

**RIAZISARA**

[www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir) **سایت ویژه ریاضیات**

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی  
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور  
نمونه سوالات امتحانات ریاضی  
نرم افزارهای ریاضیات**

و...

[@riazisara](https://t.me/riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

[@riazisara.ir](https://www.instagram.com/riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

ریاضی ۲، روابط تکمیلی بین نسبت های مثلثاتی - ۱ سوال

۷۹- اگر  $\tan \alpha = \frac{2}{3}$  باشد، حاصل عبارت  $\frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) - \cos(\alpha - \pi)}$  کدام است؟

$\frac{1}{15}$  (۴)

$\frac{1}{5}$  (۳)

$\frac{1}{4}$  (۲)

$\frac{1}{3}$  (۱)

ریاضی ۲، تابع نمایی و ویژگی های آن - ۴ سوال

۷۲- اگر  $2^{2x-3} < 2^{x-1}$  باشد، حدود  $x$  کدام است؟

$x > -4$  (۴)

$x < 4$  (۳)

$x < 2$  (۲)

$x > -2$  (۱)

۷۳- نمودار توابع  $f(x) = 2^x$  و  $g(x) = |x|$  با دامنه مجموعه اعداد حقیقی، در چند نقطه با هم برخورد دارند؟

صفر (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۷۴- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه های معادله  $9^{x-2} = 3^{x^2-3x}$  و  $\alpha > \beta$  باشد، کدام نقطه زیر، روی منحنی  $f(x) = (\alpha - \beta)^x$  قرار دارد؟

$(-2, \frac{1}{9})$  (۴)

$(-1, 3)$  (۳)

$(-2, 9)$  (۲)

$(\frac{1}{3}, 3)$  (۱)

۷۷- به ازای کدام مقادیر  $a$ ، تابع  $y = (\frac{a+1}{a-2})^x$ ، یک تابع نمایی است؟

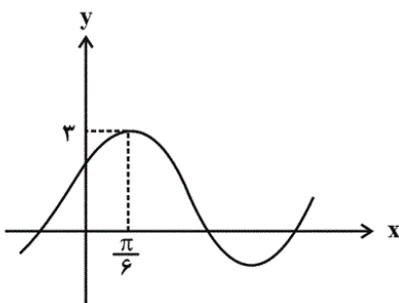
$(-1, +\infty)$  (۴)

$(-\infty, 2)$  (۳)

$(-1, 2)$  (۲)

$(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$  (۱)

ریاضی ۲، مثلثات - ۱ سوال



۸۰- اگر بخشی از نمودار تابع  $y = a \sin(bx) + 1$  به صورت روبه رو باشد، مقدار  $ab$  کدام است؟

۶ (۲)

۳ (۱)

-۶ (۴)

-۳ (۳)

ریاضی ۲، تابع لگاریتمی و ویژگی های آن - ۴ سوال

۷۴- نمودارهای دو تابع  $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$  و  $g(x) = \log_3(-x)$  نسبت به هم چگونه‌اند؟

- (۱) منطبق بر هم  
 (۲) در هیچ نقطه‌ای متقاطع نیستند.  
 (۳)  $f(x)$  همواره بالاتر از  $g(x)$  است.  
 (۴)  $g(x)$  همواره بالاتر از  $f(x)$  است.

۷۵- اگر  $\log_3^{(2+\log_3^x)} = 2$  باشد، حاصل  $\log_3^{(\log_3(x-1))}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$   
 (۲) ۱  
 (۳)  $\frac{3}{2}$   
 (۴) ۲

۷۸- اگر  $\log_3 x = y$  و  $\log_3 17 = y$ ، آنگاه حاصل  $\log_3 \sqrt[3]{5/1}$  بر حسب  $x$  و  $y$  همواره کدام است؟

- (۱)  $\frac{x+2y-1}{3x}$   
 (۲)  $\frac{x+2y-1}{2x}$   
 (۳)  $\frac{x+y-1}{3x}$   
 (۴)  $\frac{x+y-1}{2x}$

۷۱- اگر  $f(x) = 2 - 4 \log(2x + 2)$  باشد،  $f(49)$  کدام است؟

- (۱) -۶  
 (۲) -۲  
 (۳) -۴  
 (۴) -۱

ریاضی ۲- سوالات موازی، روابط تکمیلی بین نسبت های مثلثاتی - ۲ سوال

۹۳- حاصل عبارت  $\cos \frac{\pi}{20} + \cos \frac{2\pi}{20} + \dots + \cos \frac{19\pi}{20}$  کدام است؟

- (۱) ۱  
 (۲) -۱  
 (۳) صفر  
 (۴) ۲

۹۹- اگر  $\tan \alpha = \frac{2}{3}$  باشد، حاصل عبارت  $\frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) - \cos(\alpha - \pi)}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$   
 (۲)  $\frac{1}{4}$   
 (۳)  $\frac{1}{5}$   
 (۴)  $\frac{1}{15}$

ریاضی ۲- سوالات موازی، تابع نمایی و ویژگی های آن - ۶ سوال

۹۵- اگر  $2^{x-1} < 2^{2x-3}$  باشد، حدود  $x$  کدام است؟

- (۱)  $x > -2$   
 (۲)  $x < 2$   
 (۳)  $x < 4$   
 (۴)  $x > -4$

۹۶- نمودار توابع  $f(x) = 2^x$  و  $g(x) = |x|$  با دامنه مجموعه اعداد حقیقی، در چند نقطه با هم برخورد دارند؟

۴) صفر

۳) ۳

۲) ۲

۱) ۱

۹۷- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $3^{x^2-2} = 3^{x^2-3x}$  و  $\alpha > \beta$  باشد، کدام نقطه زیر، روی منحنی  $f(x) = (\alpha - \beta)^x$  قرار دارد؟

۴)  $(-2, \frac{1}{9})$

۳)  $(-1, 3)$

۲)  $(-2, 9)$

۱)  $(\frac{1}{2}, 3)$

۹۸- به ازای کدام مقادیر  $a$ ، تابع  $y = (\frac{a+1}{a-2})^x$ ، یک تابع نمایی است؟

۴)  $(-1, +\infty)$

۳)  $(-\infty, 2)$

۲)  $(-1, 2)$

۱)  $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

۹۱- جواب معادله  $8^{2x-1} = (\frac{1}{2})^{-x-7}$  کدام است؟

۴) ۴

۳) ۳

۲) ۲

۱) ۱

۹۲- نمودار تابع  $y = 2^x$  محور  $y$ ها را در نقطه ... قطع می‌کند و برد تابع بازه ... است.

۲)  $(0, +\infty)$  ،  $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

۱)  $(0, +\infty)$  ،  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

۴)  $(-\infty, +\infty)$  ،  $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

۳)  $(-\infty, +\infty)$  ،  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ریاضی ۲- سوالات موازی ، مثلثات - ۲ سوال

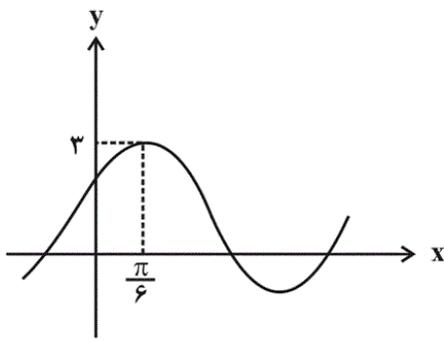
۹۴- نمودار تابع  $y = \cos(x - \frac{\pi}{4}) + 1$  در بازه  $[0, k]$ ، دو بار خط  $y = 2$  را قطع می‌کند. حداقل مقدار طبیعی  $k$  کدام است؟

۴) ۹

۳) ۸

۲) ۷

۱) ۶



۱۰۰- اگر بخشی از نمودار تابع  $y = a \sin(bx) + 1$  به صورت روبه‌رو باشد، مقدار  $ab$  کدام است؟

- (۱) ۳  
(۲) ۶  
(۳) -۳  
(۴) -۶

ریاضی ۲ - گواه ، روابط تکمیلی بین نسبت های مثلثاتی - ۱ سوال

۸۱- اگر  $\cos \theta = -\frac{3}{5}$  و انتهای کمان  $\theta$  در ناحیه سوم مثلثاتی باشد، حاصل  $\frac{\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$  کدام است؟

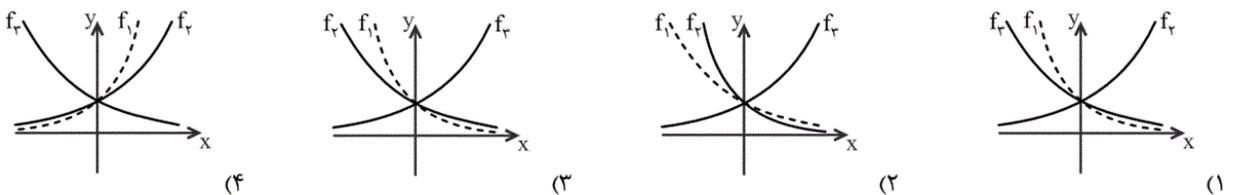
- (۱)  $-\frac{12}{7}$   
(۲)  $-\frac{3}{7}$   
(۳)  $\frac{12}{7}$   
(۴)  $\frac{3}{7}$

ریاضی ۲ - گواه ، تابع نمایی و ویژگی های آن - ۴ سوال

۸۳- اگر  $f(x) = a^x$  یک تابع نمایی باشد و  $f(x+3) = 9f(x)$ ، در این صورت  $f(2)$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt[3]{3}$   
(۲) ۳  
(۳)  $3\sqrt[3]{3}$   
(۴)  $27\sqrt[3]{3}$

۸۴- اگر  $f_1(x) = a^x$ ،  $f_2(x) = b^x$ ،  $f_3(x) = c^x$  و  $0 < a < b < c < 1$  باشد، آن گاه کدام گزینه صحیح است؟



۸۵- نامساوی  $9\sqrt{3} > 27$  ، ..... و نامساوی  $\frac{1}{16^3} > \sqrt[3]{25}$  ، ..... است.

- (۱) درست - نادرست  
(۲) نادرست - نادرست  
(۳) نادرست - درست  
(۴) درست - درست

۸۶- برای معادله  $9^x + 3^{x+1} - 18 = 0$  کدام گزینه درست است؟

- (۱) دو ریشه دارد.  
(۲) فقط یک ریشه منفی دارد.  
(۳) فقط یک ریشه مثبت دارد.  
(۴) ریشه ندارد.

ریاضی ۲ - گواه ، مثلثات - ۱ سوال

۸۲- اگر  $f(x) = 2 \cos x + 3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ، آنگاه مینیمم تابع  $y = f(x)$  کدام است؟

$-\frac{3}{2}$  (۴)

$\frac{3}{2}$  (۳)

$-\frac{1}{2}$  (۲)

$-\frac{7}{2}$  (۱)

ریاضی ۲- گواه ، تابع لگاریتمی و ویژگی های ان - ۴ سوال -

۸۷- اگر  $4^a = 2\sqrt{2}$ ، لگاریتم  $(4a+1)$  در پایه ۴ کدام است؟

$\frac{3}{2}$  (۴)

۲ (۳)

$\sqrt{2}$  (۲)

۱ (۱)

۸۸- اگر  $f(x) = \log_4(x^2+4)$ ، آن گاه حاصل  $f(2\sqrt{3})$  برابر است با:

$\frac{1}{2}$  (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

۸۹- مقدار عدد  $\log_3^y$  بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟

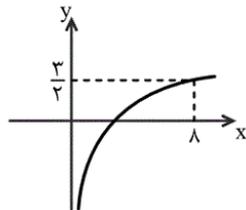
۵ و ۴ (۴)

۴ و ۳ (۳)

۳ و ۲ (۲)

۲ و ۱ (۱)

۹۰- اگر نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \log_a^x$  به شکل زیر باشد، ضابطه وارون آن کدام است؟



$y = 2^x$  (۱)

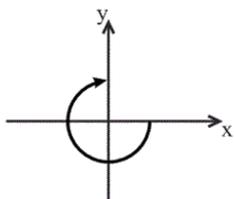
$y = 3^x$  (۲)

$y = 4^x$  (۳)

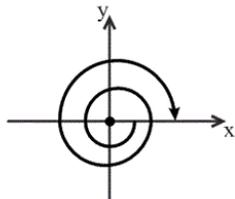
$y = 8^x$  (۴)

ریاضی ۲- گواه -سوالات موازی ، روابط تکمیلی بین نسبت های مثلثاتی - ۲ سوال -

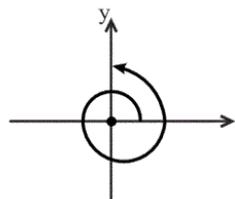
۱۰۱- کدام شکل، نمایش زاویه  $45^\circ -$  است؟



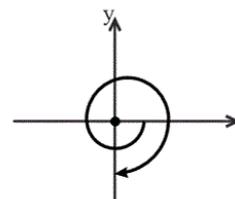
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

۱۰۳- اگر  $\cos \theta = -\frac{3}{5}$  و انتهای کمان  $\theta$  در ناحیه سوم مثلثاتی باشد، حاصل  $\frac{\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$  کدام است؟

$\frac{3}{7}$  (۴)

$\frac{12}{7}$  (۳)

$-\frac{3}{7}$  (۲)

$-\frac{12}{7}$  (۱)

ریاضی ۲- گواه -سوال ۶- موازی، تابع نمایی و ویژگی های آن - سوال ۶ -

۱۰۵- اگر  $f(x) = a^x$  یک تابع نمایی باشد و  $f(x+3) = 9f(x)$ ، در این صورت  $f(2)$  کدام است؟

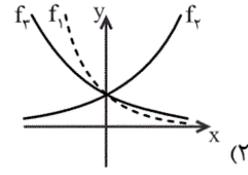
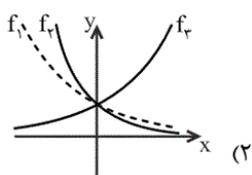
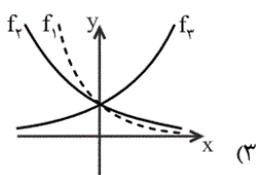
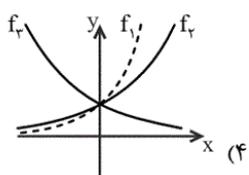
$27\sqrt[3]{3}$  (۴)

$3\sqrt[3]{3}$  (۳)

۳ (۲)

$\sqrt[3]{3}$  (۱)

۱۰۶- اگر  $f_1(x) = a^x$ ،  $f_2(x) = b^x$ ،  $f_3(x) = c^x$  و  $0 < a < b < 1 < c$  باشد، آن گاه کدام گزینه صحیح است؟



۱۰۷- نامساوی  $27 > 9\sqrt[3]{3}$ ، ..... و نامساوی  $\frac{1}{16^3} > \sqrt[3]{25} (0/25)$ ، ..... است.

(۴) درست - درست

(۳) نادرست - درست

(۲) نادرست - نادرست

(۱) درست - نادرست

۱۰۸- برای معادله  $9^x + 3^{x+1} - 18 = 0$  کدام گزینه درست است؟

(۴) ریشه ندارد.

(۳) فقط یک ریشه مثبت دارد.

(۲) فقط یک ریشه منفی دارد.

(۱) دو ریشه دارد.

۱۰۹- نمودارهای دو تابع  $f(x) = 3^{ax+b}$  و  $g(x) = (\frac{1}{9})^x$  در نقطه‌ای به طول ۱- متقاطع هستند. اگر  $f(2) = \frac{1}{3}$  باشد، مقدار  $f^{-1}(27)$  کدام است؟

۳ (۴)

۱ (۳)

-۲ (۲)

-۳ (۱)

۱۱۰- اگر  $2^A = (\frac{4\sqrt{32}}{2\sqrt{8}})^2$ ، آن گاه A کدام است؟

$12\sqrt{2}$  (۴)

$8\sqrt{2}$  (۳)

۱۶ (۲)

۸ (۱)

ریاضی ۲- گواه -سوال ۲- موازی، مثلثات - سوال ۲ -

۱۰۲- در کدام فاصله زیر، تابع  $y = \sin x$ ، کاهشی و نامثبت است؟

$[\pi, 2\pi]$  (۴)

$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$  (۳)

$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$  (۲)

$[0, \pi]$  (۱)

۱۰۴- اگر  $f(x) = 2 \cos x + 3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ، آنگاه مینیمم تابع  $y = f(x)$  کدام است؟

$$-\frac{3}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$-\frac{7}{2} \quad (۱)$$

-۷۹

می دانیم:

(سیدضیا هاشمی زاده)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha, \cos(\alpha - \pi) = -\cos \alpha$$

$$\sin(3\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$$

پس حاصل کسر داده شده برابر است با:

$$\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} \underset{\text{تقسیم صورت و مخرج بر } \cos \alpha}{=} \frac{1 - \tan \alpha}{\tan \alpha + 1} = \frac{1 - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} + 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

(ریاضی ۲، مثلثات، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

-۷۲

(روح الله مصطفی زاده)

$$2^{2x-3} < 2^{x-1} \Rightarrow 2x-3 < x-1$$

$$\Rightarrow x < 3-1 \Rightarrow x < 2$$

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۴)

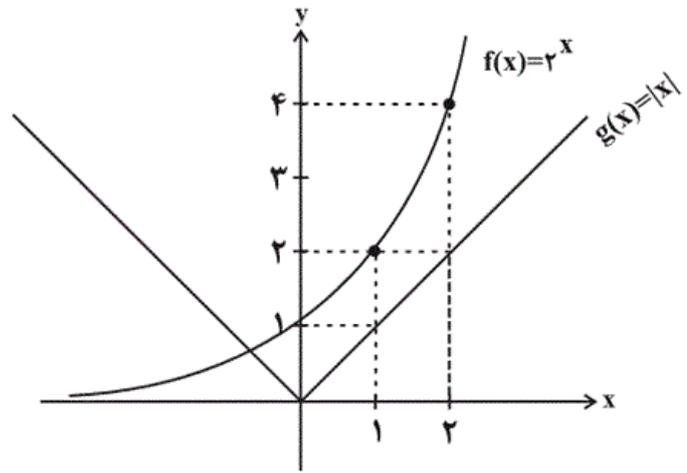
۴

۳

۲ ✓

۱

(وعید، رافتی)



با توجه به رسم دو نمودار در یک دستگاه مختصات می‌بینیم که تنها در یک نقطه برخورد دارند.

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(رضا ذاکر)

$$(3^2)^{x-2} = 3^{x^2-3x} \Rightarrow 3^{2x-4} = 3^{x^2-3x}$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x = 2x - 4 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = (4-1)^x = 3^x$$

$$\Rightarrow f(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

بنابراین نقطه  $(-2, \frac{1}{9})$  روی منحنی  $f$  قرار دارد.

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(فردود فارسی بانی)

برای آنکه این تابع، یک تابع نمایی باشد باید عبارت داخل پرانتز بزرگ‌تر از صفر و مخالف ۱ باشد:

$$\frac{a+1}{a-2} > 0 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} a & -1 & 2 \\ \hline \frac{a+1}{a-2} & + & - \\ & \circ & \oplus \end{array}$$

$$\Rightarrow a < -1 \cup a > 2$$

$$\frac{a+1}{a-2} \neq 1 \Rightarrow a+1 \neq a-2 \Rightarrow 1 \neq -2 \quad \text{همواره برقرار است.}$$

بنابراین داریم:

$$\text{جواب} = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه ۹۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

-۸۰

(سیدضیا هاشمی زاده)

اگر  $a$  را مثبت فرض کنیم، بیشترین مقدار تابع وقتی رخ می‌دهد که  $\sin(bx) = 1$  باشد، پس داریم:

$$a(1) + 1 = 3 \Rightarrow a = 2$$

از طرفی اگر  $\sin(bx) = 1$  باشد، پس در  $x = \frac{\pi}{6}$  برای اولین بار به ازای

$$\sin\left(\frac{b\pi}{6}\right) = 1, (x > 0) \text{ است.}$$

پس  $\frac{b\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ ، بنابراین  $b = 3$  در نتیجه  $ab = 6$  است.

تذکره: اگر  $a$  منفی فرض شود،  $a = -2$  و  $b = -3$  خواهد شد و باز هم  $ab = 6$  است.

(ریاضی ۲، مثلثات، صفحه‌های ۱۱ تا ۹۴)

۴

۳

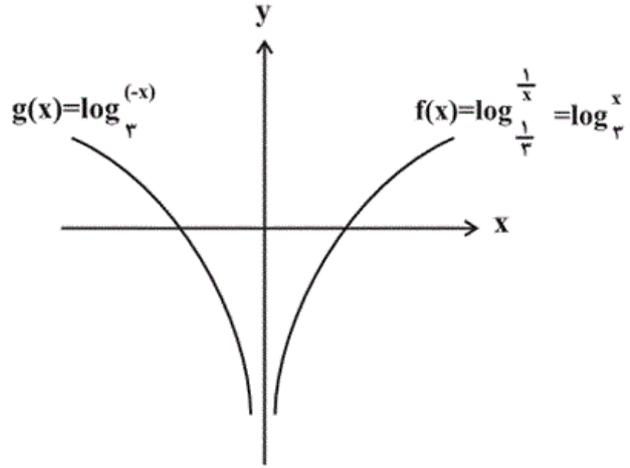
۲ ✓

۱

(سپار داوطلب)

دامنه  $\log_{\frac{1}{3}} x$  فاصله  $(0, +\infty)$  و دامنه  $\log_3^{-x}$  به صورت  $(-\infty, 0)$

است؛ پس دامنه دو تابع هیچ نقطه مشترکی ندارند و اساساً هیچ کدام بالای دیگری نیست.



این دو منحنی نسبت به محور  $y$  ها قرینه هم هستند.

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۱۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

(سپار داوطلب)

از معادله اول  $x$  را حساب می‌کنیم:

$$\log_2^{(2+\log_2^x)} = 2 \Rightarrow 2 + \log_2^x = 2^2 = 4$$

$$\Rightarrow \log_2^x = 2 \Rightarrow x = 4$$

حال در عبارت داده شده  $x = 4$  را قرار می‌دهیم:

$$\log_2^{(\log_2^{(x-1)})} = \log_2^{(\log_2^{(4)})} = \log_2^{(2 \log_2^2)} = \log_2^3 = 1$$

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۱۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} (\log_3^2 + \log_3^{17} - \log_3^{10}) \\
&= \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{\log_3^{17}}{\log_3^2} - \frac{\log_3^{10}}{\log_3^2} \right) = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{y}{x} - \frac{1}{x} \right) \\
&= \frac{1}{3} \left( \frac{x+y-1}{x} \right) = \frac{x+y-1}{3x}
\end{aligned}$$

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۴)

۴

۳

۲

۱

(معمد بگیری)

-۷۱

$$f(x) = 2 - 4 \log(2x + 2)$$

$$\begin{aligned}
&\xrightarrow{x=49} f(49) = 2 - 4 \log(2 \times 49 + 2) \\
&= 2 - 4 \log 100 = 2 - 4 \times 2 = 2 - 8 = -6
\end{aligned}$$

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۱۴)

۴

۳

۲

۱

(سیدضیا هاشمی زاده)

-۹۳

می‌دانیم اگر  $\alpha + \beta = \pi$  آنگاه داریم:

$$\beta = \pi - \alpha \Rightarrow \cos \beta = \cos(\pi - \alpha)$$

$$\Rightarrow \cos \beta = -\cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha + \cos \beta = 0$$

پس داریم:

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\left( \cos \frac{\pi}{20} + \cos \frac{19\pi}{20} \right)}_0 + \underbrace{\left( \cos \frac{2\pi}{20} + \cos \frac{18\pi}{20} \right)}_0 \\
&+ \dots + \underbrace{\left( \cos \frac{9\pi}{20} + \cos \frac{11\pi}{20} \right)}_0 + \underbrace{\cos \frac{10\pi}{20}}_0 = 0
\end{aligned}$$

(ریاضی ۲، مثلثات، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۷)

۴

۳

۲

۱

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha, \cos(\alpha - \pi) = -\cos \alpha$$

$$\sin(3\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$$

پس حاصل کسر داده شده برابر است با:

$$\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} \stackrel{\text{تقسیم صورت و مخرج بر } \cos \alpha}{=} \frac{1 - \tan \alpha}{\tan \alpha + 1} = \frac{1 - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} + 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

(ریاضی ۲، مثلثات، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(روح‌الله مصطفی زاده)

$$2^{2x-3} < 2^{x-1} \Rightarrow 2x-3 < x-1$$

$$\Rightarrow x < 3-1 \Rightarrow x < 2$$

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۴)

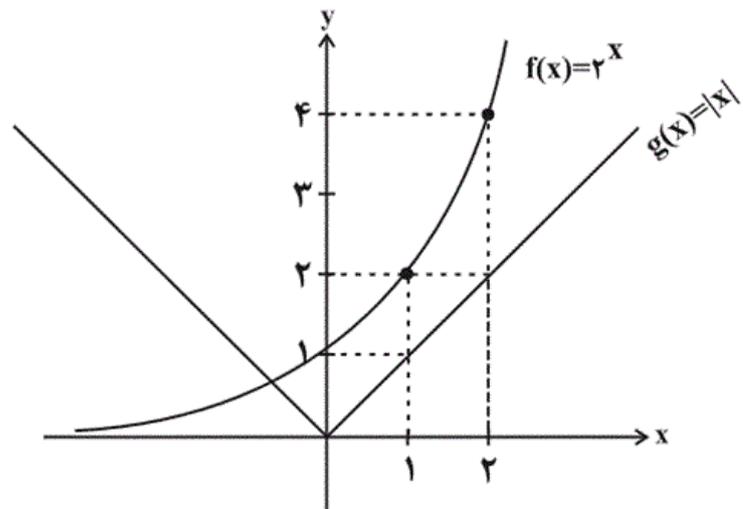
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(وفید راهتی)



با توجه به رسم دو نمودار در یک محور مختصات، می‌بینیم که تنها در یک نقطه برخورد دارند.

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

(رضا ذاکر)

$$(3^2)^{x-2} = 3^{x^2-2x} \Rightarrow 3^{2x-4} = 3^{x^2-2x}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x = 2x - 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = (4-1)^x = 3^x$$

$$\Rightarrow f(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

بنابراین نقطه  $(-2, \frac{1}{9})$  روی منحنی  $f$  قرار دارد.

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

(فرد فرسی بانی)

برای آنکه این تابع، یک تابع نمایی باشد باید عبارت داخل پرانتز بزرگ‌تر از صفر و مخالف ۱ باشد:

$$\frac{a+1}{a-2} > 0 \Rightarrow \frac{a}{a-2} \quad \begin{array}{c|cc} & -1 & 2 \\ \hline & + & - \\ & \circ & \circ \end{array}$$

$$\Rightarrow a < -1 \cup a > 2$$

$$\frac{a+1}{a-2} \neq 1 \Rightarrow a+1 \neq a-2 \Rightarrow 1 \neq -2 \quad \text{همواره برقرار است.}$$

۴

۳

۲

۱ ✓

(مهمر بگیری)

$$8^{2x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x-7} \Rightarrow (2^3)^{2x-1} = (2^{-1})^{-x-7}$$

$$\Rightarrow 2^{6x-3} = 2^{x+7} \Rightarrow 6x-3 = x+7$$

$$\Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2$$

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۴)

۴

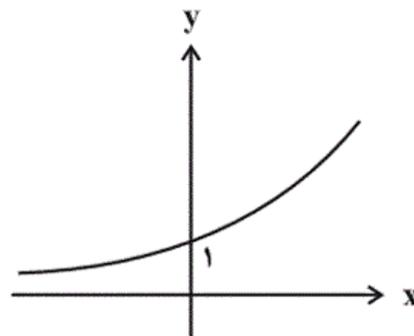
۳

۲ ✓

۱

(مهمر بگیری)

با توجه به نمودار، تابع  $y = 2^x$  محور  $y$  ها را در نقطه  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  قطع می‌کند و برد تابع بازه  $(0, +\infty)$  است.



(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

مقدار تقریبی  $\frac{5\pi}{2}$  را حساب می‌کنیم:

$$\frac{5\pi}{2} \approx \frac{5 \times 3.14}{2} \approx 7.85$$

پس حداقل مقدار طبیعی  $k$ ، برابر با ۸ است.

(ریاضی ۲، مثلثات، صفحه‌های ۱۸ تا ۹۴)

۴

۳

۲

۱

۱۰۰-

(سیرفیا هاشمی زاده)

اگر  $a$  را مثبت فرض کنیم، بیشترین مقدار تابع وقتی رخ می‌دهد که  $\sin(bx) = 1$  باشد، پس داریم:

$$a(1) + 1 = 3 \Rightarrow a = 2$$

از طرفی اگر  $\sin(bx) = 1$  باشد، پس در  $x = \frac{\pi}{6}$  برای اولین بار به ازای

$$\sin\left(\frac{b\pi}{6}\right) = 1, (x > 0) \text{ است.}$$

پس  $\frac{b\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ ، بنابراین  $b = 3$  در نتیجه  $ab = 6$  است.

تذکر: اگر  $a$  منفی فرض شود،  $a = -2$  و  $b = -3$  خواهد شد و باز هم  $ab = 6$  است.

(ریاضی ۲، مثلثات، صفحه‌های ۱۸ تا ۹۴)

۴

۳

۲

۱

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{4}{5} \text{ یا } \sin \theta = -\frac{4}{5}$$

نقطه انتهایی کمان  $\theta$  در ربع سوم دایره مثلثاتی قرار دارد، پس

$$\sin \theta = -\frac{4}{5} \text{ قابل قبول است.}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{16}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{-\frac{7}{9}} = -\frac{12}{7}$$

(ریاضی ۲، مثلثات، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(کتاب آبی)

-۸۳

$$f(x+3) = 9f(x) \Rightarrow a^{x+3} = 9 \times a^x$$

$$\Rightarrow a^x \times a^3 = 9 \times a^x \Rightarrow a^3 = 9 \Rightarrow a = \sqrt[3]{9}$$

بنابراین  $f(x) = (\sqrt[3]{9})^x$

$$f(x) = (\sqrt[3]{9})^x \xrightarrow{x=2} f(2) = (\sqrt[3]{9})^2 = \sqrt[3]{9^2}$$

$$= \sqrt[3]{27 \times 3} = 3\sqrt[3]{3}$$

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳)

 ۴

 ۳

 ۲

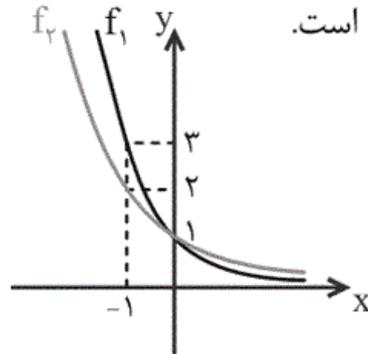
 ۱

(کتاب آبی)

با توجه به اینکه  $c > 1$  است، پس تابع  $f_3(x) = c^x$  افزایشی است؛ بنابراین گزینه‌های (۲) یا (۳) صحیح است.

با فرض  $a = \frac{1}{3}$  و  $b = \frac{1}{2}$ ، نمودار  $f_1(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  و  $f_2(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  به

صورت مقابل خواهد بود. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.



(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳)

۴

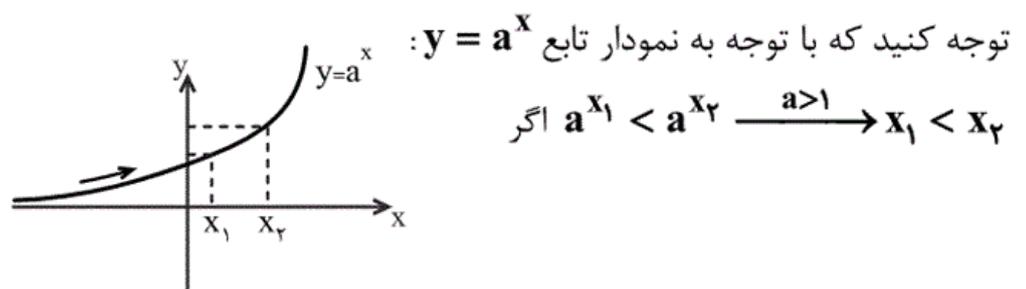
۳ ✓

۲

۱

(کتاب آبی)

برای مقایسه عبارتهای توانی با هم، پایه‌ها را یکی کرده و نماها را با هم مقایسه می‌کنیم.



در هر دو نامساوی سعی می‌کنیم پایه‌ها را برابر کرده و سپس نماها را با توجه به نمودار مطرح شده با هم مقایسه کنیم.

$$\left\{ \begin{array}{l} 9\sqrt{3} = (3^2)\sqrt{3} = 3^2\sqrt{3} = 3^{2+\frac{1}{2}} = 3^{2.5} \\ 27 = 3^3 \end{array} \right. \Rightarrow 9\sqrt{3} > 27 \quad \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (0.25)^{\sqrt{35}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{35}} = (2^{-2})^{\sqrt{35}} = 2^{-2\sqrt{35}} \\ \frac{1}{16^3} = \frac{1}{(2^4)^3} = \frac{1}{2^{12}} = 2^{-12} \end{array} \right.$$

از آنجایی که  $\sqrt{35} < 6$  پس  $-2\sqrt{35} > -12$ ، در نتیجه:

$$-2\sqrt{35} > -12 \Rightarrow 2^{-2\sqrt{35}} > 2^{-12}$$

$$\Rightarrow (0.25)^{\sqrt{35}} > \frac{1}{16^3} \quad \checkmark$$

بنابراین:

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳)

۴ ✓

۳

۲

۱

(کتاب آبی)

$$9^x + 3^{x+1} - 18 = 0 \Rightarrow (3^2)^x + 3 \times 3^x - 18 = 0$$

$$\Rightarrow (3^x)^2 + 3 \times 3^x - 18 = 0$$

با فرض  $3^x = t > 0$  به معادله درجه دوم زیر خواهیم رسید:

$$t^2 + 3t - 18 = 0$$

۴

۳ ✓

۲

۱

در رابطه داده شده،  $x = \frac{\pi}{3}$  را قرار می‌دهیم.

$$f(x) = 2 \cos x + 3f\left(\frac{\pi}{3}\right) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{3}} f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times \frac{1}{2} + 3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow -2f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2}$$

بنابراین:

$$f(x) = 2 \cos x - \frac{3}{2}$$

مینیمم تابع  $f$  به ازای  $\cos x = -1$  حاصل می‌شود و برابر  $-2 - \frac{3}{2} = \frac{-7}{2}$

است.

(ریاضی ۲، مثلثات، صفحه‌های ۱۱۸ تا ۹۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$4^a = 2\sqrt{2} \Rightarrow (2^2)^a = 2^1 \times 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2^{2a} = 2^{1+\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow 2a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \log_4^{(4a+1)} = \log_4^{(4 \times \frac{3}{4} + 1)} = \log_4^4 = 1$$

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۱۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$f(2\sqrt{3}) = \log_4^{((2\sqrt{3})^2 + 4)} = \log_4^{(12+4)} = \log_4^{16}$$

$$\Rightarrow \log_4^{16} = a \Rightarrow 4^a = 16 \Rightarrow 4^a = 4^2 \Rightarrow a = 2$$

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۱۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(کتاب آبی)

برای آنکه ببینیم  $\log_b^a$  بین کدام دو عدد صحیح متوالی است کافی است ببینیم به ازای کدام  $n$ ،  $a$  بین  $b^n$  و  $b^{n+1}$  است، لذا:

$$3^1 = 3 < 7 < 3^2 = 9 \Rightarrow 1 < \log_3^7 < 2$$

پس  $\log_3^7$  بین دو عدد ۱ و ۲ قرار می‌گیرد.  
(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۱۴)

□۴

□۳

□۲

□۱✓

(کتاب آبی)

نقطه  $(\frac{3}{2}, 8)$  روی نمودار تابع  $f$  قرار دارد، بنابراین نقطه  $(8, \frac{3}{2})$  روی نمودار وارون آن قرار دارد، کافی است ببینیم این نقطه در ضابطه تابع کدام گزینه صدق می‌کند.

گزینه (۱):

$$f^{-1}(x) = 2^x \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2} \neq 8$$

گزینه (۲):

$$f^{-1}(x) = 3^x \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3} \neq 8$$

گزینه (۳):

$$f^{-1}(x) = 4^x \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = 4 \times 2 = 8$$

پس گزینه «۳» صحیح است.

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۱۴)

□۴

□۳✓

□۲

□۱

(کتاب آبی)

چون زاویه منفی است، حرکت در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. از طرفی  $۴۵^\circ = ۳۶^\circ + ۹^\circ$  پس یک دور کامل به همراه  $۹^\circ$  در جهت منفی حرکت می‌کنیم.

(ریاضی ۲، مثلثات، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

(کتاب آبی)

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \sin^2 \theta + \frac{9}{25} = 1 \Rightarrow \sin^2 \theta = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{4}{5} \text{ یا } \sin \theta = -\frac{4}{5}$$

نقطه انتهایی کمان  $\theta$  در ربع سوم دایره مثلثاتی قرار دارد، پس  $\sin \theta = -\frac{4}{5}$

قابل قبول است.

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{16}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{-\frac{7}{9}} = -\frac{12}{7}$$

(ریاضی ۲، مثلثات، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

(کتاب آبی)

$$f(x+3) = 9f(x) \Rightarrow a^{x+3} = 9 \times a^x$$

$$\Rightarrow a^x \times a^3 = 9 \times a^x \Rightarrow a^3 = 9 \Rightarrow a = \sqrt[3]{9}$$

بنابراین  $f(x) = (\sqrt[3]{9})^x$ 

$$f(x) = (\sqrt[3]{9})^x \xrightarrow{x=2} f(2) = (\sqrt[3]{9})^2 = \sqrt[3]{9^2}$$

$$= \sqrt[3]{27 \times 3} = 3\sqrt[3]{3}$$

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳)

۴

۳ ✓

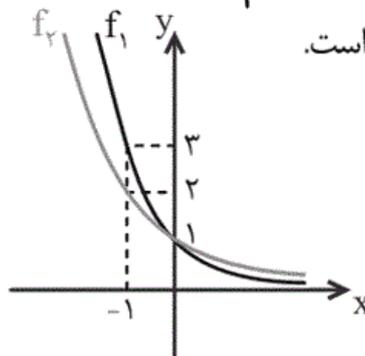
۲

۱

(کتاب آبی)

با توجه به اینکه  $c > 1$  است، پس تابع  $f_3(x) = c^x$  افزایشی است؛ بنابراین گزینه (۲) یا (۳) صحیح است.

با فرض  $a = \frac{1}{3}$  و  $b = \frac{1}{4}$ ، نمودار  $f_1(x) = (\frac{1}{3})^x$  و  $f_2(x) = (\frac{1}{4})^x$  به صورت مقابل خواهد بود. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.



(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳)

۴

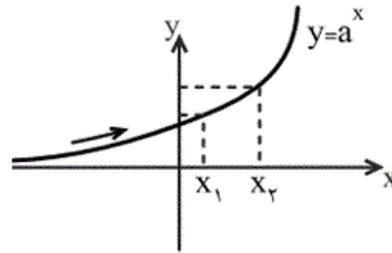
۳ ✓

۲

۱

(کتاب آبی)

برای مقایسه عبارتهای توانی با هم، پایه‌ها را یکی کرده و نماها را با هم مقایسه می‌کنیم.



توجه کنید که با توجه به نمودار تابع  $y = a^x$ :

$$\text{اگر } a^{x_1} < a^{x_2} \xrightarrow{a > 1} x_1 < x_2$$

در هر دو نامساوی سعی می‌کنیم پایه‌ها را برابر کرده و سپس نماها را با توجه به نمودار بالا با هم مقایسه کنیم.

$$\left\{ \begin{array}{l} 9\sqrt{3} = (3^2)\sqrt{3} = 3^2\sqrt{3} = 3^{2+1/2} = 3^{5/2} \\ 27 = 3^3 \end{array} \right. \Rightarrow 9\sqrt{3} > 27 \quad \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (0/25)\sqrt{35} = \left(\frac{1}{4}\right)\sqrt{35} = (2^{-2})\sqrt{35} = 2^{-2}\sqrt{35} \\ \frac{1}{16^3} = \frac{1}{(2^4)^3} = \frac{1}{2^{12}} = 2^{-12} \end{array} \right.$$

از آنجایی که  $\sqrt{35} < 6$  پس  $-2\sqrt{35} > -12$ ، در نتیجه:

$$-2\sqrt{35} > -12 \Rightarrow 2^{-2\sqrt{35}} > 2^{-12}$$

$$\Rightarrow (0/25)\sqrt{35} > \frac{1}{16^3} \quad \checkmark$$

بنابراین:

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳)

۴ ✓

۳

۲

۱

(کتاب آبی)

$$9^x + 3^{x+1} - 18 = 0 \Rightarrow (3^2)^x + 3 \times 3^x - 18 = 0$$

$$\Rightarrow (3^x)^2 + 3 \times 3^x - 18 = 0$$

با فرض  $3^x = t > 0$  به معادله درجه دوم زیر خواهیم رسید:

$$t^2 + 3t - 18 = 0$$

$$\Rightarrow (t+6)(t-3) = 0 \Rightarrow t_1 = 3, t_2 = -6 \quad \text{غ.ق}$$

بنابراین:

$$3^x = 3 \Rightarrow x = 1$$

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

(کتاب آبی)

نمودارهای دو تابع  $f$  و  $g$  در نقطه‌ای به طول ۱- متقاطع هستند، پس:

$$f(-1) = g(-1) \Rightarrow 3^{-a+b} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow 3^{-a+b} = 9 = 3^2 \Rightarrow -a + b = 2 \quad (*)$$

از طرفی  $f(2) = \frac{1}{3}$  بنابراین:

$$3^{2a+b} = \frac{1}{3} = 3^{-1} \Rightarrow 2a + b = -1 \quad (**)$$

از حل دستگاه معادلات (\*) و (\*\*) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} -a + b = 2 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 3a = -3 \Rightarrow a = -1 \xrightarrow{(*)} b = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = 3^{-x+1}$$

حال برای محاسبه  $f^{-1}(27)$ ، کافی است معادله  $f(x) = 27$  را حل کنیم:

$$3^{-x+1} = 27 = 3^3 \Rightarrow -x + 1 = 3 \Rightarrow -x = 2 \Rightarrow x = -2$$

(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

(کتاب آبی)

سمت چپ تساوی را با ساده‌سازی به صورت توانی از ۲ می‌نویسیم:

$$\left(\frac{4\sqrt{32}}{2\sqrt{8}}\right)^2 = \left(\frac{(2^2)^4\sqrt{2}}{2^2\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{2^8\sqrt{2}}{2^2\sqrt{2}}\right)^2 = (2^8\sqrt{2} - 2\sqrt{2})^2$$

$$= (2^6\sqrt{2})^2 = 2^{12}\sqrt{2}$$

$$2^{12}\sqrt{2} = 2^A \Rightarrow A = 12\sqrt{2}$$

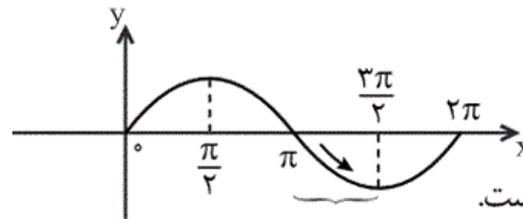
(ریاضی ۲، توابع نمایی و لگاریتمی، صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳)

۴ ✓

۳

۲

۱



با رسم نمودار تابع  $y = \sin x$

دیدیم می‌شود که در بازه

$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ ، تابع کاهشی و نامثبت است.

(ریاضی ۲، مثلثات، صفحه‌های ۱۱ تا ۹۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

در رابطه داده شده،  $x = \frac{\pi}{3}$  را قرار می‌دهیم.

$$f(x) = 2 \cos x + 3f\left(\frac{\pi}{3}\right) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{3}} f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times \frac{1}{2} + 3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow -2f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2}$$

بنابراین:

$$f(x) = 2 \cos x - \frac{3}{2}$$

$$-2 - \frac{3}{2} = \frac{-7}{2} \quad \cos x = -1 \quad \text{به ازای } f \text{ مینیمم تابع } f \text{ حاصل می‌شود و برابر}$$

است.

(ریاضی ۲، مثلثات، صفحه‌های ۱۱ تا ۹۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱