار است.}$$

بنابراین داریم:

$$\text{جواب} = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه ۹۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

-۸۰

(سیدضیا هاشمی زاده)

اگر a را مثبت فرض کنیم، بیشترین مقدار تابع وقتی رخ می‌دهد که $\sin(bx) = 1$ باشد، پس داریم:

$$a(1) + 1 = 3 \Rightarrow a = 2$$

از طرفی اگر $\sin(bx) = 1$ باشد، پس در $x = \frac{\pi}{6}$ برای اولین بار به ازای

$$\sin\left(\frac{b\pi}{6}\right) = 1, (x > 0) \text{ است.}$$

پس $\frac{b\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ ، بنابراین $b = 3$ در نتیجه $ab = 6$ است.

تذکره: اگر a منفی فرض شود، $a = -2$ و $b = -3$ خواهد شد و باز هم $ab = 6$ است.

(ریاضی ۲، مثلثات، صفحه‌های ۱۱ تا ۹۴)

۴

۳

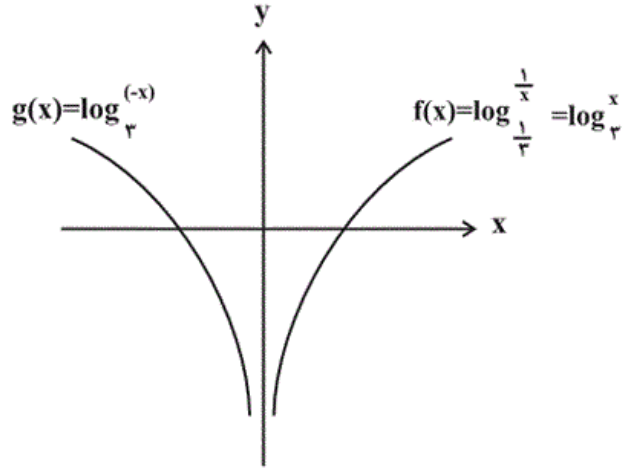
۲ ✓

۱

(سپار داوطلب)

دامنه $\log_{\frac{1}{3}} x$ فاصله $(0, +\infty)$ و دامنه \log_3^{-x} به صورت $(-\infty, 0)$

است؛ پس دامنه دو تابع هیچ نقطه مشترکی ندارند و اساساً هیچ کدام بالای دیگری نیست.



این دو منحنی نسبت به محور y ها قرینه هم هستند.

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۱۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

(سپار داوطلب)

از معادله اول x را حساب می‌کنیم:

$$\log_2^{(2+\log_2^x)} = 2 \Rightarrow 2 + \log_2^x = 2^2 = 4$$

$$\Rightarrow \log_2^x = 2 \Rightarrow x = 4$$

حال در عبارت داده شده $x = 4$ را قرار می‌دهیم:

$$\log_2^{(\log_2^{(x-1)})} = \log_2^{(\log_2^{(4)})} = \log_2^{(2 \log_2^2)} = \log_2^3 = 1$$

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۱۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} (\log_3^2 + \log_3^{17} - \log_3^{10}) \\
&= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{\log_3^{17}}{\log_3^2} - \frac{\log_3^{10}}{\log_3^2} \right) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{y}{x} - \frac{1}{x} \right) \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{x+y-1}{x} \right) = \frac{x+y-1}{3x}
\end{aligned}$$

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۴)

۴

۳

۲

۱

(معمد بگیری)

-۷۱

$$f(x) = 2 - 4 \log(2x + 2)$$

$$\begin{aligned}
&\xrightarrow{x=49} f(49) = 2 - 4 \log(2 \times 49 + 2) \\
&= 2 - 4 \log 100 = 2 - 4 \times 2 = 2 - 8 = -6
\end{aligned}$$

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۱۴)

۴

۳

۲

۱

(سیدضیا هاشمی زاده)

-۹۳

می‌دانیم اگر $\alpha + \beta = \pi$ آنگاه داریم:

$$\beta = \pi - \alpha \Rightarrow \cos \beta = \cos(\pi - \alpha)$$

$$\Rightarrow \cos \beta = -\cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha + \cos \beta = 0$$

پس داریم:

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\left(\cos \frac{\pi}{20} + \cos \frac{19\pi}{20} \right)}_0 + \underbrace{\left(\cos \frac{2\pi}{20} + \cos \frac{18\pi}{20} \right)}_0 \\
&+ \dots + \underbrace{\left(\cos \frac{9\pi}{20} + \cos \frac{11\pi}{20} \right)}_0 + \underbrace{\cos \frac{10\pi}{20}}_0 = 0
\end{aligned}$$

(ریاضی ۲، مثلثات، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۷)

۴

۳

۲

۱

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha, \cos(\alpha - \pi) = -\cos \alpha$$

$$\sin(3\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$$

پس حاصل کسر داده شده برابر است با:

$$\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} \stackrel{\text{تقسیم صورت و مخرج بر } \cos \alpha}{=} \frac{1 - \tan \alpha}{\tan \alpha + 1} = \frac{1 - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} + 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

(ریاضی ۲، مثلثات، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(روح‌الله مصطفی زاده)

$$2^{2x-3} < 2^{x-1} \Rightarrow 2x-3 < x-1$$

$$\Rightarrow x < 3-1 \Rightarrow x < 2$$

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۴)

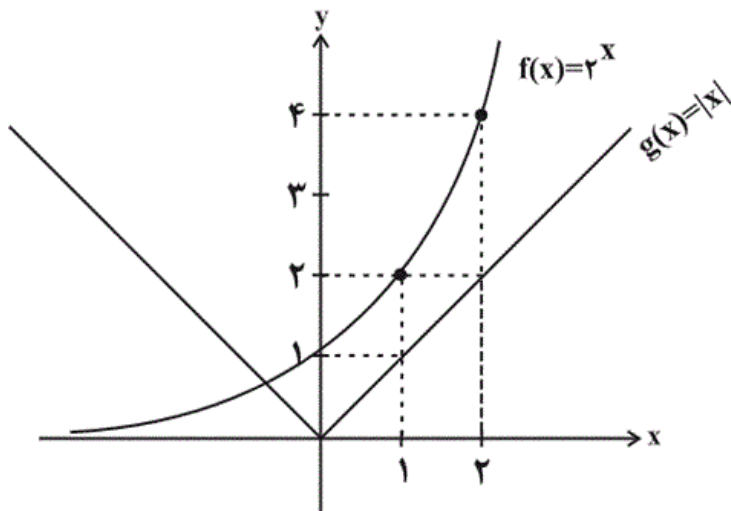
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(وفید راهتی)



با توجه به رسم دو نمودار در یک محور مختصات، می‌بینیم که تنها در یک نقطه برخورد دارند.

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

(رضا ذاکر)

$$(3^2)^{x-2} = 3^{x^2-2x} \Rightarrow 3^{2x-4} = 3^{x^2-2x}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x = 2x - 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = (4-1)^x = 3^x$$

$$\Rightarrow f(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

بنابراین نقطه $(-2, \frac{1}{9})$ روی منحنی f قرار دارد.

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

(فرد فرسی بانی)

برای آنکه این تابع، یک تابع نمایی باشد باید عبارت داخل پرانتز بزرگ‌تر از صفر و مخالف ۱ باشد:

$$\frac{a+1}{a-2} > 0 \Rightarrow \frac{a}{a-2} \quad \begin{array}{c|cc} & -1 & 2 \\ \hline & + & - \\ & \circ & \circ \end{array}$$

$$\Rightarrow a < -1 \cup a > 2$$

$$\frac{a+1}{a-2} \neq 1 \Rightarrow a+1 \neq a-2 \Rightarrow 1 \neq -2 \quad \text{همواره برقرار است.}$$

۴

۳

۲

۱ ✓

(مهمر بگیری)

$$8^{2x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x-7} \Rightarrow (2^3)^{2x-1} = (2^{-1})^{-x-7}$$

$$\Rightarrow 2^{6x-3} = 2^{x+7} \Rightarrow 6x-3 = x+7$$

$$\Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2$$

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۴)

۴

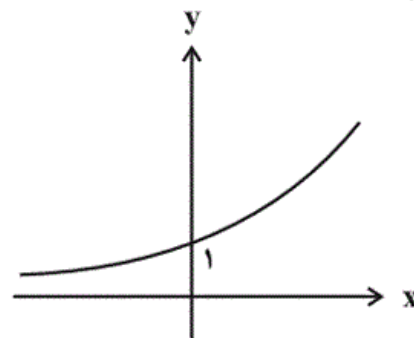
۳

۲ ✓

۱

(مهمر بگیری)

با توجه به نمودار، تابع $y = 2^x$ محور y ها را در نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ قطع می‌کند و برد تابع بازه $(0, +\infty)$ است.



(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

مقدار تقریبی $\frac{5\pi}{2}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{5\pi}{2} \approx \frac{5 \times 3.14}{2} \approx 7.85$$

پس حداقل مقدار طبیعی k ، برابر با ۸ است.

(ریاضی ۲، مثلثات، صفحه‌های ۱۸ تا ۹۴)

۴

۳

۲

۱

۱۰۰-

(سیرفیا هاشمی زاده)

اگر a را مثبت فرض کنیم، بیشترین مقدار تابع وقتی رخ می‌دهد که $\sin(bx) = 1$ باشد، پس داریم:

$$a(1) + 1 = 3 \Rightarrow a = 2$$

از طرفی اگر $\sin(bx) = 1$ باشد، پس در $x = \frac{\pi}{6}$ برای اولین بار به ازای

$$\sin\left(\frac{b\pi}{6}\right) = 1, (x > 0) \text{ است.}$$

پس $\frac{b\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ ، بنابراین $b = 3$ در نتیجه $ab = 6$ است.

تذکره: اگر a منفی فرض شود، $a = -2$ و $b = -3$ خواهد شد و باز هم $ab = 6$ است.

(ریاضی ۲، مثلثات، صفحه‌های ۱۸ تا ۹۴)

۴

۳

۲

۱

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{4}{5} \text{ یا } \sin \theta = -\frac{4}{5}$$

نقطه انتهایی کمان θ در ربع سوم دایره مثلثاتی قرار دارد، پس

$$\sin \theta = -\frac{4}{5} \text{ قابل قبول است.}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{16}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{-\frac{7}{9}} = -\frac{12}{7}$$

(ریاضی ۲، مثلثات، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(کتاب آبی)

-۸۳

$$f(x+3) = 9f(x) \Rightarrow a^{x+3} = 9 \times a^x$$

$$\Rightarrow a^x \times a^3 = 9 \times a^x \Rightarrow a^3 = 9 \Rightarrow a = \sqrt[3]{9}$$

بنابراین $f(x) = (\sqrt[3]{9})^x$

$$f(x) = (\sqrt[3]{9})^x \xrightarrow{x=2} f(2) = (\sqrt[3]{9})^2 = \sqrt[3]{9^2}$$

$$= \sqrt[3]{27 \times 3} = 3\sqrt[3]{3}$$

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳)

 ۴

 ۳

 ۲

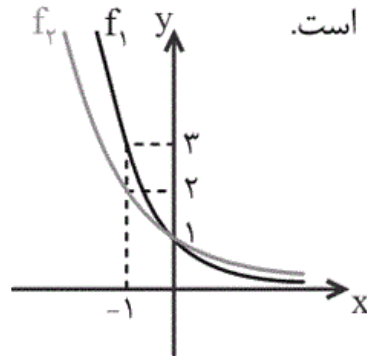
 ۱

(کتاب آبی)

با توجه به اینکه $c > 1$ است، پس تابع $f_3(x) = c^x$ افزایشی است؛ بنابراین گزینه‌های (۲) یا (۳) صحیح است.

با فرض $a = \frac{1}{3}$ و $b = \frac{1}{2}$ ، نمودار $f_1(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $f_2(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ به

صورت مقابل خواهد بود. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.



(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳)

۴

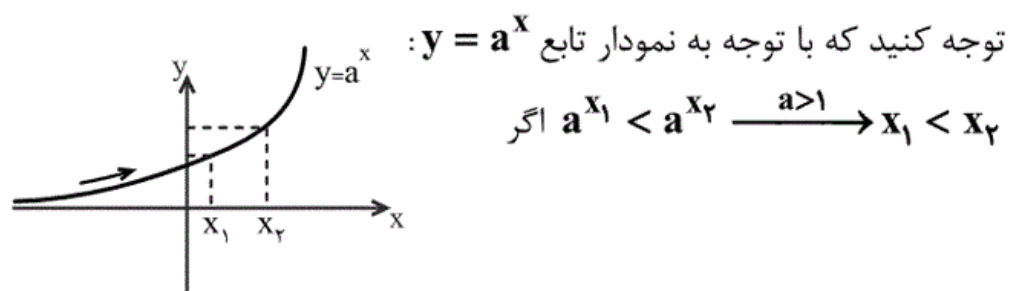
۳ ✓

۲

۱

(کتاب آبی)

برای مقایسه عبارتهای توانی با هم، پایهها را یکی کرده و نماها را با هم مقایسه می‌کنیم.



در هر دو نامساوی سعی می‌کنیم پایهها را برابر کرده و سپس نماها را با توجه به نمودار مطرح شده با هم مقایسه کنیم.

$$\left\{ \begin{array}{l} 9\sqrt{3} = (3^2)\sqrt{3} = 3^2\sqrt{3} = 3^{2+\frac{1}{2}} = 3^{2.5} \\ 27 = 3^3 \end{array} \right. \Rightarrow 9\sqrt{3} > 27 \quad \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (0.25)^{\sqrt{35}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{35}} = (2^{-2})^{\sqrt{35}} = 2^{-2\sqrt{35}} \\ \frac{1}{16^3} = \frac{1}{(2^4)^3} = \frac{1}{2^{12}} = 2^{-12} \end{array} \right.$$

از آنجایی که $\sqrt{35} < 6$ پس $-2\sqrt{35} > -12$ ، در نتیجه:

$$-2\sqrt{35} > -12 \Rightarrow 2^{-2\sqrt{35}} > 2^{-12}$$

$$\Rightarrow (0.25)^{\sqrt{35}} > \frac{1}{16^3} \quad \checkmark$$

بنابراین:

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳)

۴ ✓

۳

۲

۱

(کتاب آبی)

$$9^x + 3^{x+1} - 18 = 0 \Rightarrow (3^2)^x + 3 \times 3^x - 18 = 0$$

$$\Rightarrow (3^x)^2 + 3 \times 3^x - 18 = 0$$

با فرض $3^x = t > 0$ به معادله درجه دوم زیر خواهیم رسید:

$$t^2 + 3t - 18 = 0$$

۴

۳ ✓

۲

۱

در رابطه داده شده، $x = \frac{\pi}{3}$ را قرار می‌دهیم.

$$f(x) = 2 \cos x + 3f\left(\frac{\pi}{3}\right) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{3}} f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times \frac{1}{2} + 3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow -2f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$f(x) = 2 \cos x - \frac{3}{2}$$

مینیمم تابع f به ازای $\cos x = -1$ حاصل می‌شود و برابر $-2 - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$

است.

(ریاضی ۲، مثلثات، صفحه‌های ۱۱ تا ۹۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$4^a = 2\sqrt{2} \Rightarrow (2^2)^a = 2^1 \times 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2^{2a} = 2^{1+\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow 2a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \log_4^{(4a+1)} = \log_4^{(4 \times \frac{3}{4} + 1)} = \log_4^4 = 1$$

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۱۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$f(2\sqrt{3}) = \log_4^{((2\sqrt{3})^2 + 4)} = \log_4^{(12+4)} = \log_4^{16}$$

$$\Rightarrow \log_4^{16} = a \Rightarrow 4^a = 16 \Rightarrow 4^a = 4^2 \Rightarrow a = 2$$

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۱۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(کتاب آبی)

برای آنکه ببینیم \log_b^a بین کدام دو عدد صحیح متوالی است کافی است ببینیم به ازای کدام n ، a بین b^n و b^{n+1} است، لذا:

$$3^1 = 3 < 7 < 3^2 = 9 \Rightarrow 1 < \log_3^7 < 2$$

پس \log_3^7 بین دو عدد ۱ و ۲ قرار می‌گیرد.
(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۱۴)

□۴

□۳

□۲

□۱✓

(کتاب آبی)

نقطه $(\frac{3}{2}, 8)$ روی نمودار تابع f قرار دارد، بنابراین نقطه $(8, \frac{3}{2})$ روی نمودار وارون آن قرار دارد، کافی است ببینیم این نقطه در ضابطه تابع کدام گزینه صدق می‌کند.

گزینه (۱):

$$f^{-1}(x) = 2^x \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2} \neq 8$$

گزینه (۲):

$$f^{-1}(x) = 3^x \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3} \neq 8$$

گزینه (۳):

$$f^{-1}(x) = 4^x \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = 4 \times 2 = 8$$

پس گزینه «۳» صحیح است.

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۱۴)

□۴

□۳✓

□۲

□۱

(کتاب آبی)

چون زاویه منفی است، حرکت در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. از طرفی $۴۵۰^\circ = ۳۶۰^\circ + ۹۰^\circ$ ، پس یک دور کامل به همراه ۹۰° در جهت منفی حرکت می‌کنیم.

(ریاضی ۲، مثلثات، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

(کتاب آبی)

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \sin^2 \theta + \frac{9}{25} = 1 \Rightarrow \sin^2 \theta = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{4}{5} \text{ یا } \sin \theta = -\frac{4}{5}$$

نقطه انتهایی کمان θ در ربع سوم دایره مثلثاتی قرار دارد، پس $\sin \theta = -\frac{4}{5}$

قابل قبول است.

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{16}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{-\frac{7}{9}} = -\frac{12}{7}$$

(ریاضی ۲، مثلثات، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

(کتاب آبی)

$$f(x+3) = 9f(x) \Rightarrow a^{x+3} = 9 \times a^x$$

$$\Rightarrow a^x \times a^3 = 9 \times a^x \Rightarrow a^3 = 9 \Rightarrow a = \sqrt[3]{9}$$

بنابراین $f(x) = (\sqrt[3]{9})^x$

$$f(x) = (\sqrt[3]{9})^x \xrightarrow{x=2} f(2) = (\sqrt[3]{9})^2 = \sqrt[3]{9^2}$$

$$= \sqrt[3]{27 \times 3} = 3\sqrt[3]{3}$$

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳)

۴

۳ ✓

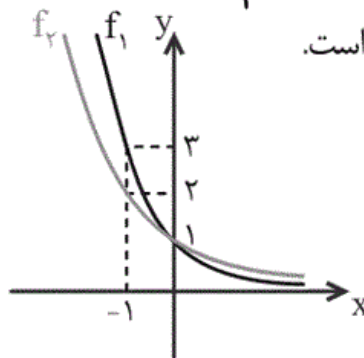
۲

۱

(کتاب آبی)

با توجه به اینکه $c > 1$ است، پس تابع $f_3(x) = c^x$ افزایشی است؛ بنابراین گزینه (۲) یا (۳) صحیح است.

با فرض $a = \frac{1}{3}$ و $b = \frac{1}{4}$ ، نمودار $f_1(x) = (\frac{1}{3})^x$ و $f_2(x) = (\frac{1}{4})^x$ به صورت مقابل خواهد بود. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.



(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳)

۴

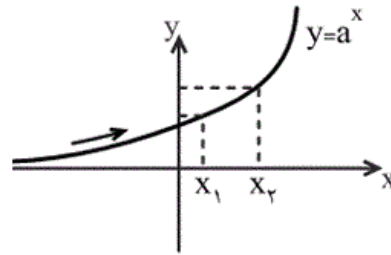
۳ ✓

۲

۱

(کتاب آبی)

برای مقایسه عبارتهای توانی با هم، پایه‌ها را یکی کرده و نماها را با هم مقایسه می‌کنیم.



توجه کنید که با توجه به نمودار تابع $y = a^x$:

$$\text{اگر } a^{x_1} < a^{x_2} \xrightarrow{a > 1} x_1 < x_2$$

در هر دو نامساوی سعی می‌کنیم پایه‌ها را برابر کرده و سپس نماها را با توجه به نمودار بالا با هم مقایسه کنیم.

$$\left\{ \begin{array}{l} 9\sqrt{3} = (3^2)\sqrt{3} = 3^2\sqrt{3} = 3^{2+1/2} = 3^{5/2} \\ 27 = 3^3 \end{array} \right. \Rightarrow 9\sqrt{3} > 27 \quad \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (0/25)\sqrt{35} = \left(\frac{1}{4}\right)\sqrt{35} = (2^{-2})\sqrt{35} = 2^{-2}\sqrt{35} \\ \frac{1}{16^3} = \frac{1}{(2^4)^3} = \frac{1}{2^{12}} = 2^{-12} \end{array} \right.$$

از آنجایی که $\sqrt{35} < 6$ پس $-2\sqrt{35} > -12$ ، در نتیجه:

$$\begin{aligned} -2\sqrt{35} > -12 &\Rightarrow 2^{-2\sqrt{35}} > 2^{-12} \\ \Rightarrow (0/25)\sqrt{35} > \frac{1}{16^3} &\quad \checkmark \end{aligned}$$

بنابراین:

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳)

۴ ✓

۳

۲

۱

(کتاب آبی)

$$\begin{aligned} 9^x + 3^{x+1} - 18 = 0 &\Rightarrow (3^2)^x + 3 \times 3^x - 18 = 0 \\ \Rightarrow (3^x)^2 + 3 \times 3^x - 18 = 0 \end{aligned}$$

با فرض $3^x = t > 0$ به معادله درجه دوم زیر خواهیم رسید:

$$t^2 + 3t - 18 = 0$$

$$\Rightarrow (t+6)(t-3) = 0 \Rightarrow t_1 = 3, t_2 = -6$$

بنابراین:

$$3^x = 3 \Rightarrow x = 1$$

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

(کتاب آبی)

نمودارهای دو تابع f و g در نقطه‌ای به طول ۱- متقاطع هستند، پس:

$$f(-1) = g(-1) \Rightarrow 3^{-a+b} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow 3^{-a+b} = 9 = 3^2 \Rightarrow -a + b = 2 \quad (*)$$

از طرفی $f(2) = \frac{1}{3}$ بنابراین:

$$3^{2a+b} = \frac{1}{3} = 3^{-1} \Rightarrow 2a + b = -1 \quad (**)$$

از حل دستگاه معادلات (*) و (**) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} -a + b = 2 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 3a = -3 \Rightarrow a = -1 \xrightarrow{(*)} b = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = 3^{-x+1}$$

حال برای محاسبه $f^{-1}(27)$ ، کافی است معادله $f(x) = 27$ را حل کنیم:

$$3^{-x+1} = 27 = 3^3 \Rightarrow -x + 1 = 3 \Rightarrow -x = 2 \Rightarrow x = -2$$

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

(کتاب آبی)

سمت چپ تساوی را با ساده‌سازی به صورت توانی از ۲ می‌نویسیم:

$$\left(\frac{4\sqrt{32}}{2\sqrt{8}}\right)^2 = \left(\frac{(2^2)^4\sqrt{2}}{2^2\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{2^8\sqrt{2}}{2^2\sqrt{2}}\right)^2 = (2^8\sqrt{2} - 2\sqrt{2})^2$$

$$= (2^6\sqrt{2})^2 = 2^{12}\sqrt{2}$$

$$2^{12}\sqrt{2} = 2^A \Rightarrow A = 12\sqrt{2}$$

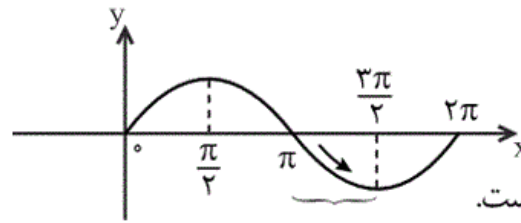
(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳)

۴ ✓

۳

۲

۱



با رسم نمودار تابع $y = \sin x$

دیدیم می‌شود که در بازه

$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ ، تابع کاهشی و نامثبت است.

(ریاضی ۲، مثلثات، صفحه‌های ۱۱ تا ۹۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

در رابطه داده شده، $x = \frac{\pi}{3}$ را قرار می‌دهیم.

$$f(x) = 2 \cos x + 3f\left(\frac{\pi}{3}\right) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{3}} f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times \frac{1}{2} + 3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow -2f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2}$$

بنابراین:

$$f(x) = 2 \cos x - \frac{3}{2}$$

$$-2 - \frac{3}{2} = \frac{-7}{2} \quad \cos x = -1 \quad \text{به ازای } f \text{ مینیمم تابع } f \text{ حاصل می‌شود و برابر}$$

است.

(ریاضی ۲، مثلثات، صفحه‌های ۱۱ تا ۹۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱